2ª Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

www.jvdiesproyco.es

Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Actas de las 2ª Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

ISSN 2386-5520

Número 2

Abril de 2015

Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria
ISSN: 2386-5520
Depósito Legal: GR 446-2013

Editada por el Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Para citar:
En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2. Granada, 2015.

Agradecemos la ayuda recibida por el **Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada - Programa para la organización de reuniones científicas (2014)**

De igual forma agradecemos el apadrinamiento de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), the International Asociación for Statistical Education (IASE), the World of Statistics, el Instituto Nacional de Estadística - Portal divulgativo Explica, la Universidad de Granada y la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Contacto
José Miguel Contreras García
jmcontreras@jvdiesproyco.es
Telf. +34 958 249622
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Granada, Campus Cartuja, C.P. 18071, Granada

Índice

Ponencias

Segundas Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Actitudes positivas hacia la estadística: uno de los objetivos prioritarios en la formación del profesorado

Assumpta Estrada Roca

aestrada@matematica.udl.cat, Universidad de Lleida

Resumen

El análisis de las actitudes hacia la estadística tiene ya una cierta tradición sobre todo en las dos últimas décadas porque dadas las características del proceso educativo de la estadística es fácil entender que en la interacción profesor -alumno no solamente se transmiten conocimientos sino también, un posicionamiento actitudinal por parte del docente que puede afectar dicho proceso de enseñanza-aprendizaje. El objetivo de esta ponencia es, en primer lugar, aportar información sobre la conceptualización del constructo "actitudes hacia la estadística", analizando sus componentes, las variables que las afectan, así como los diferentes instrumentos de medida. En segundo lugar, presentar las investigaciones más relevantes sobre actitudes hacia la estadística centrándonos específicamente en el colectivo de los profesores de educación primaria tanto en formación como en ejercicio.

Palabras clave: Actitudes, Estadística, Educación, Profesores

.

1. Introducción

La estadística es un componente importante de la educación escolar en el que los profesores tienen un rol fundamental *(*Estrada, 2010) pero a pesar de su utilidad reconocida y de figurar en los programas oficiales, es una materia frecuentemente olvidada en la educación primaria y secundaria, no sólo en España, sino a nivel internacional.

Para algunos autores (Mendonça, Coutinho y Almouloud, 2006), esto es debido, en parte, a la escasa preparación estadística con la que el profesor termina sus estudios, lo que hace que cuente con pocos recursos a la hora de dar sus clases y, tienda a omitir el tema, acortarlo o, en el mejor de los casos, a presentarlo con una metodología inadecuada.

Asistimos, por tanto, a un círculo vicioso, en el que los profesores, faltos de formación, van generando actitudes negativas hacia la materia, infravalorando su utilidad, percibiéndola como un contenido difícil que no pueden llegar a dominar, incluso compartiendo concepciones erróneas y dificultades con sus alumnos (Stohl, 2005), dudando de su capacidad para enseñar la materia y asumiendo que este tema no debe incluirse en la formación básica de sus estudiantes. Estos sentimientos de rechazo les llevan inconscientemente a posponer su autoformación estadística, a prescindir del uso de un instrumento que podría mejorar muchos aspectos de su actuación profesional y, en lo posible, a omitir su enseñanza.

El profesorado vive en la práctica mucho más alejado del dominio afectivo en la enseñanza que de la comprensión de conceptos y procesos y del desarrollo de destrezas en el dominio cognoscitivo. Pero olvidar las actitudes preconcebidas del profesorado ante la materia lleva a menudo al fracaso de la educación. (Estrada, Batanero y Lancaster, 2011)

Por ello aunque sabemos que la medida de las actitudes es una tarea difícil pues conlleva conocer lo que realmente una persona siente y valora, la medición y evaluación de

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 3-13). Granada, 2015.

actitudes es un capitulo central, tanto para la investigación científica como para la práctica educativa porque los alumnos, tal como indican Gal y Ginsburg (1994), tienen sentimientos fuertes y definidos hacia la estadística antes de iniciar su formación y según sean estos sentimientos (positivos o negativos) será el aprendizaje.

El objetivo de esta conferencia es presentar las actitudes hacia la Estadística analizando sus componentes, las variables que las afectan, así como los diferentes instrumentos de evaluación. Se presentan también resumidamente los resultados de las principales investigaciones sobre actitudes centrándonos en las de los profesores de educación primaria. De ello nos ocuparemos en los apartados siguientes.

2. Las actitudes hacia la estadística

Los trabajos de McLeod (1989, 1992, 1994), han contribuido en gran medida a reconocer la importancia de las cuestiones afectivas, y explican los efectos diferenciales de las predisposiciones actitudinales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y por consiguiente, de la estadística.

Considera como descriptores específicos de este dominio, las creencias, actitudes y emociones. Con respecto a las creencias, pueden definirse como una amalgama diversa de conocimiento y sentimientos subjetivos sobre un cierto objeto o persona. Son las ideas individuales, mantenidas en el tiempo, que se tienen sobre la materia, sobre uno mismo como estudiante, o sobre el contexto social en el que se realiza el aprendizaje. Son diferentes del conocimiento puesto que éste debe implicar un cierto grado de objetividad y validación de la realidad inmediata.

Por lo que respecta a las emociones, para McLeod (1989 y 1992) son respuestas inmediatas positivas o negativas producidas mientras se estudia matemáticas o estadística. Se diferencian de la reacción emocional en que ésta es más visceral y aunque sea intensa, es de corta duración, frecuentemente se utilizan indistintamente aunque en el aula se puede estar experimentando una emoción sin que externamente se produzca una reacción emocional.

Respecto a las actitudes, resultan difícil de definir y no hay unanimidad respecto al significado del término actitud para McLeod (1992) las actitudes son respuestas o sentimientos más intensos y estables que se desarrollan por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo.

En general, la relación entre el dominio afectivo (emociones, actitudes y creencias) y el aprendizaje, no va en un único sentido, ya que los afectos condicionan el comportamiento y la capacidad de aprender y recíprocamente, el proceso de aprendizaje provoca reacciones afectivas.

En la Figura 1 presentamos el diagrama, según el cual Gómez Chacón (2000, p. 26) interpreta los descriptores específicos del dominio afectivo en Matemáticas, y donde podemos ver cómo el estudiante, ante una situación de aprendizaje matemático, reacciona positiva o negativamente, según sean sus creencias acerca de sí mismo y de la materia. Si la situación se reitera varias veces, produciéndose el mismo tipo de reacción afectiva, (frustración, satisfacción, etc.) ésta puede convertirse en actitud. Estas actitudes y emociones así generadas influyen en las creencias y contribuyen a su formación.

Goldin, Rösken e Törner (2009) indican que en términos de afectividad existe un orden decreciente entre las emociones, actitudes y creencias al contrario de lo que sucede con la estabilidad con el paso del tiempo y con la influencia de los elementos cognitivos. Es decir las emociones son marcadamente afectivas, no muy estables y poco influenciadas por elementos cognitivos. Las creencias están menos relacionadas con los afectos, son en general más estables e incorporan conocimientos más específicos y detallados. Finalmente las actitudes pueden ser consideradas tanto como predisposiciones a ciertos patrones de comportamiento como a ciertos tipos de sentimientos hacia determinados dominios, por ejemplo la estadística, e influenciado por elementos cognitivos.

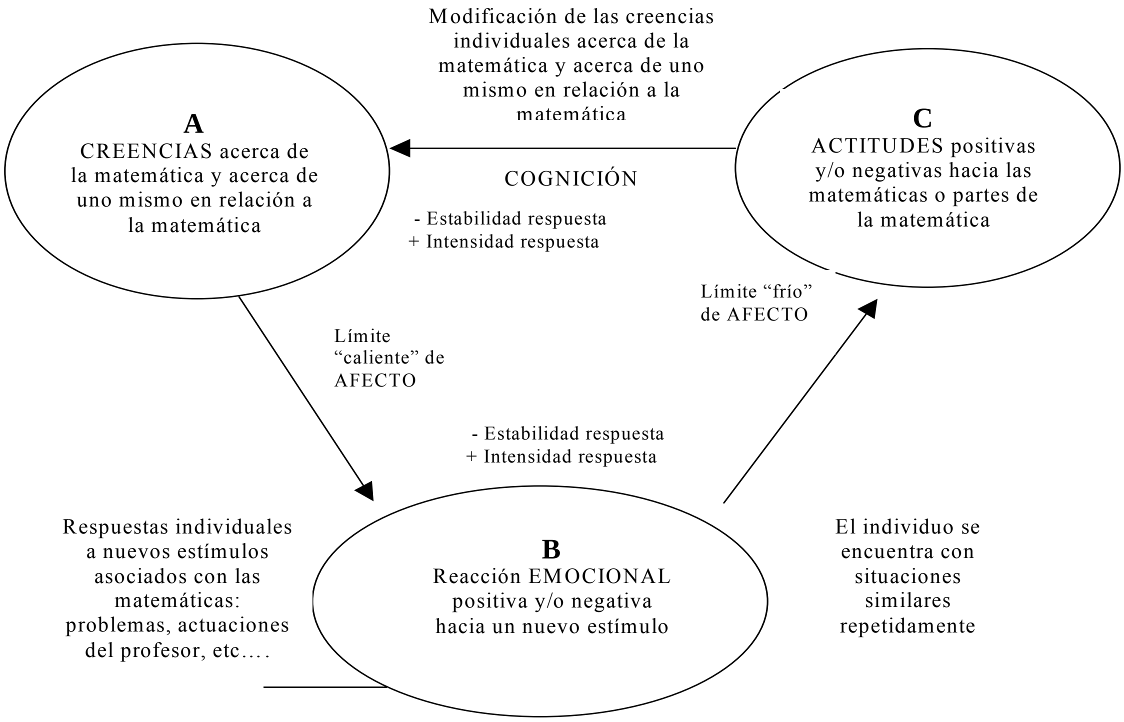


Figura 1. Descriptores específicos del dominio afectivo según Gómez Chacón (2000)

Las actitudes aparecen como un fenómeno de difícil definición, debido a que no constituyen una entidad observable, sino que son construcciones teóricas que se infieren de ciertos comportamientos externos, frecuentemente verbales.

Así, dependiendo del investigador, encontramos diversas definiciones. Para Auzmendi (1992, p. 17), las actitudes son "aspectos no directamente observables sino inferidos, compuestos tanto por las creencias como por los sentimientos y las predisposiciones comportamentales hacia el objeto al que se dirigen". Gómez Chacón (2000) entiende la actitud como: "una predisposición evaluativa (es decir positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento"(p. 23). Por otro lado, Gal y Garfield (1997) las consideran como "una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio" (p. 40).

Más recientemente Phillipp (2007) las considera como sentimientos, acciones o pensamientos que manifiesta una persona respecto a una materia. Siempre se expresan positivamente o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto), surgen favorables en edades muy tempranas pero evolucionan negativamente con el paso del tiempo.

Según los estudios encontrados sobre formación de actitudes hacia la estadística, su origen proviene de:

- Las experiencias previas en contextos escolares.En el caso de la estadística, estas pueden estar basadas en aplicaciones rutinarias de fórmulas sin metodología ni aplicaciones reales adecuadas (Estrada y cols., 2011).
- Las nociones de estadística obtenidas a partir de la vida cotidiana fuera del aula, en la prensa o en los medios de comunicación que, según Gal y Ginsburg (1994), suelen estar asociadas a números y, a veces, son conceptualmente erróneas.
- Su vinculación con las matemáticas. Al considerar que la estadística es parte de las matemáticas, se transfieren las actitudes de una materia a otra. Así, se observa en algunos casos un bloqueo total delante de situaciones problemáticas que han de ser tratadas estadísticamente en alumnos que infravaloran sus capacidades matemáticas. (Estrada y cols., 2011).

En la actualidad, las actitudes hacia la estadística se consideran un concepto pluridimensional y jerárquico, compuesto de diferentes elementos o dimensiones analizables por separado (Gil Flores, 1999) que presentamos a continuación.

3. Los componentes de las actitudes hacia la estadística

Si bien en un principio se consideraba la actitud como un constructo unidimensional, progresivamente se introducen los estudios multidimensionales, en los que las actitudes hacia una materia se estructuran en componentes.

Así, para Wise (1985) existen solamente dos dominios diferenciados susceptibles de medición:

- Componente curso: contempla las actitudes hacia el curso de estadística básica que están realizando los alumnos.
- Componente campo: agrupa las actitudes de los alumnos hacia el uso de la estadística en su campo de estudio correspondiente.

Más adelante, los trabajos de Auzmendi (1992), Gil Flores (1999) y Gómez Chacón (2000) diferencian tres factores básicos en las actitudes, llamados también componentes pedagógicos:

- Componente cognitivo: se refiere a las expresiones de pensamiento, concepciones y creencias, acerca del objeto actitudinal, en este caso, la estadística.
- Componente afectivo o emocional: recogería todas aquellas emociones y sentimientos que despierta la estadística, y por ello son reacciones subjetivas de acercamiento/huida, o de placer/dolor.
- Componente conductual o tendencial: son expresiones de acción o intención conductista/conductual y representan la tendencia a resolverse en la acción de una manera determinada.

En Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio (1995) se estructuran en cuatro dimensiones o componentes:

- Afectivo: sentimientos positivos o negativos hacia la estadística.

- Competencia cognitiva: percepción de la propia capacidad sobre conocimientos y habilidades intelectuales en estadística.
- Valor: utilidad, relevancia y valor percibido de la estadística en la vida personal y profesional.
- Dificultad: se refiere a la percibida de la estadística como asignatura. Aunque un estudiante pueda reconocer el valor de una materia, sentir interés hacia la misma (componente afectivo) y pensar que tiene suficientes conocimientos y habilidades (componente cognitivo), puede llevarlo a considerar la materia como fácil o difícil.

Más recientemente, Ramirez, Schau e Emmioglu (2012), han añadido dos componentes más a las anteriores:

- Esfuerzo: que supone realizar una asignatura de estadística.
- Interés que tiene en aprenderla.

En Estrada (2002) también se parte de un concepto pluridimensional de las actitudes de los profesores hacia la estadística, contemplando los componentes pedagógicos descritos anteriormente pero además se consideran otros componentes llamados antropológicos:

- Componente social: actitudes relacionadas con la percepción y valoración del papel de la Estadística en el ámbito sociocultural de cualquier ciudadano.
- Componente educativo*:* analizaremos en este componente el interés hacia la Estadística y su aprendizaje, la visión de su utilidad para el alumno, su opinión sobre si debiera ser incluida en el currículo y la dificultad percibida.
- Componente instrumental*:* se recoge aquí la utilidad hacia otras materias, como forma de razonamiento y como componente cultural.

Estas propuestas han servido de base para la elaboración de distintos cuestionarios de actitudes hacia la estadística que se describen a continuación.

4. Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística

En general, todos los instrumentos de medida son escalas de tipo Likert, la mayoría multidimensionales, compuestos por un número determinado de proposiciones, habitualmente más de veinte y con cinco o siete posibilidades de respuesta que varían según el grado de acuerdo del encuestado.

La primera escala de actitudes hacia la estadística que aparece utilizada por diferentes autores es el SAS -Statistics Attitude Survey- de Roberts y Bilderback (1980), elaborado para suplir las necesidades de medir las actitudes de los estudiantes por parte de los profesores de estadística. Los autores la consideran como un cuestionario unidimensional.

Para Wise (1985) el SAS cubre una importante necesidad de medida del constructo, pero muchos de sus ítems son del todo inapropiados para alumnos que acaban de comenzar la asignatura de estadística y además parecen medir más el rendimiento de los estudiantes que sus actitudes hacia la estadística por lo que aborda la construcción de una escala alternativa: el ATS –Attitudes Toward Statistics Scale- con ítems netamente actitudinales, que tiene como finalidad medir el cambio actitudinal en estudiantes de estadística básica. Se clasifican dos dominios diferenciados susceptibles de medición en el ATS: actitudes hacia el curso que están realizando y actitudes de los alumnos hacia el uso de la Estadística en su campo de estudio.

A pesar de que las escalas antes descritas ATS y SAS son pruebas fiabilizadas y validadas ampliamente, los estudios realizados con ellas se hicieron en muestras de estudiantes con unas características socioeducativas muy diferentes a las españolas , razón fundamental que anima a Auzmendi (1992) a crear un nuevo instrumento de medida que se adecue a nuestra realidad social y que contemple la consideración multidimensional de las actitudes hacia las matemáticas y hacia la estadística, recogiendo los factores más significativos.

Respecto a la selección de las dimensiones de la escala se realiza según el criterio de mayor frecuencia de aparición del factor, en una serie de escalas, curiosamente de actitudes hacia las Matemáticas. Los factores escogidos son cinco (utilidad, ansiedad, confianza, agrado y motivación) y la escala resultante consta de 25 ítems que se reparten en los 5 factores básicos que han servido de guía para la elaboración del instrumento de medida con una consistencia interna y validez elevada.

Según Schau y cols. (1995), los instrumentos de medida de las actitudes hacia la estadística, hasta ahora descritos no cumplen una serie de características clave por lo que , diseñaron el cuestionario de actitudes hacia la Estadística SATS –Survey of Attitudes Toward Statistics- utilizando una variación de la técnica denominada de grupo nominal (NGT), Moore (1987). Los 28 ítems resultantes después de la validación por análisis factorial confirmatorio se estructuran en cuatro componentes: afectivo, competencia cognitiva, valor y dificultad, ya explicados en el apartado anterior.

Revisiones posteriores de distintos cuestionarios llevan a Ramirez, Schau y Emmioglu (2012) a ampliar el SATS añadiendo varios ítems más relativos al esfuerzo e interés por la materia , dando lugar a una nueva escala, el SATS -36 con una consistencia interna y validez elevada.

Finalmente la escala de actitudes hacia la estadística (EAEE) propuesta por Estrada (2002) se caracteriza por ser específica para docentes y por considerar diferentes aspectos didácticos de las actitudes, ya explicados en el apartado anterior. Esta escala se construyó combinando las escalas SAS y ATS, ambas consideradas internacionalmente como las más usuales, y la española de Auzmendi. Está compuesta por 25 ítems, 13 afirmativos frente a 12 negativos, que se distribuyen según componentes pedagógicos y antropológicos ya definidos y se ha aplicado en diferentes colectivos de profesores y contextos.

Hasta ahora hemos descrito las escalas de medición de actitudes hacia la estadística más destacadas y utilizadas a nivel internacional, Un análisis mas detallado aparece en Estrada (2009 y 2010) y mas recientemente en Ramirez, Schau y Emmioglu (2012).

5. Investigaciones sobre actitudes hacia la estadística

En los estudios más relevantes sobre actitudes hacia la estadística podemos observar cómo las investigaciones realizadas se han orientado fundamentalmente hacia la construcción de un instrumento de medida, ya explicados en el apartado anterior. Otros a analizar la influencia de diversas variables tales como el género (Anastasiadou, 2005), el rendimiento académico (Nasser, 2004), la experiencia formativa en matemáticas y estadística (Auzmendi, 1992; Mastracci 2000), el tipo de bachillerato o el área de estudios (Gil Flores, 1999; Cuesta y cols., 2001)

Un análisis detallado de estas investigaciones aparece en Estrada (2009), en general la mayoría se han dirigido a estudiantes universitarios y son pocas las que dedican su atención al colectivo de profesores estudiando sus actitudes juntamente con otras variables. A continuación se presentan resumidamente las más relevantes

Onwuegbuzie utiliza un modelo multivariado para la predicción del rendimiento en asignaturas de estadística. Se dedica fundamentalmente al estudio de la ansiedad y de las actitudes de los profesores, medidas estas últimas a través del ATS. Entre sus conclusiones destacamos por un lado, las correlaciones significativas entre el número de asignaturas de Estadística cursadas con anterioridad y las puntuaciones en ATS-Campo y ATS-Asignatura (Onwuegbuzie, 1998). Por otro lado, al aplicar el modelo, comprueba que las actitudes y la ansiedad hacia la estadística influyen en los resultados de los cursos por lo que animan a los formadores de profesores a crear entornos de aprendizaje adecuados (cognitivos y afectivos) en sus clases para que sus alumnos puedan explorar diferentes metodologías, adquieran seguridad en sus propias capacidades para aprender y enseñar estadística y, sobre todo, valoren el importante papel que tiene esta materia en la sociedad actual (Onwuegbuzie, 2003).

Watson, Kromrey, Ferron, Lang y Hogarty, (2003) aplicaron conjuntamente el SATS y el cuestionario de ansiedad denominado STARS a una muestra de 200 graduados universitarios matriculados en Facultades de Educación. La correlación entre las puntuaciones totales del SATS y del STARS fue de -0,89. Además es uno de los pocos estudios en los que se complementan las preguntas habituales -formato de respuesta tipo Likert- con preguntas abiertas de cuyas respuestas infieren las motivaciones y causas de las actitudes de sus alumnos.

Nasser y sus colaboradores han realizado en la última década varios estudios en los que también analizan la relación entre las actitudes o la ansiedad y el rendimiento; (Wisenbaker, Nasser y Scott, 1999) y en Nasser (2004) es donde trata de construir un modelo estadístico para predecir las actitudes de futuros profesores en función de diferentes variables. Para ello analiza la posible relación entre las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas y la estadística, la aptitud matemática, la motivación y los resultados en estadística de 167 profesores en formación de lengua árabe matriculados a cursos de introducción a la estadística en Israel. En sus conclusiones se confirma la influencia de la aptitud matemática en los resultados en estadística como la más robusta y también indican que la aptitud matemática, la motivación, las actitudes hacia las Matemáticas y la Estadística, y la ansiedad hacia las Matemáticas, explican el 36% de la varianza del rendimiento en Estadística.

En lo que sigue, resumimos nuestra propia investigación, orientada al estudio de las actitudes y conocimientos estadísticos de los profesores y cuyo objetivo final es fundamentar la acción didáctica que permita incidir en las actitudes de los profesores e indirectamente en la mejora de la enseñanza de la estadística en la educación primaria.

El trabajo se ha llevado a cabo durante un periodo dilatado de tiempo, y ha tenido distintas fases y enfoques diferentes. En una primera fase nos centramos en el estudio de las actitudes hacia la estadística, comparando los profesores en formación y en ejercicio de Educación Primaria. Este estudio y sus conclusiones se describen en Estrada y cols.(2004).

Posteriormente decidimos utilizar para la segunda fase el S.A.T.S. de Schau y cols. (1995), y completar el estudio, con una evaluación exploratoria de los conocimientos estadísticos de los profesores en formación para lo que utilizamos parte del cuestionario *Statistics Reasoning Assessment* (Garfield, 2003). La tercera fase tiene por objetivo estudiar la dimensionalidad del dominio de las actitudes hacia la Estadística de los profesores en formación según la estructura teórica de cuatro factores o componentes propuesta por sus autores

En un intento de aproximación más cualitativo a nuestro análisis de actitudes hacia la estadística, en la cuarta fase utilizamos, en una muestra de 121 futuros profesores de la misma población, una versión abierta del SATS en la que se pedía a los alumnos razonar o justificar las respuestas a los ítems con puntuaciones por debajo de la posición de indiferencia. .Los resultados de estos estudios se detallan en Estrada y cols (2011).

Finalmente en la última fase estamos realizando estudios multiculturales comparando las actitudes de profesores españoles, peruanos y portugueses considerando la escala desarrollada por Estrada (2002) adaptada a los distintos contextos y países. Las implicancias de los resultados aparecen en las investigaciones de Estrada, Bazán y Aparicio (2010a, 2010b) con profesores peruanos y en las de Martins, Nascimento y Estrada (2009, 2011,2012) para los profesores portugués.

6. Consideraciones Finales

Por todo lo expuesto hasta ahora, vemos que es importante el estudio de las actitudes hacia la estadística de los profesores, objetivo principal de esta ponencia, por dos razones: una, los resultados formativos y otra, su influencia en el propio proceso educativo ya que las actitudes del profesor se trasmiten a sus alumnos.

Para el colectivo de profesores en formación las distintas investigaciones indican que sus actitudes hacia la estadística son moderadamente positivas globalmente y en sus distintos componentes, destacando el componente cognitivo como el más valorado. Curiosamente no se encuentran diferencias acusadas entre sus actitudes y las de los profesores en ejercicio por lo que se deduce que no mejoran con la práctica docente.

Respecto a la influencia de variables se observa que las actitudes correlacionan con los conocimientos y con los años de estudio de estadística pero no con el género, ni la especialidad. Además para los profesores en formación, el valor de la estadística aparece claramente independiente de sus sentimientos, dificultad percibida o capacidad cognitiva.

Los estudios transculturales realizados indican que los profesores españoles son los que obtienen mejores puntuaciones totales seguidos de los portugueses y peruanos, resultados en consonancia con las diferencias de énfasis del currículo de educación primaria en estos países (Estrada et al., 2010).

El principal argumento tanto de actitudes positivas como negativas es el tipo de enseñanza (o la falta de ella) recibida y el valor formativo percibido por ello la mejor preparación de los profesores es un requisito imprescindible si queremos mejorar sus actitudes y su práctica docente

Es preciso reforzar la enseñanza, mejorar su metodología y concienciarlos de sus múltiples aplicaciones y sobre todo es necesario planificar una acción educativa que permita incidir directamente en las actitudes e indirectamente en la mejora de la enseñanza de esta materia en todos los niveles de aprendizaje.

Referencias

Anastasiadou, S. (2005). Affective reactions and attitudes of the last class of greek high school students towards statistics *Proceedings of CERME IV, European Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Girona: CERME* On line, http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero. Bilbao.

Cuesta, M., Rifá, H., y Herrero, F.J. (2001). Un estudio exploratorio, en estudiantes de psicología, de una escala de actitudes hacia la estadística. Póster presentado en *el VII Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud*, Madrid.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis Doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias, 22* (2), 263-274.

Estrada, A. (2010), Instrumentos de medición de actitudes hacia la Estadística: la escala EAEE para profesores. En Moreno, M., Estrada, A., Carrillo, J., y Sierra,T (Eds,), *XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática LLeida* (pp.271-280): SEIEM. ISBN: 978-84-8409-321-3. ISSN: 1888-0762, D.L.: L-923-2010

Estrada, A., Bazán, J. L. y Aparicio, A. (2010a). A cross-cultural psychometric evaluation of the attitude statistic scale Estrada's in teachers. In C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. *Proceedings of Eighth International Conference on Teaching of Statistics* (ICOTS 8). Ljubljana. Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Estrada, A., Bazán, J., & Aparicio, A. (2010b). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. UNIÓN, 24. http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=96

Estrada, A., Batanero, C. y Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 163–174). New York: Springer.

Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assesment framework. *Journal of Statistics Education,* 2 (2). On line, http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html

Gal, I. y Garfield J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). IOS, Press, Voorburg.

Garfield, J. B. (2003). Assessing statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal,* 2 (1), 22-38. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ2(1).

Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.

Goldin, G., Rösken, B. e Törner, G. (2009). Beliefs – No longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. Em Maaβ, J. e Schlöglmann (Eds.). *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Results*. Sense Publishers, Rotterdam, Netherlands, 2009, pp. 1-18.

Gómez Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Narcea. Madrid.

Mc LEOD, D. B. (1989). Beliefs, attitudes and emotions: new vewof affect in mathematics education. En: D. B. Mc Leod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 245-258). New York: Springer-Verlag.

Mc Leod, D. B. (1992). Reseach on affect in mathematics education: A reconceptualization. En: D.A. Grows (ed.). *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). Macmillam N.C.T.M. New York.

Mc Leod, D. B. (1994). Reseach on affect and mathematics learning in JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), 637-647

Manassero, M. A. y Vazquez, A. (2001).Instrumentos y métodos para la evaluación de actitudes relacionadas con la ciencia, la tecnología y la sociedad. *Enseñanza de las Ciencias*, 20 (1), 15-27.

Martins, J., Nascimento, M. y Estrada, A. (2009). Estudio preliminar de las actitudes de profesores portugueses hacia la estadística. En T. Cotos, M. Mosquera & A. Pérez (Eds.), *Actas do IX Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións* (pp. 31-36). Ourense: Departamento de Estatística e Investigación Operativa de la Universidad de Vigo.

Martins, J., Nascimento, M. y Estrada, A. (2011). Attitudes of teachers towards statistics: a preliminary study with portuguese teachers. Em M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 7* [CD-ROM]. Rzeszow: European Society for Research in Mathematics Education e University of Rzeszów. En línea: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/5/CERME_Martins-Nascimento-Estrada.pdf

Martins, J. A., Nascimento, M. M. S. y Estrada, A. (2012). Looking back over their shoulders: A Qualitative Analysis of Portuguese Teachers' Attitudes Towards Statistics. Statistics Education Research Journal, 11(2), 26-44. En línea: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ11(2)_Martins.pdf

Mastracci, M. (2000). *Gli aspecti emotive nell'evolution dell'apprendimento della statistica e della sua valutazione. Un caso di studio sugli studenti di SSA.* Tesis de Laurea. Universidad La Sapienza de Roma.

Mendonça, T., Coutinho, C. y Almouloud, S. (2006). Mathematics education and statistics education: meeting points and perspectives. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* CD ROM. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education,* 12 (1). On line: www.amstat.org/publications/jse/v12n1/nasser.html.

Onwuegbuzie, A.J. (1998). Teachers` attitudes toward statistics. *Psychological Reports*, 83, 1008-1010.Onwuegbuzie, A.J. (2003). Modeling statistics achievement among graduate students. *Educational and Psychological Measurement*, 63(6), 1020-1038.

Philipp, R. (2007). Mathematics Teachers' Beliefs and affect. Em F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Matehmatics* (pp. 257-314). Charlotte: Information Age Pub.

Ramirez, C., Schau, C. e Emmioglu, E. (2012). The importance of attitudes in statistics education. *Statistics Education Research Journal*, **11 (2)**: 57-71. Acedido em 2 de dezembro de 2012, em: http://www.stat.auckland.ac.nz/serj

Schau, C. (2003). Students' attitudes: the other important outcome in statistics education. Paper presented at the *Join Statistical Meeting of the American Statistical Association*, 2003.

Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. y del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement,* 55 (5), 868-875.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. Jones (ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Dordrecht: Kluwer.

Tishkovskaya, S. & Lancaster, G. (2012). Statistical Education in the 21st Century: a Review of Challenges, Teaching Innovations and Strategies for Reform. *Journal of Statistics Education*, *20* (2), 1-24. En línea: http://www.amstat.org/publications/jse/v20n2/tishkovskaya.pdf

Watson, F., Kromrey, J., Ferron, J., Lang, T. y Hogarty, K. (2003). *An assessment blueprint for Encstat: A statistics anxiety intervention program*. Comunicación presentada al AERA Annual Meeting, San Diego.

Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405.

Wisenbaker, J., Nasser, F., y Scott, J.S. (1999, agosto). *A cross-cultural comparison of path models relating attitudes about and achievement in Introductory Statistics Courses*. Comunicación presentada a la 52nd ISI –International Statistical Institute- Session, Helsinki.

Agradecimientos

Este trabajo tiene el apoyo del Proyecto EDU 2013-41141-P (MICIIN, España)

Central theorems of probability theory and their impact on probabilistic intuitions

Manfred Borovcnik

manfred.borovcnik@aau.at, Alpen-Adria University, Klagenfurt

Abstract

The Central Limit Theorem (CLT) substantiates the normal distribution, which becomes a key player in probability and statistics. A simplification of the mathematics is needed so that students can shape their intuitions on probability. The CLT justifies using the normal distribution as an approximation for random variables that are or that can be thought to be the sum of other random variables. Our key experiment has to do with text analysis from a statistical point of view. It is surprising and motivating for learners that we can predict the shape of the distribution, which is investigated. The considerations also motivate how the continuous standard normal distribution can be the limit of discrete distributions. Text analysis provides a natural context to discuss interrelations between samples and populations, which form the core of inferential statistics.

Keywords: Standardized sums; Normal approximation; Class experiment

1. Introduction

Probability is a difficult concept and there are many misleading intuitions. Unlike in geometry our perception has not been trained to improve our ideas as probability is not a physical property in the real world. Yet it is often equated to the relative frequencies of an event in a series of repeated experiments. In fact, there is a relation between the two concepts (if only such an experiment could be repeated under the same conditions) – though this relation is a bit more complicated. Some statisticians therefore prefer to speak of probability as a metaphor to communicate about a random situation, or they would state that probability is a virtual concept (like the Internet or computer games are virtual worlds).

Mathematically three groups of central theorems regulate what probability is and how we can interpret it. The one group of theorems is the laws of large numbers; the second is the group of Central Limit Theorems. The third is Bayes' theorem by which subjective probabilities converge to the relative frequencies. The first justifies that we interpret probability in terms of relative frequencies. The basic Law of Large Numbers is usually summarized as: the relative frequencies "converge" to the (possibly) unknown probability of the event under scrutiny. The second explains why we can describe the variation of a random variable by a normal distribution in quite a few cases (and becomes eminently important in statistical inference). The simplest case has become famous in the history of probability as the law of errors, which is a thought experiment: if a measurement error can be explained by a sum of elementary errors (each of them is not observable) then the resulting error (that can be observed) should follow a normal distribution. Bayes' theorem shows how we can improve qualitative knowledge by data.

The simplifying statement for the Law of Large Numbers is simply wrong and misleading but is has a true kernel. We could look more precisely at the mathematical theorem but this requires quite a lot of sophisticated arguments. The question is how to develop scenarios and formal signs (with accompanying pictures behind) that we can teach the topic and communicate

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 15-35). Granada, 2015.

its relevance, shape intuitions that comply with the mathematical background, and "revise" intuitions that are at least not helpful (if not wrong). How can we explain at an intuitive level, in which sense and under which conditions the relative frequencies do converge to the underlying probability? The simplifying statement for the Central Limit Theorem is simply wrong as the sum of the elementary errors cannot converge as it tends to get larger and larger if we add more elementary errors (even with an increasing variability). Again, the teaching challenge is to investigate various situations and observe a kind of divergence or convergence. A further challenge is to clarify the kind of convergence to the normal distribution and design situations where such knowledge would be helpful.

We will use simulations of random experiments and didactical animations of binomial distributions and investigate the "data" from various perspectives to support feasible ideas about the Central Limit Theorem, which will help to understand how the concept of probability may be used to extract information from data.

2. Analysis of a natural plain text

Text analysis and interpretation is a sophisticated discipline of linguistics. We will perceive text analysis in a "narrow" way. We attribute numerical codes to the signs of the text and analyse, amongst others, the frequency of the codes, or the distribution of the code sum of smaller cuts of the whole text.

The reader might remember times as child when someone tried a magic trick upon them starting with "think of two numbers between 1 and 10". Then the steps were to add the two numbers; subsequently to take the square of the sum; then to multiply the result by 9, take the square root of the intermediary number, subtract three times the second number, and divide the result by the first number. "You must have got a 3!" the person told us. We were amazed. How could this person know that number?

We will discuss an analogue experiment based on the "analysis" of texts. Instead of think of two numbers, we ask the test person to deliberately choose a text of a certain length. Instead of performing calculations with the chosen numbers, we ask to investigate the distribution of numbers that are attributed to blocks into which the text is partitioned. We cannot tell the exact distribution of the test person but predict that it looks similar to a standard normal curve.

2.1. The experiment

We follow a recommendation of Nemetz, Simon, and Kusolitsch (2002). Take a longer text, any text of your choice. Remove any blanks, special signs as periods, colons, semicolons, commas, numbers, and brackets from the text. Make sure you have exactly 20,000 signs left. Arrange the signs in one column of a spreadsheet (we will help you with that). Attribute a code number from 1 to 1000 to each of the possible signs (your choice). Separate all the signs into blocks of 20. Calculate the sum of the first 20-block, calculate the sum of numbers attributed to the signs of the second block, and repeat calculating the sum of all 1,000 blocks of 20 numbers (that are attributed to the signs of the block).

You end up with 1,000 block sums (1,000 data). Calculate the mean and the standard deviation of the block sums. After that obtain the standardized block sums, i.e., subtract from each block sum the mean and divide the result by the standard deviation. You have now 1,000 standardized block sums. I can tell that nearly all your standardized data are within the limits of −5 and 5 and if you find a histogram for your data, it will be close to the standard normal curve.

Tell two friends to join in the experiment. They should find their own attribution of numbers to the signs. Their final histogram will be quite similar to yours and to the standard normal curve. Repeat the experiment with 40,000 signs and build blocks of length 40. Your final histogram will even be closer to the standard normal curve as before. You can choose any other text you like. You can also perturb your signs in the text randomly (this is easily done by random numbers) and you will witness an even better fit of your histogram to the standard normal curve. How could we tell the result before? It is not a trick; as in the game of our childhood the result could be explained. However, the explanation goes beyond simple equations and has to do with the Central Limit Theorem. We will first show the progression of the game with a special text.

Table 1. Example of text coding

Signs	Codes	Nr.	Block nr.	Pos.in block	Signs	Codes	Nr.	Block nr.	Pos.in block
R	82	1	1	1	g	103	21	2	1
i	105	2	1	2	T	84	22	2	2
s	115	3	1	3	h	104	23	2	3
k	107	4	1	4	e	101	24	2	4
a	97	5	1	5	L	76	25	2	5
n	110	6	1	6	o	111	26	2	6
d	100	7	1	7	g	103	27	2	7
D	68	8	1	8	i	105	28	2	8
e	101	9	1	9	c	99	29	2	9
c	99	10	1	10	o	111	30	2	10
i	105	11	1	11	f	102	31	2	11
s	115	12	1	12	P	80	32	2	12
i	105	13	1	13	r	114	33	2	13
o	111	14	1	14	o	111	34	2	14
n	110	15	1	15	b	98	35	2	15
M	77	16	1	16	a	97	36	2	16
a	97	17	1	17	b	98	37	2	17
k	107	18	1	18	i	105	38	2	18
i	105	19	1	19	l	108	39	2	19
n	110	20	1	20	i	105	40	2	20

2.2. Specific steps of the analysis of the text

We used a recently published paper on risk and attributed the ASCII code to the signs. In Table 1 we show only the result of coding for the first two 20-blocks. We calculate the sum of these two blocks and get $b_1 = 2026$ and $b_2 = 2015$. In Table 2 (left) we show the block sums for the first twenty 20-blocks just to give a flavour of the variation. From all block sums we then calculate the mean and standard deviation and get (from our data, which are available from an Excel file) $\overline{b} = 2143.32$ and $s_b = 33.08$. The first standardized block sum now is obtained by $\frac{b_1 - \overline{b}}{s_b} = \frac{2026 - 2143.32}{33.08} = -3.5469$. We continue with the other blocks and obtain 1,000 standardized sums. The relative frequencies of the classes (−5, −4.8], (−4.8, −4.6], …, (4.8, 5] may be denoted by f_i; we calculate a data density (like a population density) by dividing by the width of the classes (0.2) and draw a density polygon connecting the points (midpoint of class i, $f_i/0.2$) from our data on the standardized block sums (see Table 2, right side). We prefer a frequency polygon over a histogram as it gives a clearer interpretation of a *function* as we compare this density polygon to the standard normal curve. Again, we show only part of the frequency table.

Table 2. Computations in the analysis of the text

Block number	Block sum	Mean, sd	Standard-ized sum	Class $(e_{i-1}, e_i]$	Mid-point m_i	Frequency abs. n_i	Frequency rel. f_i	Density $f_i/0.2$	Density stdnormal
1	2026	2143.32	-3.5469	-5.0					
2	2015	33.08	-3.8794	-4.8	-4.9	0	0.000	0.000	0.000
3	2052		-2.7608	-4.6	-4.7	1	0.001	0.005	0.000
4	2077		-2.0050	-4.4	-4.5	1	0.001	0.005	0.000
5	2097		-1.4004	-4.2	-4.3	0	0.000	0.000	0.000
6	2100		-1.3097	-4.0	-4.1	1	0.001	0.005	0.000
7	2143		-0.0096	-3.8	-3.9	1	0.001	0.005	0.000
8	2177		1.0183	-3.6	-3.7	2	0.002	0.010	0.000
9	2167		0.7159	-3.4	-3.5	2	0.002	0.010	0.001
10	2134		-0.2817	-3.2	-3.3	1	0.001	0.005	0.002
11	2116		-0.8259	-3.0	-3.1	2	0.002	0.010	0.003
12	2155		0.3531	-2.8	-2.9	2	0.002	0.010	0.006
13	2182		1.1694	-2.6	-2.7	5	0.005	0.025	0.010
14	2206		1.8950	-2.4	-2.5	3	0.003	0.015	0.018
15	2123		-0.6143	-2.2	-2.3	6	0.006	0.030	0.028
16	2179		1.0787	-2.0	-2.1	13	0.013	0.065	0.044
17	2173		0.8973	-1.8	-1.9	15	0.015	0.075	0.066
18	2075		-2.0655	-1.6	-1.7	8	0.008	0.040	0.094
19	2203		1.8043	-1.4	-1.5	19	0.019	0.095	0.130
20	2141		-0.0701	-1.2	-1.3	20	0.020	0.100	0.171

The frequency polygon in Figure 1 comes quite close to the standard normal curve. However, compared to our great "promise" the fit could be improved, especially in the centre, left and right of zero! This is caused by our text that has distinct sequences of signs.

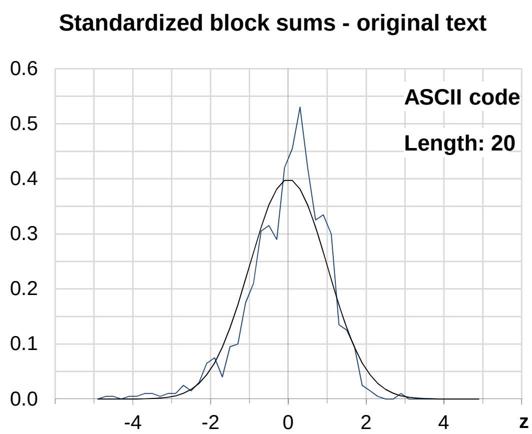


Figure 1. Frequency polygon (of data density) for the standardized block sums in the original text – based on the attribution of ASCII codes to single signs

2.3. Improve the fit of the standard normal curve by making the text more random

We will repeat the analysis with rearranging our original text by a random sequence. We can obtain this random reordering by perturbing the signs by random numbers (see below). We will show only the resulting frequency polygon; the random derangement in fact has increased the fit enormously (Figure 2).

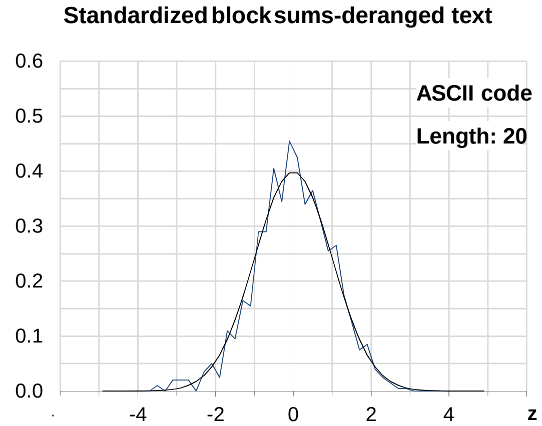


Figure 2. Frequency polygon (of data density) for the standardized block sums in the randomly re-arranged text – based on the attribution of ASCII codes to single signs

2.4. Inspection of the impact of the coding scheme

One might suspect that something has been done with the attribution of codes that "caused" the good fit to the standard normal curve. However, an inspection of the distribution of the assigned codes looks quite unusual and scattered (Figure 3). Nothing in it "resembles" a normal distribution. There are quite a few outliers in the range between 45 and 90, scattered unevenly over a long interval. It seems even more amazing that finally the normal curve fits so well.

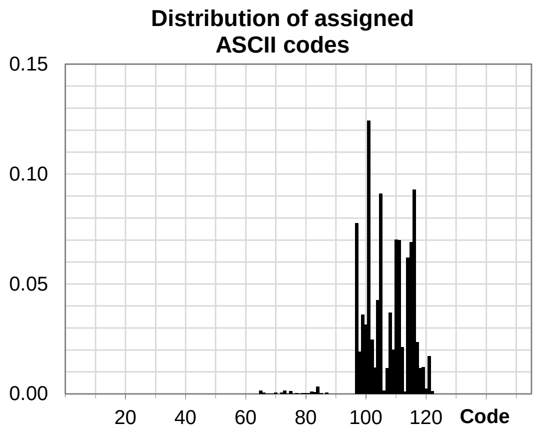


Figure 3. Distribution of the codes for the whole text of 20,000 signs for the ASCII code

We now have a look on the results of the other two persons who encoded the signs of the text differently. We suppose that one has ensuing numbers NR from 1 to 55, which is – compared to the ASCII code, a very compact encoding without gaps in between. For the other person, we assume that 20,000 random numbers have been generated and ordered so that RD_i is the i-th smallest random number. If a sign has been encoded by NR = i then the random encoding would assign $i \cdot \mathrm{RD}_i \cdot 10$ and take the integer part of this number. This method should ensure that the code is mainly established by randomness.

We investigate the frequencies of block sums (with block length 20) in the same way as earlier with the ASCII codes and finally get the following frequency polygons of the standardized block sums, which show roughly the same fit by a standard normal curve (Figure 4 left). For these two encoding systems we only show the polygon for the randomly rearranged text as we have noticed earlier that the single signs show a kind of slight dependence and the random order of the text fits much closer to the standard normal curve. In both cases there is a slight overrepresentation of the first interval left to 0 (see Figure 4; with the random code also the second interval is slightly overrepresented).

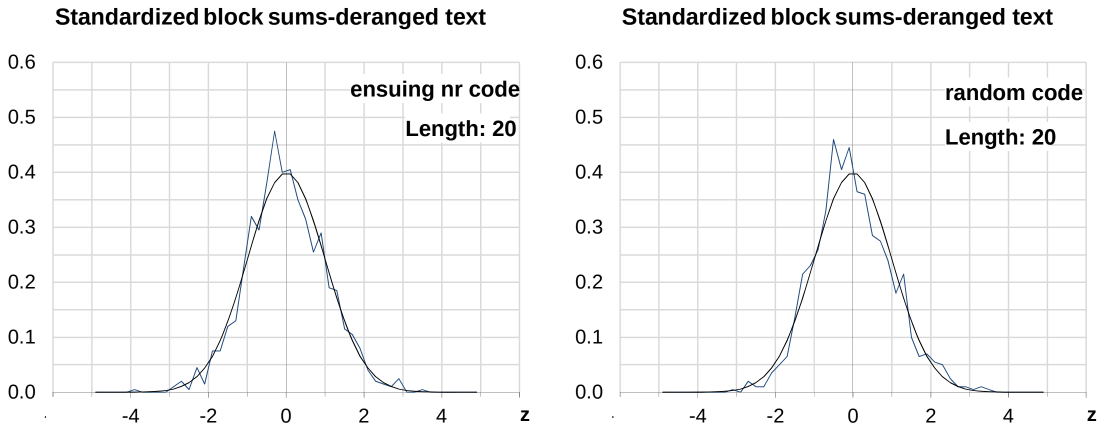


Figure 4. Frequency polygon (of data density) for standardized block sums in the randomly rearranged text. Left: based on ensuing numbers as codes; Right: based on random codes

The coding in Table 3 (only a part of it is shown) gives a flavour of the actual attribution of signs in the text to the codes. As with the ASCII code we might inspect the distribution of the single codes in the whole text. With the ensuing number code the distribution is compact but very uneven, the random assignment has a much greater variability (the first axis stretches from 0 to 500 as compared from 0 to 50 for the ensuing numbers, Figure 5).Yet the final result – the fit of the standard normal curve – is similar for both.

Table 3. Part of the coding table of the various systems used for our analysis

Sign	ASCII	Nr	Rand
A	65	1	0
a	97	2	1
B	66	3	3
b	98	4	4
C	67	5	10
c	99	6	12
D	68	7	14
d	100	8	17
E	69	9	22
e	101	10	25

Sign	ASCII	Nr	Rand
F	70	11	29
f	102	12	32
G	71	13	34
g	103	14	38
H	72	15	42
h	104	16	46
I	73	17	50
i	105	18	55
J	74	19	63
j	106	20	67

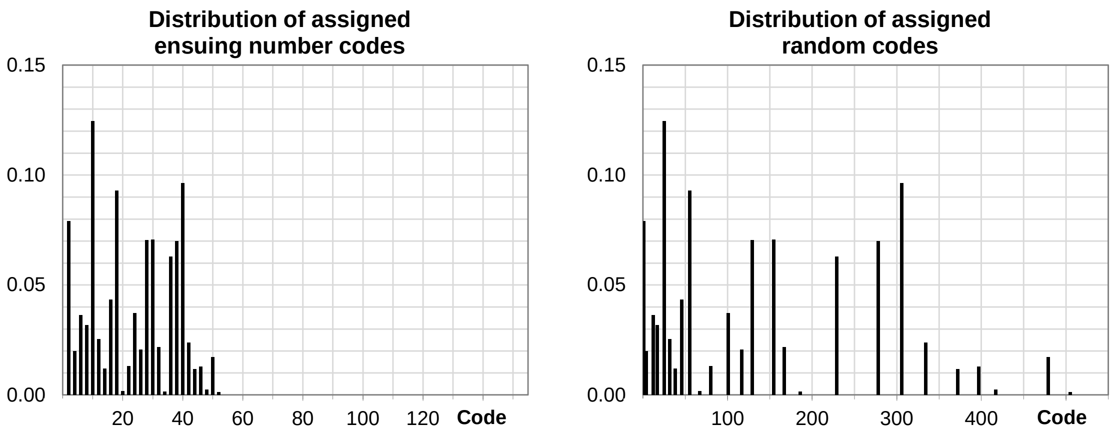


Figure 5. Distribution of the codes for the whole text with ensuing number and random code

2.5. Impact of text length

We still have to investigate the effect text length on the shape of the frequency distribution of block sums. While there is some improvement (Figure 6), the improvement expected from theory has not been totally fulfilled. That is due to specifities of text that do not only cause dependencies between ensuing signs (which should be removed by the rearrangement) but also restricts the letters in several of the longer blocks. If the text is on risk, risk, e.g., will be referred to quite often, etc. We will see that if we artificially generate text, the fit of the standard normal curve will considerably be increased by doubling the text length.

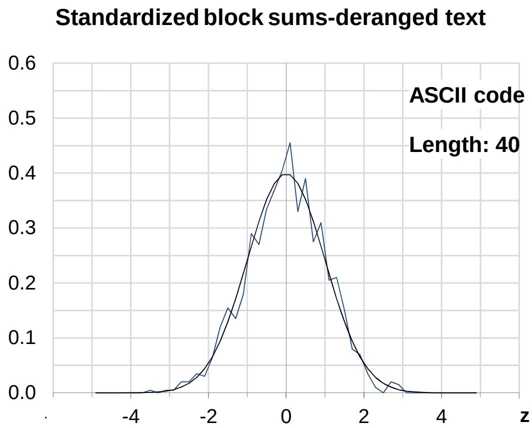


Figure 6. Frequency polygon (of data density) for the standardized block sums in the randomly re-arranged text – based on the attribution of ASCII codes to single signs – block length 40

3. Generating artificial texts with only two signs

Instead of using available texts, we will now generate our own text so that it fits more closely to the probabilistic assumptions. We will use only two signs and encode them by 0 and 1. The signs will be produced independently, which may be interpreted as if a wheel of chance with two sectors is spun several times (Figure 7). By twenty spins we generate one block of length

20. We then will repeat the procedure 1,000 times in order to imitate the text analysis from earlier sections.

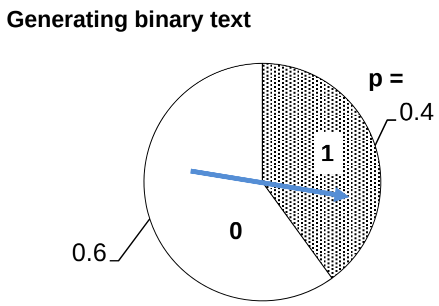


Figure 7. Generating a block of length 20 means spinning the wheel 20 times

3.1. Analysing artificial text

We generate a binary text randomly with 0's and 1's; first we will use p = 0.4 for sign 1. Then we proceed in our analysis as before. We calculate the block sum and standardize the values according to our 1,000 data that we generated all in all. The distribution of these standardized values is again displayed by a frequency polygon.

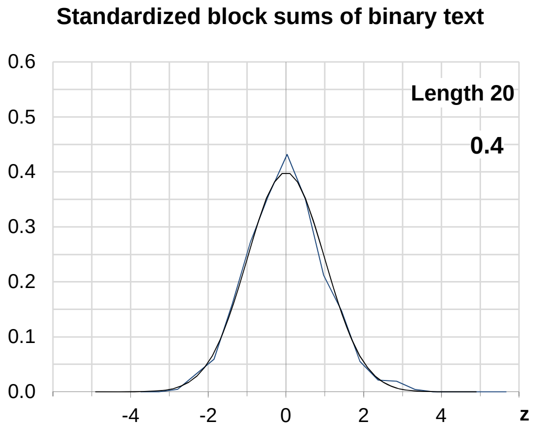


Figure 8. Binary text with 0 and 1 (p = 0.4 for sign 1) – standardized block sum – frequency polygon compared to standard normal curve

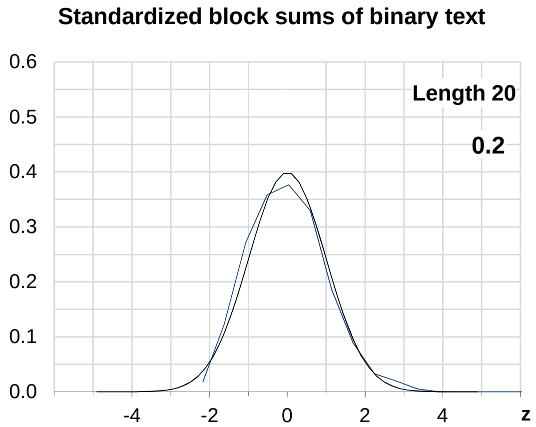


Figure 9. Binary text with 0 and 1 (p = 0.2 for sign 1) – standardized block sum – frequency polygon compared to standard normal curve

It is amazing how good the fit is (Figure 8). If we generate a text with a lower value of p (0.2) then the fit is not so well (Figure 9) but would increase again if the number of signs in the single blocks is increased. The polygon shows a systematic shift to the left as compared to the standard normal curve. We replicate the generation of text by simulation and we split the text of 40,000 signs now into blocks of length 40. To show also the "noise" of simulation, we display two frequency polygons with p = 0.4 and with p = 0.2. (Figure 10).

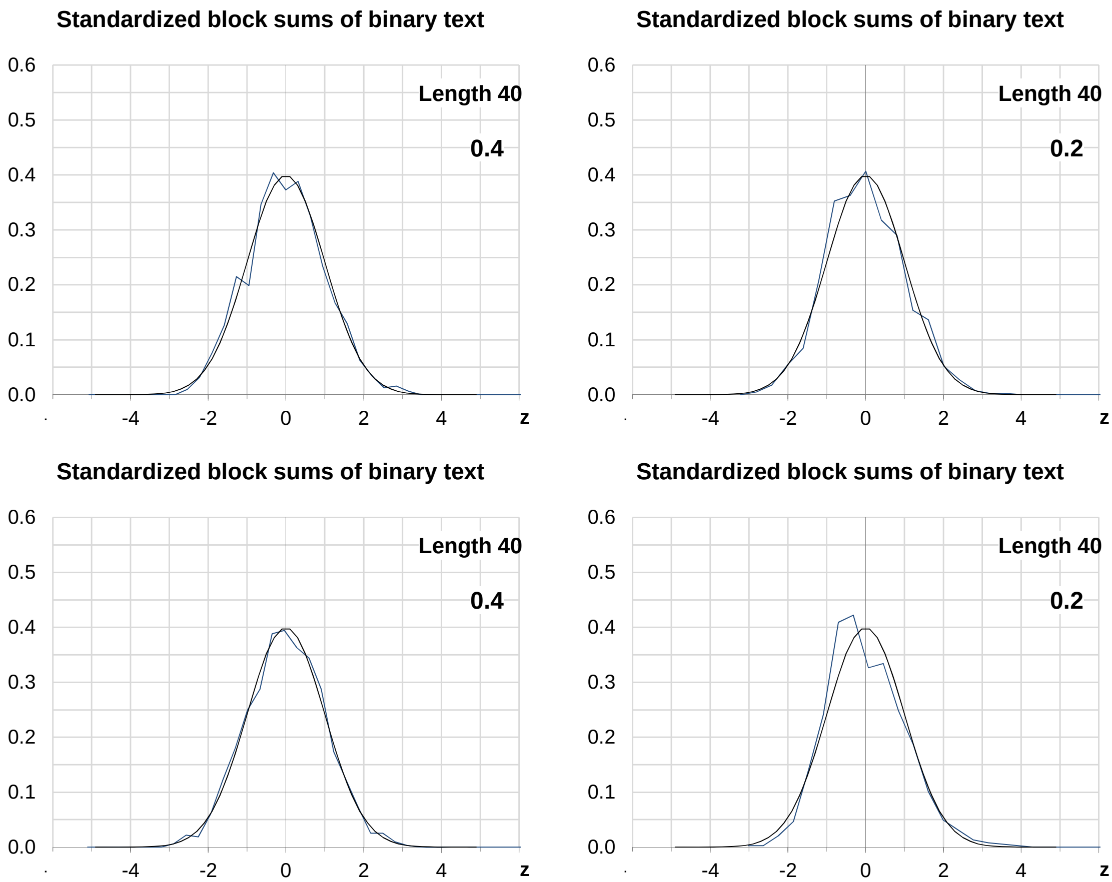


Figure 10. Two replications of binary text – distribution of standardized block sums;
Left: fairly symmetric with p =0.4, Right: skewed to the right (steeper on left side) with p = 0.2

3.2. Describing the generation of text blocks by the binomial distribution

Remark on simulation: The variation of binary data (0, 1) for a random sample of size 1,000 is roughly 0.03, i.e., a probability can be estimated with that precision but not more precisely (if we allow for a “risk” of 5%). That means, our 1,000 data should not be over interpreted as additionally there is this source of random variation. Deviations in the simulation scenario can be caused by the low precision of simulation or by bad fit of the standard normal curve. We will eliminate the effect of simulation by using the binomial distribution, which applies for our random generation of binary text. The new method will let us see the increase in fit from increasing the length of text much better and free of the “noise” of simulation.

If the text is generated by random numbers that attain the value of 1 with probability p and 0 with $1-p$ (and the random numbers behave as if they are independent) then the single signs of the first text block of length 20 are random variables $X_{1,1}, X_{1,1}, ..., X_{1,20}$ (first index for the block number and second for the number of the sign within the block) and the block sum $B_1 = X_{1,1} + X_{1,1} + ... + X_{1,20}$ follows a binomial distribution with n = 20 and p. Rather than continue with simulating the data for the other blocks we will describe the potential outcome by probabilities from this binomial distribution. The probabilities can be interpreted as idealized frequencies. If we describe the situation in block i then we have an analogue situation: the block sum $B_i = X_{i,1} + X_{i,1} + ... + X_{i,20}$ follows the same binomial distribution. Mean and standard deviation of the block sum can be estimated from the data of all 1,000 blocks or they can be predicted from the mean μ and standard σ deviation of the binomial distribution, which are: $\mu = n \cdot p$ and $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.

The frequency polygon described the distribution of the standardized block sums; these data are generated by the standardized random variables $\frac{B - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$ (we have omitted the index for the block number). The close fit of the standard normal curve means also that we can approximate the distribution of B (a binomial distribution) by the normal distribution. More precisely, we can approximate: $B(n, p) \approx N(\mu = n \cdot p, \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)})$. What we also have found is that the fit is better for $p = 0.4$ than it is for 0.2. We will now compare various binomial distributions with the corresponding normal distribution. We will no longer standardize the values but remain in the original scale of the block sum.

3.3. Various diagrams to display a discrete distribution

Several graphs for a discrete distribution are compared to each other. All have their relative merits. We will use the shadow graph as it supports an area representation, which becomes relevant if a discrete distribution is compared to a continuous distribution.

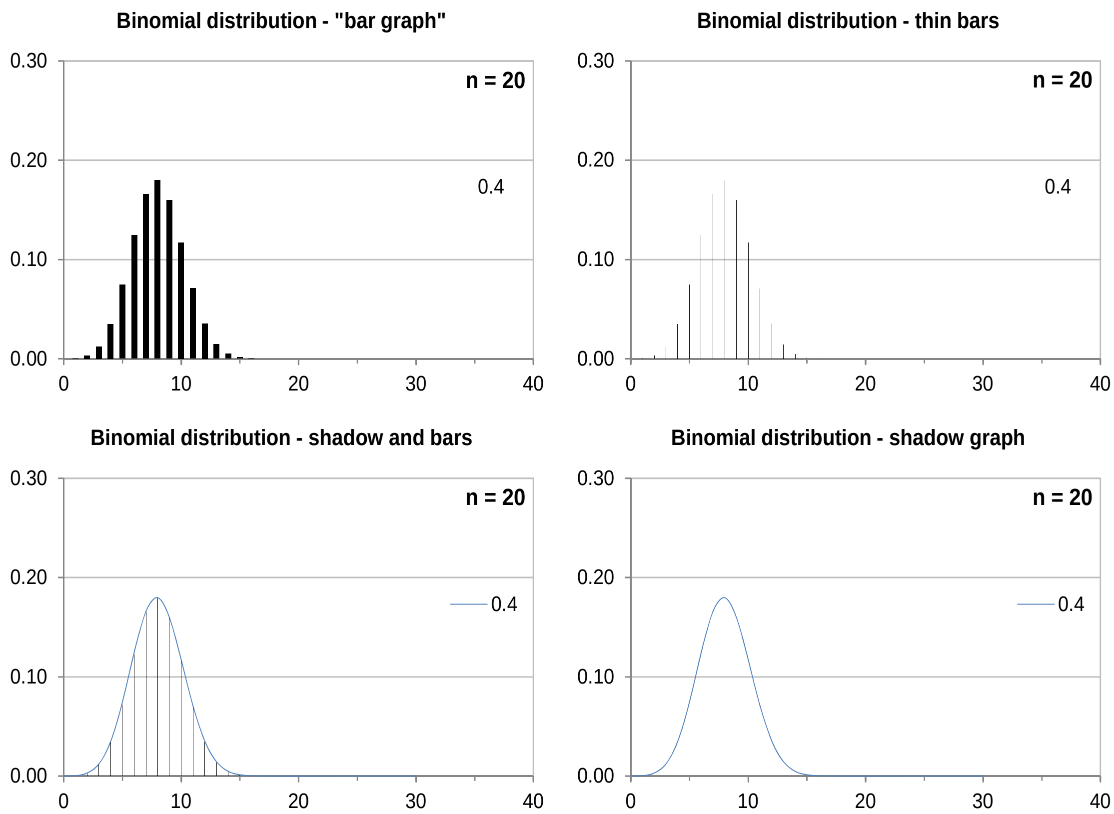


Figure 11. Bars, thin bars, and shadow graph to represent a binomial distribution

First we will introduce a shadow graph (a probability polygon) for the binomial distribution. Usually (as in Figure 11), the binomial distribution is illustrated by a thick bar graph though only the single points 0, 1, …, *n* have probabilities distinct from zero. Thus, a thin bar should represent the probability. However, in comparing the discrete binomial to the continuous normal distribution, the area becomes the key to convey the probabilities. Thus, we replace the thin bars by a shadow line connecting the top of the bars. Usually we remove the thin bars from the graph. It is these shadow graphs we compare to the normal curves (not the standard normal curve but those in the original scale of the sums).

3.4. Analysis of artificial binary text by inspecting binomial distributions

In the following, we will not generate more text and analyse it. Instead we will use our knowledge about the binomial distribution that describes the probability distribution of the block sum. Rather than basing our analysis on the distribution of standardized block sums, we will work with the original values of our block sums and present their distributions by the shadow diagram and additionally vary the probability p for the sign 1. In a first step we will see the shape of the distribution (left column of Figure 12), which is fairly symmetric for middle values of p. In a second step we will draw the normal distribution for comparison (right column of Figure 12). The shadow graphs look nearly like normal curves though there is a definite skewness for $p = 0.1$ and 0.9. If we draw the corresponding normal curve for comparison, we can see the good fit. The comparison to the normal curve makes the skewness even more apparent. We repeat the comparison with block length of $n = 40$. According to the usual recommendations, the normal approximation is not yet allowed as the rule of thumbs requires that $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$, which is only fulfilled in our best case in the middle line of Figure 13. However, for $n = 100$ all cases fulfil the 'rule' and the graphs show a good fit (Figure 14).

Here, the improvement of the normal fit by the increase from a block length of 20 to 40 just gives a qualitative impression that the fit should improve in the sense of a mathematical limit theorem, the Central Limit Theorem. If the block length n is increased to infinity, the normal curve should be the limiting function. It seems clear that such a theorem – for mathematical reasons – has to refer to *standardized* block sums instead of block sums. For the binary text generation, the block sums tend to have a mean of $n \cdot p$ and a standard deviation of $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$, which both increase beyond any constraint so that the block sum has no distribution at all in the limit. It is continuously shifted to the right and gets flatter till no distribution remains. That is the reason for the initially awkward standardization that has been introduced in analysing the text. A final sequence of graphs for $n = 100$ should convince the reader that such a limit theorem should hold (Figure 14). We cannot see a difference between the binomial shadow and the approximating normal curve even in the worst case of $p = 0.1$.

3.5. Heads minus Tails – analysis of a game instead of texts

We play coin tossing games and investigate the balance of number of Heads minus number of Tails. We produce our "text" now by an experiment that has only two signs, 1 (Heads) and −1 (Tails). We introduce again blocks, i.e., we combine 20 signs to form one block, and calculate the block sum, which is the balance of a player who bets on Heads against a casino if the player wins 1 Euro or loses 1 Euro depending on the result of the toss. The block sum represents the balance after the games of a block have been played. We are interested in the distribution of the player's balance for playing one block. To find this distribution we can simulate the game or we can use the binomial distribution with n as the block length and $p = 0.5$ for an ideal coin.

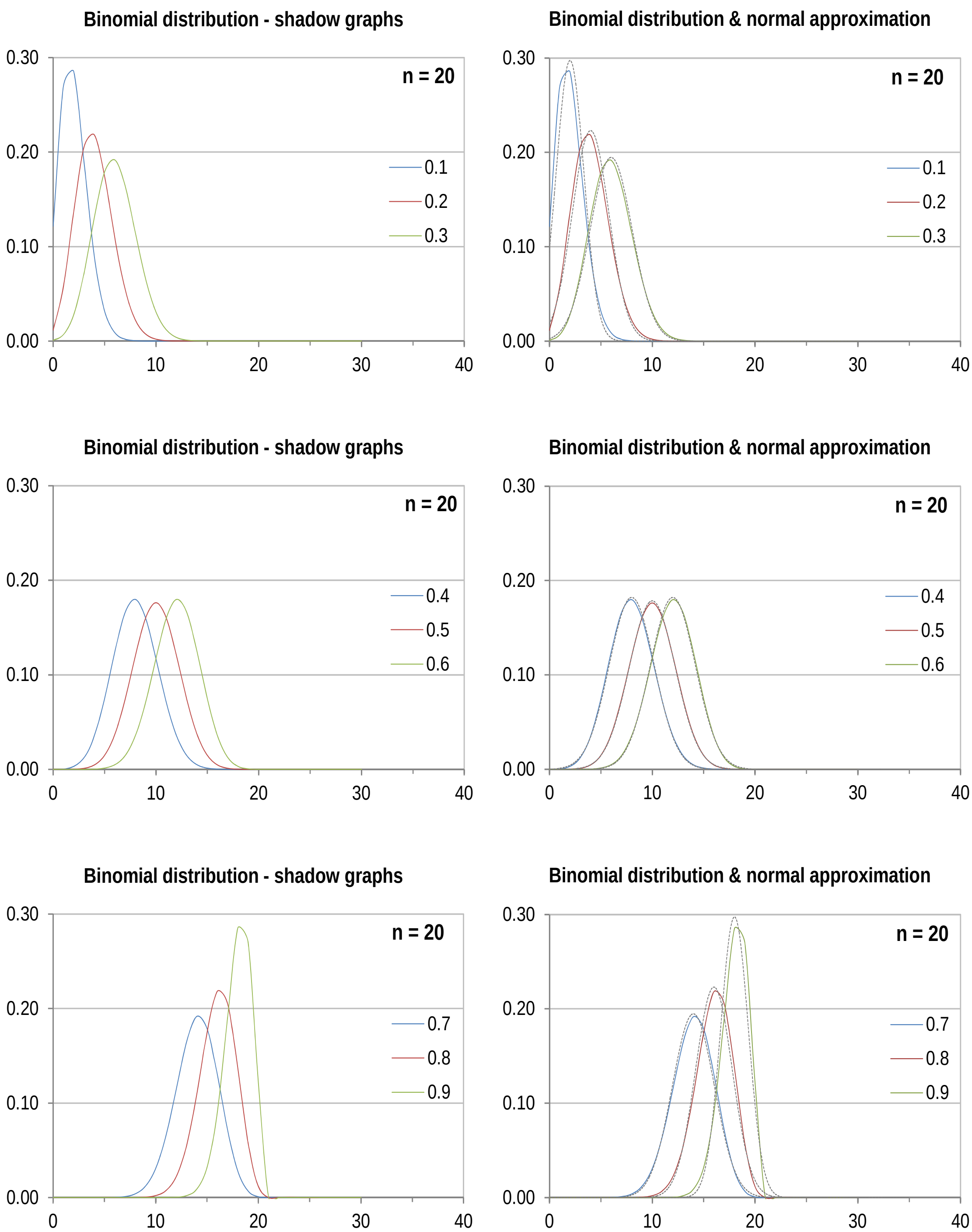


Figure 12. Inspection of the shape of binomial distributions with n = 20 and comparison to the normal distribution (dashed curves) in the right column of the figure

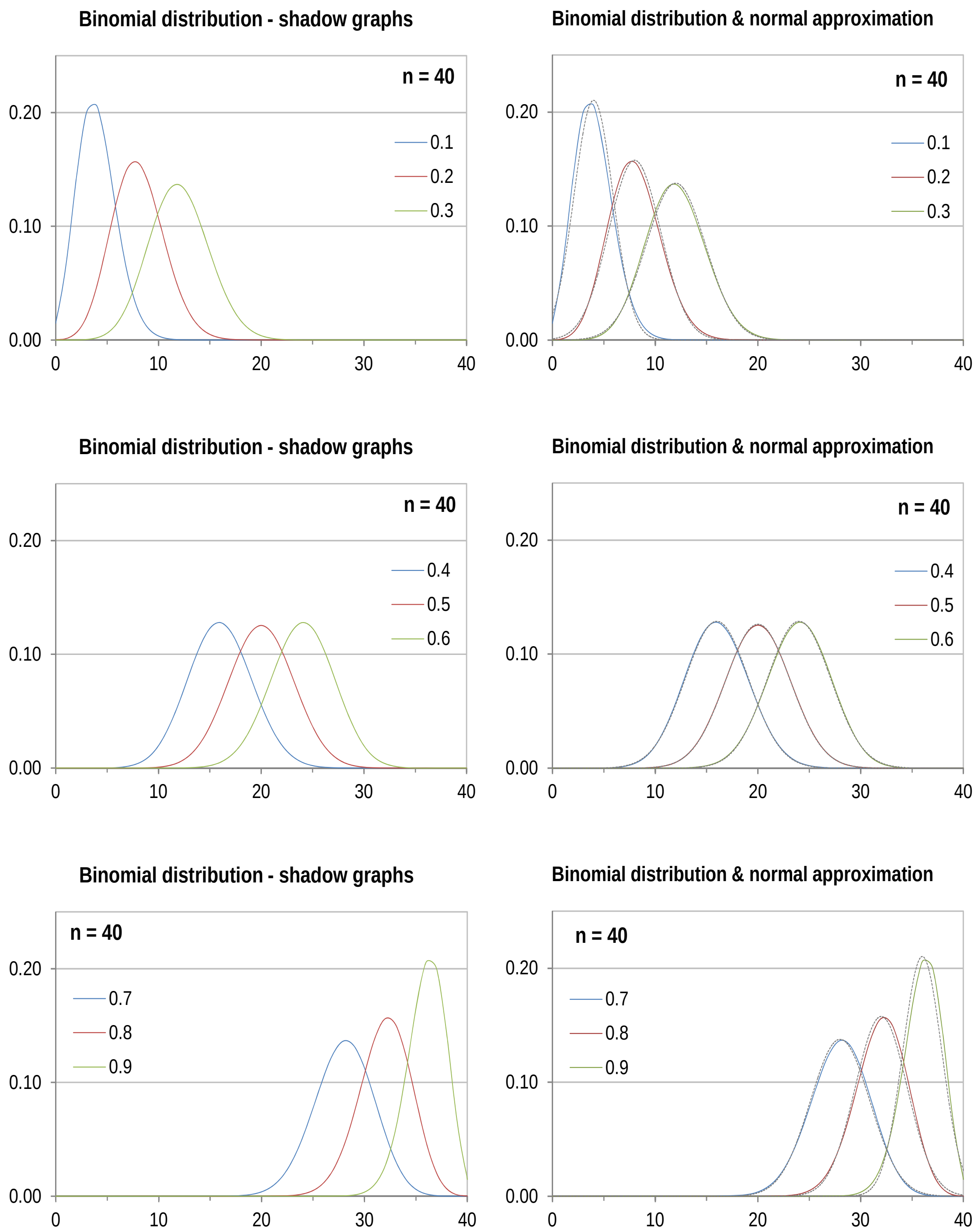


Figure 13. Inspection of the shape of binomial distributions with $n = 40$ and comparison to the normal distribution (dashed curves) in the right column of the figure

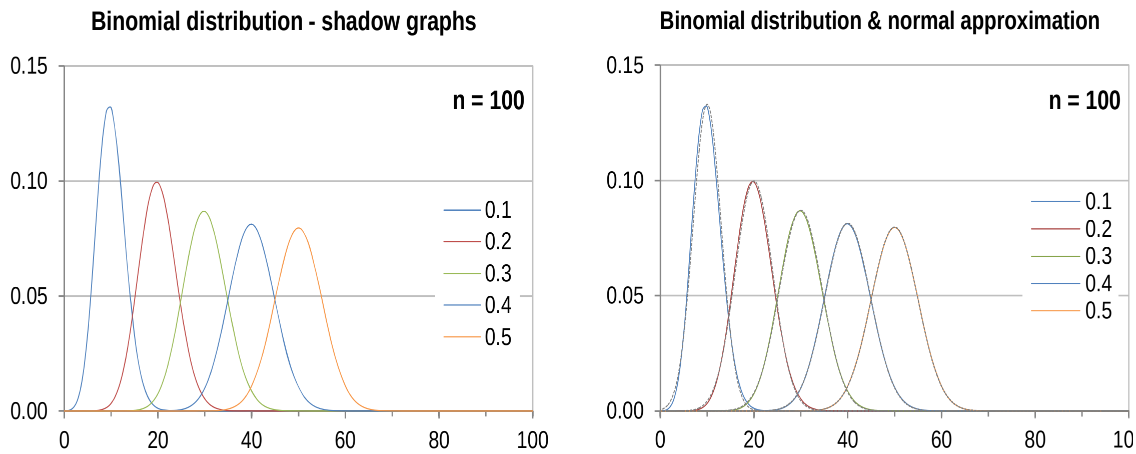


Figure 14. Inspection of the fit for block length 100 for values of *p* from 0.1 to 0.5

The number of values increase from 41 (for n = 20 trials) to 81 and finally to 201 (for n = 100). The spread increases: visible bars (probability greater than roughly 0.05) from −12 to 12 (for n = 20 trials) to −18 to 18 and finally to −24 to 24. The single result of an experiment is the sum of n tosses (1 for head and −1 for tails) so that we expect that the standardized values of Heads minus Tails will approximately follow a normal distribution. The systematic error of a continuous distribution that should replace the discrete bars gets smaller and smaller as with the standardization the gaps get smaller.

The whole range of the random variable Heads minus Tails *is rescaled* to roughly −5 to 5 (or even to −4 to 4). For n increasing, the Central Limit Theorem states that finally (a thought experiment, which can never be reached in real world as we cannot perform an experiment an infinite amount of times) the distribution of *the standardized* variable Heads minus Tails reaches the standard normal curve. This limiting statement (a mathematical theorem) gives a justification to approximate the distribution of Heads minus Tails (on the original scale) by a normal distribution. The original scale is regained from standardized values simply by a linear transformation, i.e., a scaling and a shift, which both preserve the shape of a normal distribution (only mean and standard deviation change from 0 and 1 to shift parameter and scaling factor).

In Figure 15, we see that the distribution of Heads minus Tails remains centred around zero. However, its spread is increasing without limit. There is no limiting distribution for Heads minus Tails. The limiting distribution occurs only for the standardized variable Heads minus Tails, i.e., we have to subtract 0 and divide by its standard deviation.

This is how the Central Limit Theorem helps us to approximate FINITE SUMS of the inspected random variables (the sum of the single tosses encoded with 1 and −1 here). As the AVERAGE (mean value) of the data, i.e., the SUM divided by the number of trials is also a rescaling, we get a justification to approximate the distribution of the average of random variables by a normal distribution. For practical reasons we are neither interested in standardized sums, nor in sums but we focus on the average (mean value) of random variables as this will help us to estimate the mean of the population from which the single variables pick out one element randomly. This population is often thought to be finite but in mathematics we can also think of the population as a *process*: the process of tossing a coin, e.g., which is a random variable. And in our present setting, this random variable attains the value of 1 if Head occurs, and −1 if Tail occurs.

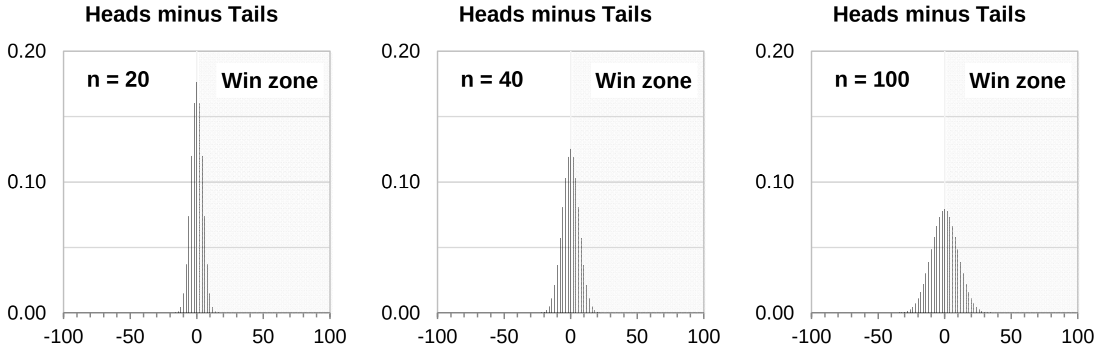


Figure 15. Balance of Heads minus Tails for a fair coin after *n* trials

An interesting consequence is seen from variants of the coin tossing game. If a biased coin is used ($p = 0.4$) then the player can have a positive balance after 20 or even 40 trials but we see that chances are getting much smaller with 100 trials (Figure 16). The risk (the probability) for high losses has increased substantially after 100 trials. These properties get more distinct if the number of trials is increased. In the long run, the casino will surely win. Of course, the casinos will usually offer a less biased game when the player can win for a longer time but finally will also lose all money. The chances for simple bets on the roulette table are 0.4865 (18/37), for example. That also keeps players to continue their games as they think they have their own systems to beat the casino (see Figure 17).

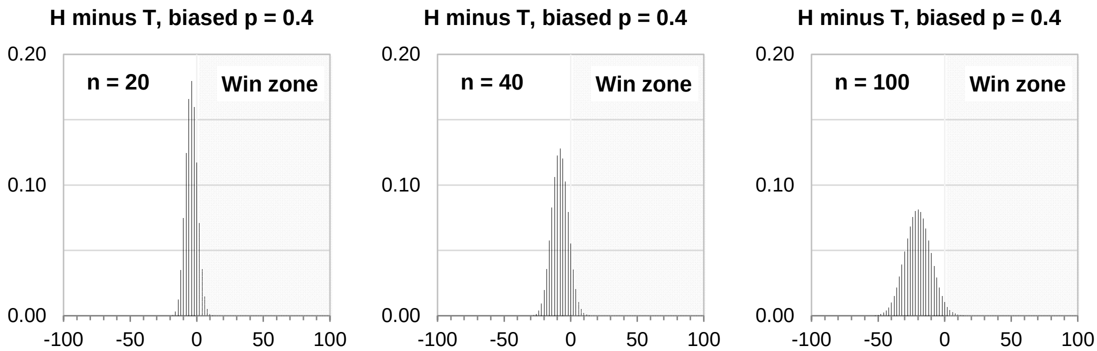


Figure 16. Balance of payments for a biased coin ($p = 0.4$)

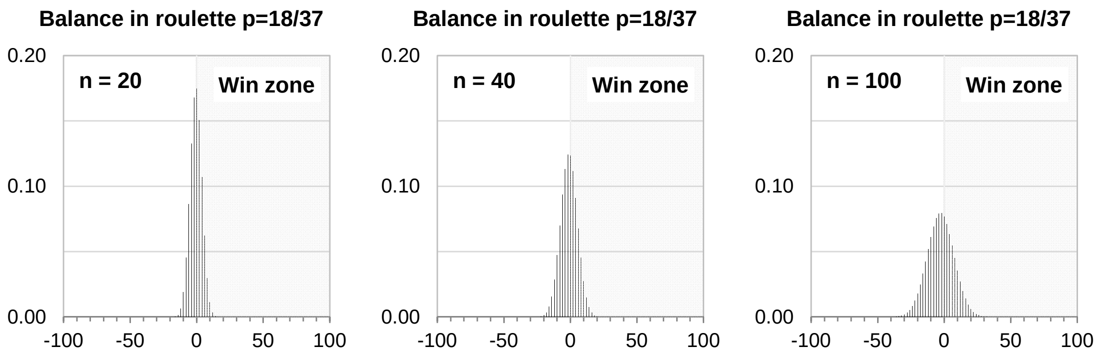


Figure 17. Balance of payments for roulette betting on pair / impair or rouge / noir

We did introduce the game of Heads minus Tails not only to illustrate the bad perspectives of players in the casino. We introduced it also as a special case where the Central Limit Theorem may be proved by relatively easy mathematical tools that are within the reach of brighter secondary students. It may be important to give at least a mathematical argument why such a theorem should hold. The simulation studies yield only restricted empirical evidence for such a theorem and can clarify circumstances under which such a law can hold. However, the simulation per se cannot replace a proof and it leads also to confusion as – obviously – we cannot continue experiments infinitely many times in real world. The way to prove the special case of the Central Limit Theorem follows closely the path of de Moivre when he first introduced the expression of the normal density in approximating the binomial probabilities for the Heads minus Tails distribution. He investigated the absolute values of this random variable applying Stirling's formula for *n* factorials to approximate the harmonic series involved in the proof.

4. Describing the original task more formally

For the original task of the text with the full set of signs and the block sums we can reformulate the situation and the calculations now analogously to our considerations with the binomial distribution. In each block, the sum is thought to be generated by more general random variables than the wheel of fortune with only two sectors 0 and 1. We can think of a wheel with sectors that correspond to each sign used in the text with an area that corresponds to the frequency of the sign used in the text (Figure 18).

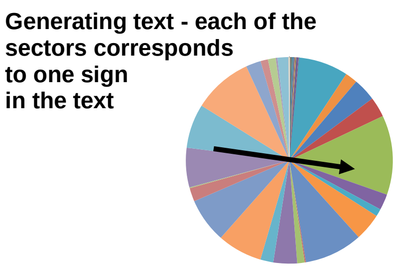


Figure 18. Generating a block of length 20 by spinning the wheel 20 times

4.1. Block sums as random variables and their distribution

The block sum is represented by adding the result of 20 times spinning the wheel, which leads to the random variable $B_{i,20} = X_{i,1} + X_{i,2} + ... + X_{i,20}$ now with a general wheel as in Figure 18. Again, the close fit we have found for the standardized block sums is expressed by the mean and standard deviation of the wheel; note that we have attributed numerical values (codes) to the signs. The approximate distribution for any standardized block sum (we have found this relation for our frequency polygon on the data for block length 20) is standard normal:

$$\frac{B_{20} - \mu_{20}}{\sigma_{20}} \approx N(0,1).$$

We could likewise state that $B_{20} \approx N(\mu_{20}, \sigma_{20})$ by rescaling our standardized data back to the original scale. It remains to confirm that the mean and standard deviation for a block of length 20 are related to the mean and standard deviation of the wheel (that describes how a single sign is produced) by: $\mu_{20} = 20 \cdot \mu$ and $\sigma_{20} = \sqrt{20} \cdot \sigma$ (we can give theoretical reasons or check our data whether such a relation should hold).

4.2. Central Limit Theorem (CLT)

The Central Limit Theorem can now be formulated as: We have *n* independent random variables $X_1, X_2, ..., X_n$ that all have the same distribution as X, which has a finite expected value μ and a finite standard deviation σ. We define the sum as $B_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ with an expected value μ_n and a standard deviation σ_n. The standardized random variable $\widetilde{B}_n$ is obtained by $\widetilde{B}_n = \dfrac{B_n - \mu_n}{\sigma_n}$. Its cumulative distribution function is $F_n(z) = P(\widetilde{B}_n \leq z)$; the cumulative distribution function of the standard normal distribution (with expected value 0 and standard deviation 1) is denoted by Φ. Under these conditions, the following limit theorem holds:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(z) = \Phi(z) .$$

We will read this back in terms of our text "analysis". *X* is the generic term for the generation of a sign in the text and may be thought of as a special wheel of fortune. X_2, e.g., is the second spin and describes how the second sign is generated and a numerical value (like the ASCII code) is assigned to it. We generate *n* signs for one block of length *n*. The different spinnings of the wheel are intuitively thought as independent trials, which correspond to the mathematical independence of the random variables $X_1, X_2, ..., X_n$. We have noted that in natural texts, this independence is violated and we have tried to introduce independence between signs within a block by a random rearrangement. The random variable B_n describes how the block sum is made up of the values that correspond to the single signs. From the data b_n of many (1,000) blocks, we estimated the mean and the standard deviation of the block sum: $\mu_n \approx \bar{x}_{b_n}$ and $\sigma_n \approx s_{b_n}$. Thereupon we built the standardized block sums $\widetilde{b}_n = \dfrac{b_n - \bar{x}_{b_n}}{s_{b_n}}$, which are data for the standardized random block sum $\widetilde{B}_n = \dfrac{B_n - \mu_n}{\sigma_n}$. We inspected the distribution of the standardized block sums and found a good fit of the standard normal curve. If the block length *n* is increased beyond limits (which is only a thought experiment), then the investigated distribution approaches the standard normal curve. This is the statement of the Central Limit Theorem (CLT) in its simplest form (LeCam, 1986, describes the thrilling history of this theorem and its generalizations that have brought forward the need for axiomatizing probability).

We have inspected the frequency polygons for *n* =20, 40, and 100 (the latter only for the artificial text generation) and found out that they come close to the normal curve; we could also investigate histograms with the same result. Thus, our investigation establishes empirical evidence for the CLT. From the CLT we derive a justification to approximate the distribution of the standardized block sum $\widetilde{B}_n$ for *finite* n. If it converges then we should be close to the limit after *n* is large enough. The question remains, how large *n* should be and we have found sufficient precision already with values of *n* = 20. The debate of the size of *n* depends mainly on the kind of distribution we use for the wheel that describes the generation of a single sign (or better, the distribution of the values that are attributed to this sign). Block lengths of *n* = 100 were not sufficient for *p* = 0.1 for our artificial binary text generation (though the resulting distribution was only slightly skewed). For smaller values of p even longer block lengths are needed to attain a reasonable fit for the standardized block sums.

4.3. Implications of the CLT – normal approximation of sums and averages

Once we have established reasons for approximating the distribution of the standardized block sums by a standard normal curve, we can also use these reasons for approximating the block sums on the original scale by a normal distribution. We only have to adapt the parameters from 0 and 1 to the shift parameter and the scaling factor that have been used to standardize the block sum, i.e., the fitting normal distribution has a mean of $\mu_n = n \cdot \mu$ and $\sigma_n = \sqrt{n} \cdot \sigma$. Analogously, the mean value of a block $M_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \frac{B_n}{n}$ establishes only a further rescaling of the standardized block sums and therefore its distribution can be approximated by a normal distribution with mean μ and standard deviation $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. We will need this result for statistical inference later. The relations of mean and standard deviation for the various statistics of a block can be estimated empirically from our data. In the generation of binary texts we can also use our knowledge about the mean and standard deviation of the binomial distributions, which comply with the equations above. We could also give intuitive arguments for special cases of random variables that support the given relations (see Borovcnik, 2001 and 2011). A general proof, however, requires more mathematics. Thus, we might prefer to support the properties by analysing data from computer simulations.

Note: There is neither a Central Limit Theorem for the sums, nor for average values of blocks. Both random variables have no limiting distribution (see Figure 19). While the sums tend to get larger and flatter, till no distribution remains, the averages remain centred but their spread gets smaller till the value coincides with the centre axis (at the expected value of the wheel that generates single data), which corresponds to a generalization of the Law of Large Numbers. However, as we have a justification for the normal approximation of the standardized block sums, we can use this argument as both block sum and block average are linearly rescaled from the standardized sums. Rescaling does not affect the fact that a normal distribution applies as approximation. Yet, of course, it influences centre and spread of the fitted normal curve.

5. Samples and populations – statistical inference

We have analysed so far a factual text or a generation method to produce binary text. For that reason we have split the (generated) text into blocks and investigated the distribution of the block sum. We will look on the analysis with a statistical eye and regard the text as population and the text blocks as samples from which we want to extract information on the text.

5.1. Reinterpretation of text analysis in terms of samples and populations

We will re-interpret the text as the population to be investigated. If the text is finite we speak of finite populations, if the process to produce text (potentially infinite text) is investigated, we will speak of infinite populations. The distribution of the ASCII codes in the whole text turns to the parent distribution, from which we take our samples. Likewise, the generation method to generate binary symbols by a wheel of chance will be called the parent distribution. As we have mentioned, we can also use more complicated wheels of chance to generate text.

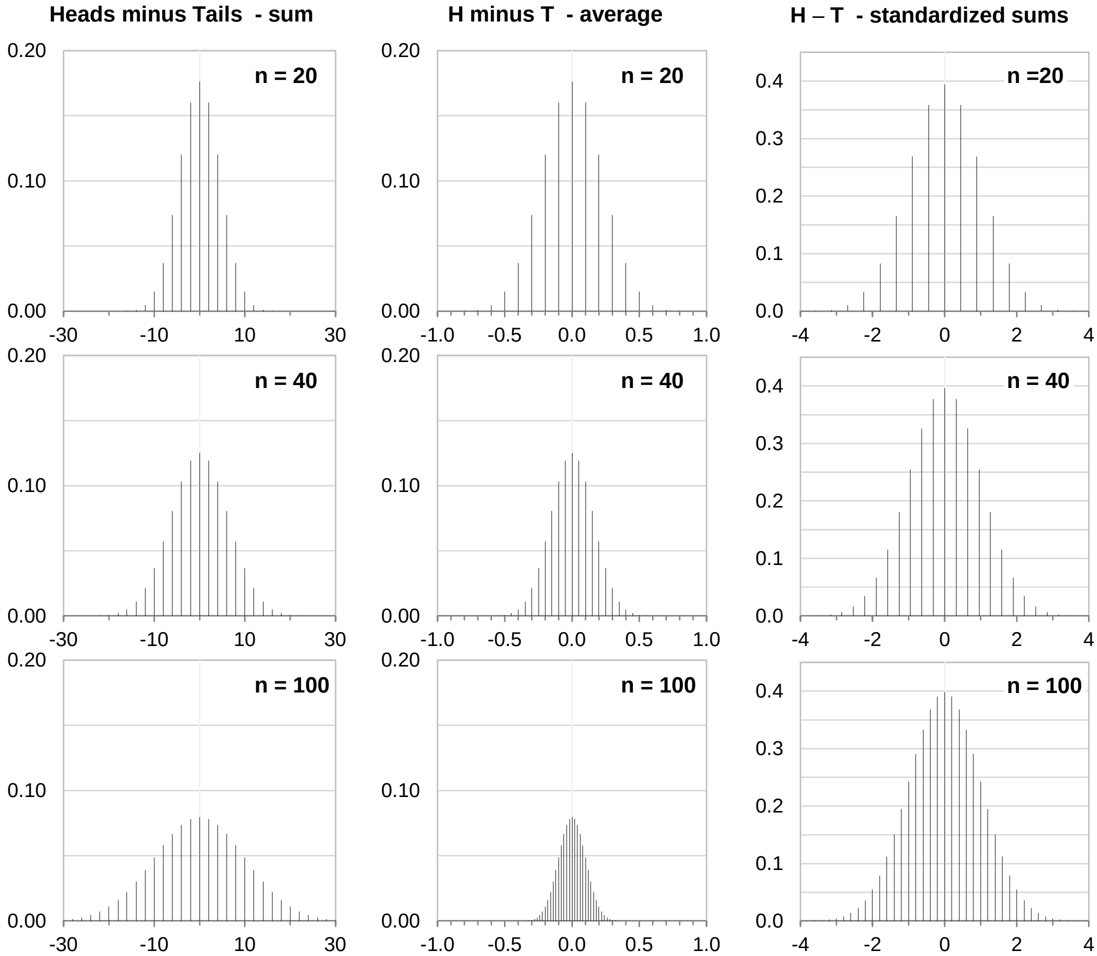


Figure 19. The sum diverges (left column) – the average converges to a single point (middle) – the standardized sum converges in distribution to the standard normal curve (right column)

The text blocks, which we have analysed, become the samples in this view. Our random rearrangement of texts improved the fit of the standard normal curve for the distribution of the standardized block sums. That highlights that we should have random samples as our text blocks. Random blocks or samples guarantee that single signs can be exchanged without changing the general feature of the text blocks. In inferential statistics we introduce methods of generalizing information on the population (the parent distribution) from the data of a sample. In our text analysis, we could be interested in the mean value of the population (all ASCII codes with their frequency, or the wheel with $p = 0.4$ in the binary text generation) from the information of the text blocks. In Figure 20, the distribution of the ASCII codes in the text (left) or the bar graph (right) yields a static view of the text, how the various values attributed to the signs are distributed. The wheel represents a dynamic view on the same population; by spinning it, text blocks (samples) can be generated, which purport the information on the population. The process of generating text becomes the population, while the generated text blocks turn to samples.

In general, we have only *one* text block, i.e., one sample of length *n*. In order to investigate the relation between the block sum divided by the length of the block (average value of the signs in the sample) and the average in the population we use the distribution of the characteristic under scrutiny; i.e., how does the block sum (the average, etc.) vary if another sample (block) is analysed? We have investigated the distribution for the block sum (the sum of values for a sample). The Central Limit Theorem states that the standardized block sum may be fitted by a standard normal curve. This gives a justification to approximate the distribution of the block sum by a rescaled normal distribution. Furthermore, it gives a justification to approximate the distribution of block (sample) averages by a normal distribution.

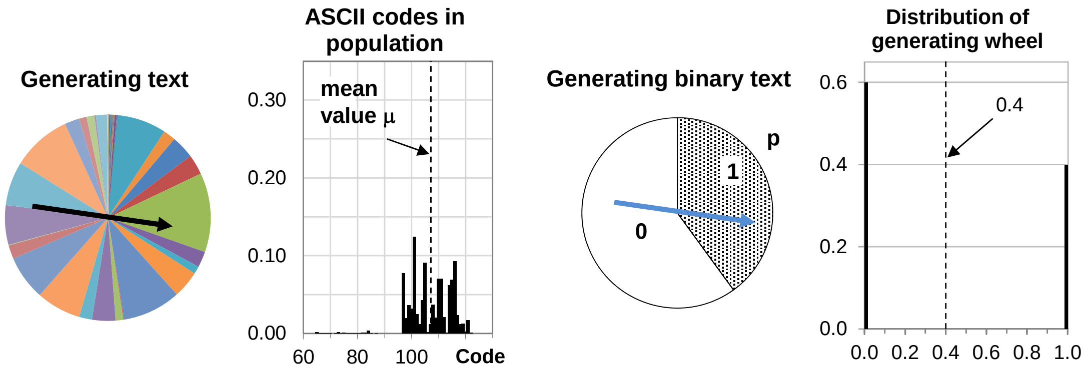


Figure 20. Representations of population and parent distribution–Generating wheel & bar graph

5.2. Estimating a mean of a population from blocks or samples

Statistical inference has to do with studying the interrelations between the generating wheel and the produced text. We show how the new view of population and samples gives a justification to conclude from the single value (one average of the data) in a sample backwards to the average of the population. The shrinking of the distribution around the value of the population mean corresponds to the Law of Large Numbers (for means). The Central Limit Theorem will provide numerical probabilities that certain specified threshold values will be violated by the average in a sample of specific size *n*. We show two series of figures (Figure 21 and 22), one for general wheels (for general "text") and one for our procedure to generate binary texts. The method to produce text becomes the method to draw a random sample in the new setting.

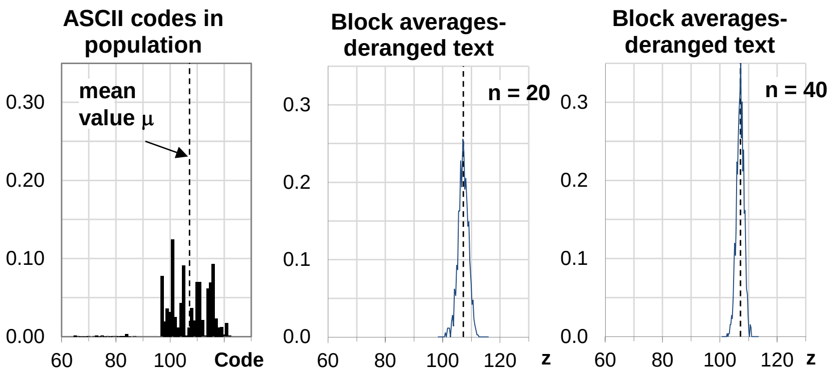


Figure 21. Distribution of ASCII codes in the population that generates text (as represented by the wheel in the previous figure and the distribution of the average value of blocks/ samples.

Figure 21 shows that the mean of the population (which is also the mean of the wheel that generates text) is reflected in the averages of text blocks: mean values of single blocks are scattered around the same "axis" signified by the mean of the population. The averages of text blocks lie closer to this axis if the block length increases. As a thought experiment – they will restrict to a single point (the axis) if the length is increased without limit.

5.3. Estimating a proportion from the "average" of blocks or samples

For binary text, the relations between the generating wheel and the text blocks 'produced' are analogue to the general wheel. From Figure 22, we can see how the distribution of block (sample) averages restricts to the axis, which is determined by the mean value of the population (wheel). Again by an idealized experiment, we can imagine how the distribution shrinks to this axis if we investigate longer text blocks (larger samples, ideally unlimited).

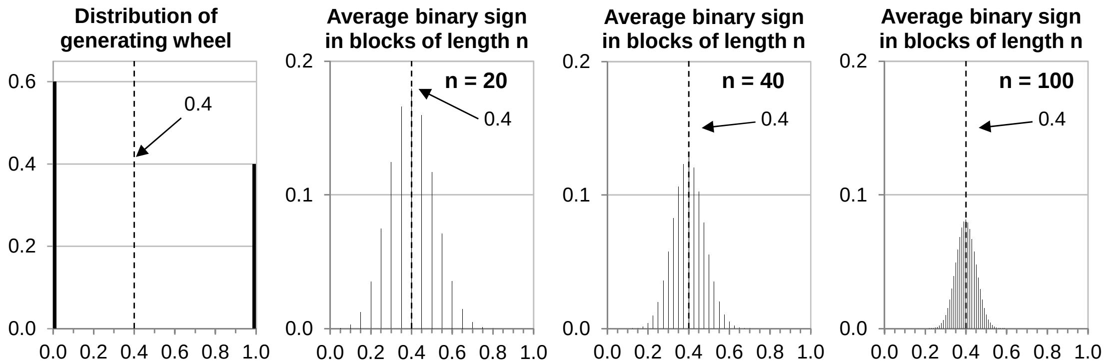


Fig. 22. Binary text of varying length – the average from samples reflects the probability for 1's

5.4. Implications of CLT and LLN for sampling

The Central Limit Theorem guarantees that deviations beyond a threshold can be calculated by the normal distribution, not only for the sample sum (block sum) and sample averages (block averages). In generalizing the result of the CLT, we can approximate the distribution of any statistics that is defined by a sum of values of single elements of the sample by the normal distribution. For example, the distribution of the sample variance (the square of the standard deviation) follows a chi-square distribution. However, from the CLT we will expect that – for larger samples – this will come close to the normal distribution. The considerations and experiments in the present paper explain why the normal distribution has become so important for inferential statistics. For the Law of Large Numbers there are some nice simulations and experiments in Borovcnik (2001) or in Borovcnik and Schenk (2012).

References

Borovcnik, M. (2001). Nützliche Gesetze über den Zufall – Experimente mit Excel (Useful laws about randomness – experiments with Excel). *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, 33, 1-22.

Borovcnik, M. (2011). Key properties and central theorems in probability and statistics – corroborated by simulation and animation. *Selcuk Journal of Applied Mathematics, Special issue on Statistics*, 3-19.

Borovcnik, M., & Schenk, M. (2012). Simulationen im Stochastik-Unterricht (Simulations in teaching stochastics). *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, 44, 1-16.

LeCam, L. (1986). The central limit theorem around 1935. *Statistical Science*, 1, 78-96.

Nemetz, T., Simon, J., & Kusolitsch, N. (2002). Überzeugen statt Beweisen – der zentrale Grenzverteilungssatz im Gymnasialunterricht. *Stochastik in der Schule* 22 (3), 4-7.

Estadística: Aprendizaje a largo Plazo. Algunas Reflexiones

Behar Gutiérrez, Roberto[1] *y Grima Cintas, Pere*[2]

[1]roberto.behar@correounivalle.edu.co, Escuela de Estadística, Universidad del Valle
[2]pere.grima@upc.edu, Universidad Politécnica de Cataluña

Resumen

Las reflexiones sobre el aprendizaje a largo plazo de conceptos estadísticos, se aborda en el contexto de la Educación Superior, en los llamados cursos de "servicio", que corresponden a la formación de profesionales no estadísticos. En este marco se hacen reflexiones sobre los potenciales objetivos, contenidos y metodologías usados, provocando y confrontando al lector, sobre la pertinencia de sus objetivos, de sus contenidos y sus énfasis, y sobre sus estrategias pedagógicas, en el horizonte del largo plazo. Se pone en evidencia que estamos muy lejos del consenso en estas tres componentes del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística y que las expectativas de lo que se pretende lograr en la formación es muy disímil. Los ejes de las reflexiones se relacionan con lo que sería razonable que permaneciera en el sistema explicativo del nuestros estudiantes en el largo plazo y el contraste sobre si hoy dedicamos tiempo suficiente para construir para el largo plazo. El reconocimiento de que ningún estudiante viene vacío en lo que respecta a su actitud frente a la incertidumbre y que el conocimiento de esas preconcepciones es importante, pues el modelo de aprendizaje supone que lo nuevo (esquema formal de decisiones frente a la variabilidad y al azar) debe competir con el sistema explicativo y de decisiones que el estudiante ha construido durante su vida. La meta en esta confrontación es lograr de su parte, la convicción acerca de que lo que se ofrece le conviene, complementa y mejora lo que él ya trae. En este proceso de confrontación, las analogías juegan un papel muy importante. Se pone en duda el ideal del conocimiento perfecto, en el sentido de sentir la necesidad de desarrollar todos los detalles de manera rigurosa, usando el método deductivo de la matemática, pues se corre el riesgo que el curso de estadística, que posiblemente es la única oportunidad de encuentro formal de un estudiante con esta disciplina en toda su carrera, se convierta en otro curso más de matemática. En esta dirección se plantea que el método de conocimiento del estudiante en su vida cotidiana, no esta basado en la lógica formal, pues no ha tenido oportunidad de ponerla en práctica en un ambiente distinto al escolar. Se plantea como una alternativa al ideal de conocimiento perfecto, mejorar el sistema explicativo que el estudiante ya tiene, vinculando conceptos y relaciones para hacer frente a la variabilidad y a la incertidumbre, de una manera más eficiente, aunque sea imperfecta. Para ello, se propone apartarse del esquema del desarrollo matemático del curso, revaluar el desarrollo lineal por temas y en su lugar introducir un enfoque holístico y en espiral, de tal manera que la misma problemática se vaya resolviendo cada vez con mayor complejidad, así los temas ortodoxos aparecerán en el camino de manera natural. Se hace énfasis en la necesidad de incluir a lo largo del curso el proceso de generación de los datos, íntimamente relacionado con el diseño del estudio y que uno hilo conductor sea la búsqueda del conocimiento en ambiente de variabilidad e incertidumbre.

Palabras clave: Aprendizaje a largo plazo, sistema cognitivo, lógica formal, desarrollo holístico y en espiral.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 37-52). Granada, 2015.

1. Introducción

El contexto en el cual se hacen las reflexiones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, corresponde a la Educación Superior, específicamente en los cursos de estadística llamados de "servicio", que generalmente es uno o dos cursos, que se incluyen en los programas académicos de formación de profesionales no estadísticos (ingeniería, geografía, ciencias sociales, salud, psicología, administración, etc.). Normalmente tienen una intensidad de 3 o 4 horas por semana, durante 18 semanas. Algunas de estas reflexiones podrían ser válidas para los cursos de estadística de la educación básica o media.

Generalmente los programas de los cursos de estadística, son elaborados por las unidades académicas que ofrecen los cursos, con base en unos objetivos definidos por los programas académicos (las carreras). Unas primeras preguntas que surgen son: ¿Los Objetivos que se formulan son coherentes con el interés en la búsqueda de conocimiento en ambiente de variabilidad e incertidumbre en el contexto del programa particular? ¿Están orientados a desarrollar habilidades para aplicar técnicas y métodos estadísticos? ¿Están pensados para el largo plazo? Dado el programa de un curso de estadística, ¿Todos los docentes lo desarrollarían de la misma manera? ¿Depende de la profesión del profesor? (Matemático, estadístico, ingeniero, etc.). Para un curso en particular, que ya tiene elaborado su programa, ¿El énfasis en los contenidos propuestos, podría variar dependiendo del profesor y el contexto?

No es muy arriesgado afirmar que dos profesores que reciben el mismo programa de un mismo curso de estadística, para ofrecerlo a dos grupos, podrían hacer cursos esencial y estructuralmente diferentes. Por ejemplo, si uno de los profesores es matemático, posiblemente ponga más énfasis en el capítulo de probabilidad y particularmente en la combinatoria, dedique menos tiempo a la parte de análisis exploratorio de datos (estadística descriptiva) y en sus clase predomine el enfoque deductivo de la matemática, en lugar que el enfoque inductivo de la estadística, todo esto comparado con un profesor ingeniero o estadístico. No obstante que el interés principal, al incluir el (los) curso(s) de estadística en el currículo de la carrera, está relacionado con la validez de los procesos de búsqueda de conocimiento en investigaciones empíricas, si el profesor no tiene experiencia en dichos procesos de investigación, tampoco podrá enseñarlos y muy seguramente su curso tiende a convertirse en otro cursos de matemática.

Esta situación es muy probable que ocurra, sobretodo si el profesor sigue textualmente el desarrollo de su libro guía, que con alta probabilidad, estará enfocado a la aplicación de reglas, a calcular cosas, casi siempre basado en datos que no son obtenidos con la participación de los estudiantes. ¿Los objetivos planteados y los libros guía están pensados para el aprendizaje a largo plazo?

Existe abundante literatura, que apoya la hipótesis de que los cursos de estadística, en buena medida, se ocupan de aplicación de reglas, en problemas demasiado simples y artificiales, con cargas exageradas de matemática, y que no aportan nuevos elementos al sistema explicativo del estudiante al momento de enfrentarse en su vida profesional a un problema real.

En estos casos, el curso no solo aporta poco, sino que genera ansiedad y termina desarrollando una actitud negativa del estudiante hacia la estadística.

Garfield (1991) afirma: "Una revisión de la literatura profesional de los pasados treinta años, revela una consistente insatisfacción con la manera como los cursos introductorios son enseñados", en otra parte dice: "... Es bien conocido el hecho que muchos estudiantes tienen actitud negativa y ansiedad al tomar el curso de estadística...", y luego: "Los estudiantes que han tomado un curso introductorio de estadística lo han calificado de aburridor y monótono....los instructores también han expresado que al finalizar el curso muchos estudiantes no están en capacidad de resolver problemas de estadística". Dallal (1990): "El campo de la estadística está repleto de estudiantes frustrados con sus cursos de estadística". Barlow (1990): "Muchos estudiantes de ciencias, adquieren una clara actitud negativa hacia la asignatura de estadística. Cuando yo era estudiante también la experimenté." Hogg (1991): "Los estudiantes frecuentemente ven la estadística como el peor curso de su carrera. Muchos de nosotros, somos pésimos profesores y nuestros esfuerzos por mejorar son muy tímidos." Ruberg (1992): "Parece que muchos estudiantes tienen un profundo temor a la estadística. Ellos dicen: "Estadística fue mi peor asignatura" . Quiero que ellos tengan un entendimiento mas profundo de los métodos estadísticos, en lugar de la confusión general sobre cual fórmula es la más apropiada para un conjunto particular de datos". Garfield and Ahlgren (1988), dicen que: "Los estudiantes parecen tener dificultades en desarrollar las ideas intuitivas correctas sobre las ideas fundamentales de probabilidad" y ofrecían las siguientes razones: "..Esta clase de comentarios, no es comúnmente escuchados sobre otras asignaturas y otros grupos de estudiantes. La naturaleza de las críticas y su volumen con respecto a las de estadística son inusuales. Uno de nosotros ha sido profesor de demografía y de economía durante tres décadas sin escuchar ese tipo de comentarios". Simon (1990), dice: "Creo que la estadística, tiene muy especiales y grandes dificultades y que el centro del problema es que no hay manera de inducir al estudiante a disfrutar del cuerpo convencional de la inferencia estadística, porque no hay forma de hacer que las ideas queden intuitivamente claras y perfectamente entendidas. Más importante que si ellos disfrutan el material, es si ellos adquirirán un conjunto de técnicas que ellos puedan usar de manera efectiva. El problema de la estadística está en el producto y no en el empaque o en la etiqueta. Tarde o temprano la enseñanza convencional de la estadística se encuentra con el cuerpo de la complejidad del álgebra y de las tablas."

Podrían sonar muy exageradas estas apreciaciones, sin embargo, los profesores que llevamos varias décadas en el oficio, sabemos que con diferencia en los matices, son ciertas estas afirmaciones.

Caben ahora nuevas preguntas: ¿Dónde está el problema? ¿Son los objetivos que nos proponemos? ¿Es el estudiante que no viene preparado? O ¿Somos los profesores los que no venimos preparados? ¿Es el medio que no nos proporciona las condiciones? ¿Faltan recursos?

Sin la pretensión de dar respuesta a estos interrogantes y mucho menos de decirle a mis colegas lo que deben hacer, pues el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística es particularmente complejo, plantearé en lo que sigue algunas reflexiones que podrán servir de insumo para un examen individual sobre nuestra situación particular, pues no existe una estrategia pedagógica uniformemente optima, en todas las circunstancias.

Abordaremos la temática de los objetivos de largo plazo y su relación con la forma particular de desarrollar nuestro curso y al final del artículo, se asumirá el riesgo de plantear unos objetivos. Se harán reflexiones sobre la conveniencia de intentar el conocimiento perfecto, usando la lógica deductiva de la matemática de manera rigurosa para generar los resultados, a lo largo del curso. Reflexiones sobre las estrategias metodológicas y sobre el papel y la intensidad de la formalidad de los contenidos de probabilidad, entre otros.

Reflexiones sobre el desarrollo de un curso introductorio de estadística.

Pensando en los objetivos y la manera como pretendemos lograrlos, una primera reflexión podría ser:

1.1. ¿Cuáles podrían ser los objetivos a largo plazo? ¿Se relacionan estos con la estrategia que estoy aplicando hoy?

Nos piden redactar el epitafio que queremos coloquen sobre la tumba el día de nuestra muerte y una vez hecha la redacción de la inscripción, nos confrontan a valorar si las acciones nuestras hoy nos harían merecedores de ese epitafio. Este ejercicio es prácticamente una valoración crítica de nuestro propósitos y la coherencia con lo que hacemos para lograrlos.

Planteemos ahora la situación de encontrarnos con una persona que fue nuestro estudiante en el curso introductorio de estadística hace 5 años. Si pudiéramos, ¿Qué preguntas le haríamos, de tal manera que si él las respondiera razonablemente bien, usted se sintiera satisfecho y hasta feliz? ¿Cree usted que el cuestionario sería similar al que usted le hizo hace 5 años, o al que usted hace hoy a sus estudiantes? Muy seguramente no incluiríamos preguntas que exijan acordarse de fórmulas. Esto sería demasiado optimismo.

Después de esta reflexión, podríamos responder ¿Hoy, que porcentaje del tiempo dedico en mis clases a las actividades que harían que en 5 años, los estudiantes respondiera con éxito mi "cuestionario de largo plazo"?

Petrosino (2000), ha reflexionado sobre este tema en el libro "¿Cuánto duran los aprendizajes adquiridos? El dudoso ideal del conocimiento impecable". En lo que sigue muchos de sus planteamientos serán adaptados al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística.

1.2. Un mal modelo de aprendizaje es mucho mejor que ningún modelo.

Casi todos los profesores tenemos un modelo de aprendizaje en nuestras mentes, así no sea explícito. Esto es lo que nos permite la retroalimentación con base en nuestras experiencias y por supuesto nos permite mejorar también el modelo, sino fuera así, estaríamos en un proceso sin fin de ensayo y error, como lo dice Hey (1983): "Por muchos años he sido profesor de los cursos introductorios de estadística y econometría para estudiantes de economía. Como muchos profesores y estudiantes, soy consciente, que esta puede ser una dolorosa experiencia para todos. Muchos estarán familiarizados con la búsqueda, aparentemente sin fin, de maneras de reducir el dolor, rediseñando los cursos, usando diferentes textos o escribiendo nuevos, pero los cambios, a menudo son puramente cosméticos, con el problema fundamental invariante."

Figura 1. El estudiante no viene vacío

Algunas reflexiones sobre consideraciones para la definición de nuestro modelo de aprendizaje se hacen a continuación.

El estudiante no viene vacío de conocimientos sobre como actuar frente al azar y la incertidumbre, así no haya tenido formación formal en estadística. El estudiante se ha enfrentado a la variabilidad y la incertidumbre muchas veces en su vida y tiene sus propios esquemas para tomar decisiones y aunque no todos son coherentes con la racionalidad científica, a él le han funcionado. Justamente estos conocimientos previos son la materia prima para intentar construir los nuevos conceptos que le permitirán mejorar su sistema explicativo. Ausubel (1986) lo resume muy bien en su conocida afirmación: "Si tuviera que reducir toda la Psicología educativa a un solo principio enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente".

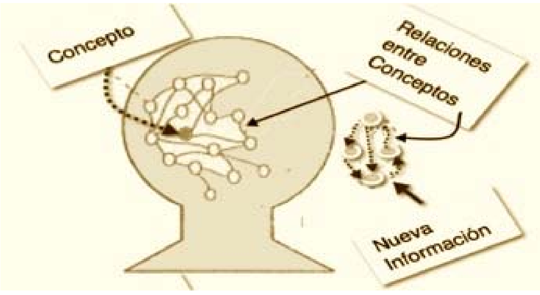


Figura 2. Integración de un nuevo conocimiento

En el modelo que plantea Ausubel, para que el nuevo conocimiento tenga posibilidades de formar parte estable del sistema, debe encontrar conceptos y relaciones en el sistema explicativo del estudiante que permita integrarse de manera coherente. Entre más vínculos armoniosos encuentre, mayor es la probabilidad que lo integre a su sistema. Si el nuevo conocimiento no encuentra vínculos con sus sistema, el lo pondrá donde guarda los números de teléfono de sus parientes, en espera de que el profesor lo pida, para devolvérselo intacto.

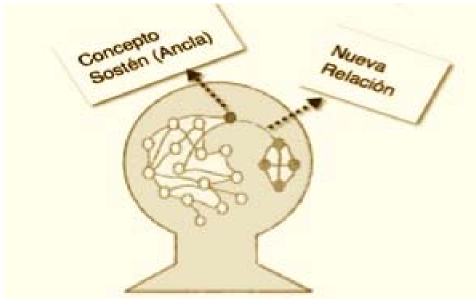


Figura 3. Conexión de conceptos y relaciones

En ese sentido las analogías juegan un rol muy importante, pues con ellas, se construyen los vínculos inexistentes, toda vez que en ellas, se asegura de partir de un objeto conocido.

Veamos algunos ejemplos de figuras que juegan el papel de analogías.

Riesgos de Ignorar la variabilidad

¿Debo saber nadar para atravesar el río?

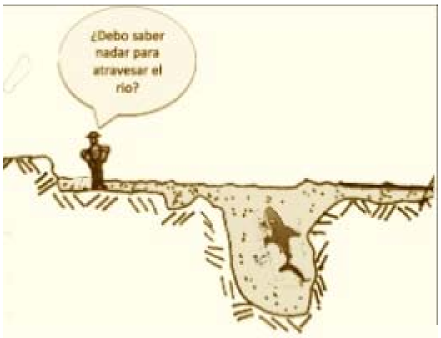


Figura 4. Riesgo de ignorar la variabilidad.

No ¡ Solo tiene una profundidad promedia de 80 cms. Ignorar la variabilidad puede resultar muy peligroso.

Otro ejemplo. Uniformes talla única para el equipo de fútbol. El entrenador que faltó mucho a sus clases de estadística, tiene la idea de hacer todos los uniformes con la talla promedia del equipo. ¿Qué ocurrirá?

Figura 5. Talla única. Ignorando la variabilidad.

Tamaño de muestra vs tamaño de la población

¿El tamaño requerido de muestra es proporcional al tamaño de la población?

Figura 6. Tamaño de muestra vs tamaño de la población.

Se escuchan algunos rumores populares sobre la representatividad de la muestra que dicen que debe ser el 10% de la población. Podríamos enseñar al estudiante la fórmula del tamaño de muestra y hacer los análisis matemáticos correspondientes, sin embargo, mostrar que la muestra que toma para catar la sal de la sopa, no depende del tamaño de la olla y más aún que no requiere probar el 10% de la sopa, es una demostración más contundente para el estudiante.

Estas analogías y 22 más, se encuentran en el artículo de Behar R; Grima P., Marco LL. (2013).

1.3. Principio de inversión.

Ausubel lo define como: "Nuestras ideas más antiguas poseen ventajas injustas sobre aquellas que llegan más tarde. Cuanto más temprano incorporemos una idea, más destrezas podemos adquirir para utilizarla. Cada idea nueva debe entonces competir, aunque esté menos preparada, contra la masa más amplia de destrezas que han acumulado las ideas más antiguas."

Este principio es una forma de expresar la llamada "resistencia al aprendizaje", pues para poder sustituir algunas de las ideas presentes en mi sistema explicativo, por otras que prometen ser mejores, debo experimentarlas primero para estar muy convencido.

Un sabio adagio popular reza: " Es mejor malo conocido que bueno por conocer". Desafortunadamente, en no pocos casos, esas oportunidades de usarlas en la práctica no se dan.

Las implicaciones de este principio de inversión, es la creación por parte del estudiante de un sistema dual de esquemas para responder interrogantes. Si el interrogante proviene del sistema escolar, el estudiante intentará complacer a su profesor, pero si la misma problemática se le presenta en el mundo real, el usará su propio sistema explicativo, en el cual confía.

Figura 7. Sistemas explicativos paralelos en convivencia

1.4. Explicar bien clarito (demostraciones impecables) no es suficiente.

Los profesores con formación matemática, tenemos la necesidad de explicarlo todo. Esto es una característica de la formación de los matemáticos. Además creemos que la mejor manera de convencer a alguien es una buena y clara demostración. “La matemática no falla”.

Sin embargo, la lógica matemática, base del llamado “Método Científico” que tantas aportes ha hecho al estado del arte en muchos campos de la ciencia, no es la lógica con la cual funciona el estudiante. Los principios de la lógica formal, no forman parte del “sentido común”, artífice de las decisiones que toma en la vida diaria. No obstante que desde el kínder, está conociendo la matemática y su lógica, el nunca se siente fuerte haciendo rigurosas demostraciones. Las pocas veces que lo intenta fracasa.

Minsky M. (1986) en su libro “La sociedad de la mente”, hace la comparación entre la lógica formal y el sentido común. En las cadenas de la lógica matemática, cada eslabón solo tiene dos posibilidades: es verdadero o falso; no existen términos medios. Esto hace frágil la cadena, pues con solo un eslabón que falle, falla toda la cadena. Esto no ocurre con el sentido común, en el cual algunas proposiciones el estudiante las considera absolutamente ciertas, pero incluye en sus construcciones proposiciones y relaciones que son muy probablemente ciertas y otras que son solo probables. Arma sus cadenas reforzando unas con otras, en forma simultanea, no secuencial.

El estudiante siente que la lógica formal le funciona bien al profesor, porque el es experto y está entrenado para ello. Aún creyendo que a la larga, si el tuviera entrenamiento, la lógica formal podría ser un mejor instrumento para sus reflexiones y toma de decisiones, todos sus problemas están en el corto plazo y nunca tiene la oportunidad de ponerla en práctica.

Petrosino J. (2000), ilustra esta situación con un ejemplo contundente. La digitación en la máquina de escribir o en el teclado del computador. Todos estamos de acuerdo que escribir con la técnica adecuada, usando todos los dedos, sin mirar el teclado, es la mejor forma de hacerlo. Sin embargo, muchos de nosotros somos “chuzógrafos”, escribimos con dos o tres dedos, mirando el teclado. ¿Por qué, si estamos de acuerdo que es mejor escribir con todos los dedos?

Sencillamente porque en el transitorio, mientras adquirimos habilidad, “chuzografiando” somos más eficientes y veloces que escribiendo con todos los dedos. Como en el día a día, andamos cortos de tiempo, todos nuestros escritos los hacemos con la estrategia que más nos favorece: los dos dedos y nos negamos la oportunidad de practicar para ser más eficientes en el largo plazo.

1.5. El curso introductorio de estadística no debe ser un curso más de matemáticas.

Aunque la matemática ha hecho posible la construcción de todos los teoremas relacionados con la Estadística, sin los cuales su aplicación sería muy limitada, la Estadística no es matemática en su aplicación, pues el paradigma de la matemática es el método deductivo, mientras que la Estadística pretende la búsqueda del conocimiento en la investigación empírica, usando el método inductivo. De la misma manera como no se puede formar un médico cirujano con solo cursos de fisiología, tampoco se puede formar en la aplicación de la metodología estadística, con solo teoremas y sin las experiencias que da la interacción con el mundo real.

El conocimiento impecable, que se pretende lograr desarrollando y demostrando los principios de la probabilidad y la estadística, por las razones expuestas, logrará poco en el largo plazo y el mensaje que se transmite sobre la utilidad de la misma en el contexto del programa académico del estudiante, se traduce en una actitud negativa del estudiante hacia la estadística, como fue expresado en la introducción, por muchos profesores de estadística.

Freedman et Al. (1991) lo expresa diciendo “..Cuando comenzamos, tratamos de enseñar la notación convencional... Pero pronto se vio claro, que el álgebra, se apoderaba del curso. Para estudiantes con limitada habilidad técnica, el manejo de la notación demandaba tanto esfuerzo, que no dejaba espacio para las ideas. Para plantear el punto con una analogía, es como si los estudiantes de pregrado requirieran tomar un curso de Historia de la China y el departamento de historia insistiera en que se tomara en idioma Chino”. Efron y Tibshirani (1993). Dicen: "El camino tradicional al conocimiento estadístico ha sido bloqueado con una pared de matemáticas”. Kempthorne (1980), escribe: "Ha habido una gran falla en la enseñanza de la estadística, originada por una falla en la enseñanza a los profesores de estadística. Parte de los males que hoy ocurren, creo, se deben a que es fácil pensar en calcular áreas y volúmenes, en lugar de enseñar cosas relacionadas con la estadística. Uno toma la ruta fácil de enseñar una especie de matemáticas. Uno puede tener la justificación parcial de que esa especie de matemáticas es una parte del área completa. Lo que debiera ocurrir es que las ideas y metas estadísticas deberían determinar las matemáticas de la estadística que deben ser enseñadas y no la revés”.

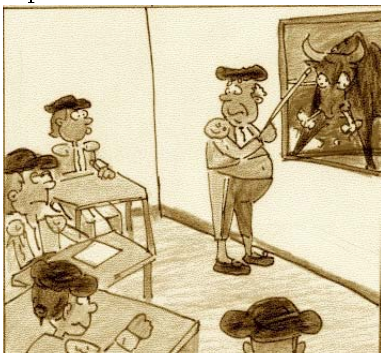


Figura 8. En el toreo y en la Estadística el hacer es clave

La Estadística, es una disciplina de hacer, de interactuar con el medio, a diferencia de la matemática. No se puede formar un torero solo con diapositivas. El toreo al igual que la Estadística requiere ejercitarse. El torero que adquiere su alternativa (se gradúa) con una formación de aula de clase, ¿Qué se espera que le ocurra en su primera incursión con un toro de verdad?

1.6. No se pretende formar un estadístico chiquito.

Cuando desarrollamos el curso, esencialmente usando el método deductivo de la matemática, o cuando pretendemos en uno dos cursos, agotar todos los métodos estadísticos, invirtiendo el tiempo más en los algoritmos para hacer cálculos y resolver problemas estilo libro, en lugar de reforzar las ideas fuerza de la estadística y el pensamiento estadístico, pareciera que tenemos la intención de formar un estadístico a pequeña escala. No es posible formar un médico, o un estadístico en 50 o 100 horas. Debemos ser conscientes que ninguno de estos profesionales, quedarán en capacidad de resolver un problema complejo de investigación empírica, en el ejercicio de sus profesiones. Tendrán que recurrir a un estadístico. Lo que se esperaría, es que este profesional tenga conciencia de la necesidad de apoyarse en un experto estadístico, desde la etapa del diseño de del estudio. Convendría que tenga el lenguaje para comunicarse con quien le apoya en su proyecto.

1.7. Primero el problema y el contexto y luego lo instrumental.

La Estadística está para resolver interrogantes sobre un problema que consiste en hallar conocimiento válido sobre un fenómeno. Esto es lo natural. Por esta razón suena artificial desarrollar el curso con base en los temas y herramientas estadísticas, para luego ilustrarlos con ejemplos simples. Primero tener claro que es lo que se quiere saber y luego la estrategia metodológica para resolverlo. Conviene apartarse del desarrollo clásico de los libros de estadística, que consiste en ir explicando indicadores, uno por uno y luego poner ejemplos para calcularlos. Esto es como si quisiéramos formar un mecánico automotriz y la primera semana le enseñamos el martillo y las herramientas de percusión, la segunda semana, los alicates, pinzas y similares, y así sucesivamente. Cuando se gradúe este mecánico, tendrá pocas oportunidades de usar sus conocimientos, pues la realidad es que los clientes no vienen buscando quien maneje las herramientas, sino quien les resuelva un problema y para ello lo primero es un buen diagnóstico, luego vendrán las herramientas.

La parcelación del conocimiento en indicadores y técnicas no conviene. En su lugar, desde el principio hasta el fin del curso abordar ciertas situaciones problema. Desarrollar el curso por partes como si fueran unidades independientes, no habilita al estudiante para enfrentar problemas reales.

1.8. Desarrollo del curso, holístico y en espiral

Como una lente que va ganando enfoque. Si intentamos ver un tigre, al principio lo veremos borroso, un poco difuso, distinguimos algunos rasgos muy generales. En esta primera etapa, le apostamos mucho a la intuición, tenemos pocos conceptos apropiados. A medida que avanzamos en el curso, subimos en la espiral y la lente mejora y ahora vemos el mismo tigre, pero le descubrimos más rasgos, hasta llegar a verlo con mucha nitidez. Obsérvese que el tigre se ha visto completo desde el principio, no lo hemos fraccionado, tenemos en todo momento una percepción integral, el problema completo. En primera instancia, responderemos las preguntas con herramientas muy artesanales, pero las mismas preguntas serán respondidas cada vez de manera más compleja.

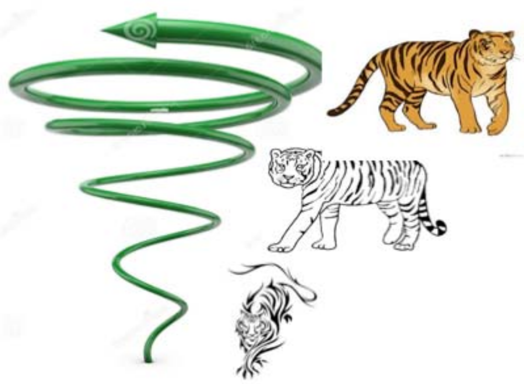


Figura 9. Desarrollo holístico y en espiral

1.9. La probabilidad sin formalidad y a lo largo del curso.

La probabilidad se desarrolla en muchas ocasiones, como si fuera un capítulo independiente, con desarrollo formal de las demostraciones de algunas propiedades, a partir de los axiomas de probabilidad. Generalmente no aparece con un vinculo fuerte con los datos o la estadística descriptiva o el análisis exploratorio de datos. Algunos colegas, le dedican mucho tiempo a los métodos de conteo, asociados con espacios muestrales equiprobables. Tomando en consideración que se trata de un curso introductorio con una duración limitada, 50 o 100 horas, la pregunta que surge es: ¿Damos prioridad al desarrollo formal de la probabilidad frente a otras opciones de inversión del limitado tiempo?. En mi experiencia, siento que puede ser más productivo un desarrollo informal de la probabilidad, asociada con la idea de “propensión”, basada en la frecuencia relativa. Cuando se discuta sobre tablas de contingencia o de doble entrada, se desarrollan los conceptos de frecuencia condicional y su homologo poblacional, la probabilidad condicional, con la ley de los grandes números como pilar de la conexión entre la muestra y la población, entre la frecuencia relativa y la probabilidad. El histograma, se define con el área representando la frecuencia relativa, es decir, el eje Y, representando la densidad empírica de frecuencia y aquí se hace la conexión intuitiva con la densidad de probabilidad, de nuevo pasando de la muestra a la población. Se desarrolla la distribución normal, como un ejemplo que ilustra la aplicación de una función de densidad poblacional, como se explica en Behar R., Grima P. (2013), en el artículo "El histograma como un instrumento para la comprensión de las funciones de densidad de probabilidad", presentado en las Primeras Jornadas Virtuales de la Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la combinatoria.

1.10. ¿Dónde entregan los datos?

No obstante que la palabra "Dato" viene del latín "Datum" (lo que se da), en la realidad es lo menos dado, sin embargo, casi todos los libros de texto, tienen los datos disponibles para todos los problemas, porque su objetivo es el análisis de los mismos. Se da el mensaje al estudiante que los datos siempre se los entregarán y en realidad esto difícilmente ocurrirá en la práctica y si ocurriere, sería muy conveniente que el estudiante tuviera una mirada crítica sobre ellos, a manera de filtro sobre su calidad, por una parte, y por otra porque está muy claro que la manera como los datos son generados y los métodos de análisis están íntimamente ligados. Sin conocer el origen de los datos, se asume un alto riesgo al realizar su análisis. En la mayoría de los libros de texto, se le da muy poca importancia a la generación de los datos. En el mejor de los casos, por ejemplo el libro de Moore (2005), dedica un capitulo entero a modelos de muestreo y diseño de experimentos, pero allí queda confinado, en el resto del libro se sigue el esquema ortodoxo de dar importancia a las técnicas de análisis estadístico a partir de los datos.

Figura 10. ¿Dónde se compran los Datos?

Paradójicamente, la etapa de generación de los datos debería ser, a mi juicio, la más importante cuando se piensa en el aprendizaje a largo plazo, pues si la idea que queda del curso de estadística es que se pide ayuda al estadístico cuando ya se tienen los datos, muy probablemente cuando el futuro profesional recurra por ayuda, será muy poco lo que pueda hacerse, si los datos fueron generados con un mal diseño del estudio o con procesos de medición cuestionables. Los primeros auxilios a los que nos referimos, tienen que ver con generar conciencia de la importancia de obtener datos de buena calidad, entendida esta, no solo por la medición, sino por la coherencia con los objetivos del estudio, la posibilidad de generalizar al universo previamente establecido, porque provienen de un diseño del estudio que revisó la literatura del contexto, para controlar potenciales factores de confusión para garantizar la comparabilidad, porque desde el diseño del estudio, se planearon las posibles estrategias de análisis, y se tomaron en consideración los alcances del estudio. Está muy claro, que esta parte invisible para los libros de texto, es la parte más importante de toda la investigación y la más descuidada en la enseñanza de la estadística. Además podría ser la que tenga mayor probabilidad de ser apropiada por el estudiante en el largo plazo y posiblemente también la que tenga mayor vínculos con su sistema explicativo.

Si aceptamos que no es muy buena idea dedicar un único curso de estadística a lograr habilidades en el manejo de técnicas aisladas y que en cambio, el eje que oriente el curso debe ser la búsqueda del conocimiento, entonces la fase de generación de los datos, debe ser la protagonista y de ella deberán surgir todos las necesidades de herramientas y técnicas estadísticas. El libro de oro de la enseñanza debería contener las ideas centrales para garantizar la validez del conocimiento generado en la investigación. El tiempo dedicado a los métodos tiene muy poco beneficio marginal en el largo plazo, aunque si tienen mucho valor las ideas que fundamentan los métodos. Las ideas esenciales de la estimación y las ideas centrales de los contrastes de hipótesis, por ejemplo, pues en el limitado tiempo disponible, los métodos elementales que alcancemos a enseñarles, no le permitirán resolver ningún problema serio.

Este proceso de generación de los datos, debe estar presente desde el principio hasta el fin del curso, no es suficiente que quede confinado en un capitulo aislado.

Una buena guía para apoyar la materialización de estos propósitos, en lo que se refiere a las distintas dimensiones de la validez en la búsqueda del conocimiento, la presenta Trochim, W. (2006), en su página Web Research Methods Knowledge Base.

Un excelente libro con casos reales de aplicación de la estadística en diferentes campos del conocimiento, cada uno de los cuales se ocupa de manera pedagógica de cuidar con celo la validez de todo el proceso estadístico es "Estadística una guía de lo desconocido" de Tannur y Otros (1992).

1.11. Es difícil enseñar lo que uno no sabe o no ha hecho.

Un limitante serio, para llevar a la práctica algunas de la reflexiones con las que estemos de acuerdo, es que la solución no es solo un problema de cambio de actitud del profesor, ni un problema de información que se pueda resolver leyendo más libros. Si el profesor de estadística, nunca se ha enfrentado con una situación problemática real, en la cual deba intentar acomodar sus ideas académicas perfectas, a un mundo imperfecto, en el cual deba tomar decisiones que no están en los libros, para resolver verdaderos problemas en los cuales, la variabilidad y la incertidumbre están presentes, entonces el profesor estará dando clase de toreo con diapositivas. No se trata de buena voluntad. Por esta razón, si a los profesores les parece sensato cambiar su paradigma, será necesaria una reconversión que debe pasar por torear unas vaquillas, posiblemente preparase para dos o tres revolcadas en el polvo y si somos muy optimistas, enfrentarse a un toro de verdad, una vez se tenga confianza. Capacitar a los profesores con diapositivas, para la reconversión, para que no enseñen toreo con diapositivas, es una contradicción en su esencia.

Romper la inercia y generar duda sobre la manera como estamos guiando el proceso de enseñanza-aprendizaje, es ya un gran paso, pues si esto no ocurre, nos quedaremos en el cómodo mundo de encontrar valores esperados y varianzas, calculando áreas bajo curvas, en la seguridad del burladero de la plaza. No es fácil romper paradigmas, sobre todo cuando pueden tener alto costo y alterar nuestro estado de confort.

En estas afirmaciones, que pueden parecer duras, no estamos considerando las restricciones del medio y el contexto particular de cada profesor, que pueden hacer más difícil el proceso de reconversión, o inclusive pueden hacerlo no factible, pues sabemos de sobra, que el profesor y el estudiante no son los únicos componentes del sistema de enseñanza-aprendizaje.

2. Objetivos para un curso introductorio de Estadística

A continuación nos arriesgaremos a plantear algunos objetivos para un curso (o dos) introductorio(s), en el entendido que su logro no es lineal. Todos están integrados. Estos objetivos están enfatizados en todo el escrito, sin embargo conviene dejarlos explícitos, como una propuesta.

2.1 Generar actitud positiva hacia la Estadística.

Este puede mirarse como una meta al final del proceso, pero es claro que si en el desarrollo el estudiante no encuentra sentido al objeto de su aprendizaje, no siente que este conocimiento le aporte a la formación que el ha escogido como profesión, iremos por el camino equivocado, estaremos construyendo en la dirección de la motivación extrínseca, que se traduce en que el estudiante invertirá sus esfuerzos en aprobar el curso, descubrir que es lo que le gusta a su profesor que él responda y de paso propiciaremos la existencia de los dos sistema paralelos en perfecta coexistencia: uno para responder en el ambiente escolar y el otro que trae el estudiante en su sistema explicativo para responder en las situaciones del mundo real. Estaremos propiciando un aprendizaje de corto plazo, con información con poco arraigo e integración en su propio sistema explicativo, colocándolo en el mismo sitio en su cerebro, donde guarda los números de los teléfonos celulares de sus seres más próximos. Por esta razón afirmamos que este es un objetivo de higiene, si se tiene no se garantiza el aprendizaje, pero si no se tiene, si es garantía de aprendizaje superficial y de poco valor en la modificación de su sistema de toma de decisiones. Es condición necesaria pero no suficiente.

Las lecturas del material de entrevistas reportado en libros como The Experience of Learning, de Marton, Hounsell y Entwistle (1984), dejan claro aspectos como la regularidad con la cual los estudiantes que son obligados a usar un enfoque superficial de aprendizaje de una tarea o de un curso completo describen su sentimiento de resentimiento, depresión y ansiedad. En contraste el enfoque profundo es generalmente asociado con un sentimiento de compromiso, reto y provecho, conjuntamente con un sentimiento de plenitud personal y placer.

Una manera de propiciar una actitud negativa hacia el curso de Estadística puede ser orientarlo hacia el logro de metas de poco valor, reflejadas en evaluaciones que no exigen mucho análisis, en situaciones descontextualizadas, en las cuales la memoria es la clave del éxito. Salcedo A. (2013), reportó los resultados de una investigación orientada a conocer el nivel de las preguntas que hacen los profesores, en los cursos de Estadística Descriptiva, en su Universidad. Tuvo acceso a 58 exámenes en los cuales se acopiaron un total de 646 preguntas que fueron clasificadas con la taxonomía SOLO, que establece cuatro niveles posibles para clasificar una pregunta de acuerdo con su complejidad: 1) Nivel uniestructural, corresponde a preguntas que contienen los datos informativos explícitos para dar respuesta a la misma. 2) Nivel multi-estructural, requiere de dos o más informaciones, que están explícitas en el enunciado y para relacionarlas se usa un procedimiento conocido, necesario para generar la respuesta. (Aplicación de reglas). 3) Nivel relacional, requiere del análisis de información, establecer relaciones entre los elementos del problema para deducir implicaciones o consecuencias, a partir del contexto del problema. 4) Nivel de abstracción extendida. La pregunta exige la abstracción de un principio general que puede ser inferido del texto del enunciado, para posteriormente aplicarlo a una situación distinta. (Transferencia de conocimiento). Es posible que implique la generación de un juicio.

En la investigación Salcedo encontró que de las 646 preguntas, el 77% de ellas se clasificaron en el nivel más bajo, casi un 22% en segundo nivel, acumulando en estos dos primeros niveles el 99%. Tan solo el 1% de las preguntas alcanzaron el nivel 3 y ninguna el nivel 4.

Esta es una evidencia de la pertinencia de reflexionar sobre los objetivos que se persiguen y sobre las estrategias usadas para lograrlo. Este tipo de evaluación estimula el aprendizaje superficial y puede generar mala actitud hacia el curso.

2.2 Tomar conciencia del riesgo de tomar decisiones ignorando la variabilidad.

Ya se explicó, cuando nos referimos al "Principio de Inversión", que toda idea nueva compite con desventaja con las ideas más antiguas. Solo cuando el estudiante se convence de que lo nuevo que se le ofrece es definitivamente superior a lo antiguo que posee, estará dispuesto a incluirlo, en el mejor de los casos sustituyéndolo. Generar escenarios en el curso, donde su enfoque determinístico, que ignora la variabilidad, no funciona bien en estas situaciones de incertidumbre y que si el tomara decisiones con su sistema explicativo podría ser muy peligroso, va en la dirección correcta. Ser consciente que en no pocas situaciones, la única manera de decidir es con base en los resultados de una muestra o en los generados en un diseño experimental y que cada que se repita arrojará datos distintos, obliga a tener una respuesta plausible en estos casos, a la pregunta: ¿Por qué creer en las conclusiones basadas en los datos de una muestra, si cada vez que repitamos el muestreo nos arroja datos distintos?. Responder correctamente esta pregunta es otro de los objetivos esenciales del curso.

2.3 Tomar conciencia de la importancia de ser cuidadoso con el proceso de generación de los datos y su relación con el proceso de análisis de los mismos.

Se habló de la poca importancia que dan los libros de texto al proceso de generación de datos, no obstante que una falla en el diseño del estudio o en la medición puede entregarnos datos con los cuales no puedan cumplirse los objetivos del estudio. Si además los libros de texto envían la señal de que la Estadística empieza cuando ya se tienen los datos, está el terreno abonado para muchos fracasos en la investigación empírica. Hacer énfasis en el proceso completo a lo largo del curso y generar conciencia de la importancia de un buen diseño del estudio para obtener datos adecuados a nuestras necesidades y que es necesario el acompañamiento de un estadístico desde el principio, debe ser un objetivo prioritario del curso.

2.4 Tomar conciencia de que con base en una muestra aleatoria, es imposible obtener conclusiones inequívocas, sin embargo en medio de la variabilidad y la incertidumbre, pueden obtenerse conclusiones útiles y con una medida probabilística del error que podríamos estar cometiendo.

Una razón del escepticismo generalizado de la población hacia los resultados estadísticos, es precisamente la conciencia de que si se repitiera el muestreo o el diseño experimental, resultarían distintos datos. ¿Cómo creer en las conclusiones estadísticas, si cada que se repita nuestro proceso, se obtienen datos distintos? En el curso se espera tener suficientes actividades, analogías y explicaciones, para que el estudiante quede convencido que a pesar de la incertidumbre mencionada en los resultados, tenemos control sobre su magnitud y tenemos los instrumentos para conocer su magnitud, suficiente para tomar decisiones.

2.5 Apropiarse de los conceptos estadísticos para el ejercicio crítico de la democracia y la ciudadanía.

Está claro que en la actualidad, no es suficiente con garantizar que la población pueda leer y escribir con solvencia; es necesario erradicar el analfabetismo numérico y en particular el analfabetismo estadístico, que permitirá que los ciudadanos comprendan y participen críticamente en el ejercicio de rendición de cuentas de sus gobernantes y del alcance de las metas propuestas, así como las cifras de los candidatos en campaña. Que sepan interpretar frecuencias condicionales y hacer comparaciones contra un control de referencia que les permitan juzgar y elaborar posiciones críticas.

2.6 Mejorar su capacidad crítica frente a informaciones de la vida cotidiana y la que resulta de los procesos empíricos de generación de conocimiento.

Todos los días y en todo lugar nos vemos bombardeados de información estadística, desde el gobierno hasta las empresas que pretenden vendernos bienes materiales, usando estadísticas con las cuales demuestran presuntamente que son mejores que la competencia. Nos presentan estadísticas sobre mejoras en el tiempo usando indicadores estadísticos. ¿Pueden obtenerse esos resultados por azar? Se requiere de un referente para hacer un juicio honesto. ¿Cómo fue obtenida la muestra? Está siendo aplicada a la población correcta según su origen?. Discutir a lo largo del curso sobre las distintas dimensiones de la validez, para fortalecer su capacidad crítica, es un objetivo valioso.

2.7 Apropiarse del lenguaje estadístico para hacer más efectiva su comunicación con los expertos y para comprender los resultados de las encuestas y de la investigación empírica.

Todos los días, en particular en la televisión se presentan resultados de encuestas de opinión y en muchos países es obligatorio reportar las características de calidad de las estimaciones y los detalles del esquema de muestreo utilizado.

Es conveniente que el estudiante conozca el lenguaje asociado con el muestreo de encuestas: margen de error y nivel de confianza y su nexo con el tamaño de muestra. Se familiarice con el significado de intervalo de confianza y los términos y significados de los conceptos básicos del contraste de hipótesis.

2.8 Desarrollar habilidades para el Análisis Exploratorio de Datos, orientado a dar respuesta a preguntas de interés en una investigación y a generar preguntas nuevas.

El estudiante con este aprendizaje, siente que la Estadística puede serle muy útil, refuerza su actitud positiva y siente que el puede resolver preguntas de interés en un contexto particular y formular hipótesis. Con esta herramienta se pueden descubrir resultados de la inferencia haciendo simulaciones y puede visualizarse el vínculo entre la forma de generar los datos y la manera de analizarlos.

2.9 Ideas esenciales sobre Contraste de Hipótesis. Riesgos de malas interpretaciones.

Sin pretender que el estudiante adquiera manejo operativo formal de las técnicas estadísticas para el contraste de hipótesis, introducir el problema como una necesidad asociada con una situación práctica y la imposibilidad de poder decidir sin asumir riesgos. Plantear de manera intuitiva la existencia de uno de dos posibles errores al tomar una decisión. Presentar analogías en las cuales “no rechazar” una hipótesis, no es equivalente a “aceptarla”. Lo que dice y lo que no dice un “p-value”. Discutir lo quiere decir “diferencia significativa” contra “diferencia práctica”.

2.10 Conocer los distintos tipos de problemas que pueden resolverse con la Estadística y las alternativas existentes para su solución.

Mostrar situaciones donde el interés es la comparación de distribuciones (sus medias) y explicar intuitivamente como las ideas de Análisis de la Varianza, son útiles en este contexto. Análogamente con problemáticas en las cuales el modelo de regresión es una buena opción de solución; las ideas de los pronósticos, etc. En realidad esto puede hacerse a través de las lecturas que se dejan de tarea y que se discuten al principio de cada clase.

3. Conclusiones

Las conclusiones se destacan claramente en el desarrollo del artículo. El estudiante no viene vacío, tiene su propio sistema explicativo para enfrentar situaciones de toma decisiones. El curso debe estar orientado a generar una actitud positiva del estudiante hacia la Estadística. Esta es una condición de higiene. No atiborrar de fórmulas y métodos para resolver muchas variantes de situaciones particulares. Reforzar ideas fuerza de la Estadística, usando cuando sea pertinente las herramientas del Análisis Exploratorio. El eje orientador del curso, no deben ser los temas o herramientas estadísticas, deben ser los problemas de investigación empírica y sus preguntas. Resolver preguntas y generar hipótesis. Ideas esenciales de Estimación y contraste de hipótesis, apelando mucho a la intuición. Dar más importancia a la interpretación de un resultado, a sus alcances y limitaciones y menos a complicadas estrategias para obtenerlo. La clave es ser conscientes en no invertir demasiados recursos en lo que pronto será olvidado, pero tratarlo con la profundidad que se requiera para reforzar las ideas fuerza que se espera se queden con el por siempre. La prácticas precediendo a la formalización y generando las necesidades de nuevas ideas y conceptos. No permitir que el curso se convierta en un nuevo curso de matemática. Son las preguntas que surgen en las prácticas las que orientarán el desarrollo de la teoría. Uso adecuado del software no solo para obtener resultados con los paquetes estadísticos, sino para aprender de las simulaciones. Finalmente podemos esperar que generando una buena actitud hacia la estadística, el estudiante, cuando sea profesional, actuará con responsabilidad para buscar un profesional de la estadística para que le apoye en la solución de los problemas complejos que se le presenten en su ejercicio profesional y en ese momento tendrá el lenguaje para comunicarse con este y para comprender los resultados.

Referencias

Ausubel, D.,y otros. (1986). Psicología educativa. 3 ed. *Editorial Trillas.* México

Barlow, Roger (1990): Statistics. *Wiley*. New York

Behar, R., Grima, P. (2013). El histograma como un instrumento para la comprensión de las funciones de densidad de probabilidad. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 229-235). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Behar, R., Grima, P. and Marco LL. (2013). Twenty-Five Analogies for Explaining Statistical Concepts. *The American Statistician.* Volume 67, Issue 1, 2013

Dallal, Gerard E (1990). Statistical Computing Packages: Dare We Abandon Their Teaching to Others? *The American Statistician*, November 1990, Vol. 44, No. 4, p. 265-6

Efron, Bradley and Tibshirani, Robert J. (1993). An Introduction to the Bootstrap *Chapman and Hall*. New York.

Freedman, David, Robert Pisani, Roger Purves, and Ani Adhikari. (1991). Instructor's Manual for Statistics. *Norton (second edition*) New York.

Garfield and Ahlgren (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal in research of mathematics Education*, 19, 44-63.

Garfield, B. Joan (1991), Reforming the Introductory Statistics Course. *The American Educational Research Association Annual Meeting*, Chicago.

Hey, John D.(1983). Data in Doubt: An Introduction to Bayesian Statistical Inference for Economists. *Martin Robertson*. Oxford.

Hogg, R.V. (1991). Statistical Education: Improvements are Badly Needed. *The American Statistician*, vol. 45, Nov. 1991, 342-343.

Kempthorne, Oscar (1980). The Teaching of Statistics: Content Versus Form. *The American Statistician*, February, vol. 34, no. 1, pp. 17-21.

Marton F., Hounsell D.J. and Entwistle N.J. (1984). The Experience of Learning. *Scottish Academic Press*. Edinburgh.

Marton Y Säljö. Approaches to Learning . In F. Marton et Al (Eds). (1984) The Experience of Learning. Edinburgh: *Scottish Academic Press*.

Marton, F. , Hounsell D.J. And Entwistle N.J. (1984). The Experience of Learning. Edinburgh: *Scottish Academic Press*.

Minsky M. (1986). La Sociedad de la mente. *Ediciones Galápago*, Argentina.

Moore, D. (2005). Estadística Aplicada Básica. 2ª Edición. *Antoni Bosh*. Barcelona, España.

Petrosino, J. (2000). ¿Cuánto duran los aprendizajes adquiridos? El dudoso ideal del conocimiento impecable. *Ediciones Novedades Educativas*. Buenos Aires, Argentina.

Ruberg, Stephen J. (1992) Biopharmaceutical Report, Vol 1, Summer.

Salcedo, A. (2013). Las preguntas del examen de estadística descriptiva. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 391-396). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Simon J. (1990). Resampling: A Better Way To Teach (and Do) Statistics. *College of Business and Management, University of Maryland, College Park.*

Tanur, J. y otros (1992). La estadística, una guía de lo desconocido. *Alianza, D.L.*, Madrid.

Trochim, W. (2000). The Research Methods Knowledge Base, 2nd Edition. *Atomic Dog Publishing*, Cincinnati, OH.

Trochim, W. M. (2006). The Research Methods Knowledge Base, 2nd Edition. Internet WWW page, at URL: <http://www.socialresearchmethods.net/kb/> (version current as of October 20, 2006).

La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación

Huerta Palau, M. Pedro

manuel.p.huerta@uv.es, Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo se reflexiona alrededor de una manera de resolver problemas de probabilidad que llamamos por simulación. Se describe la forma de resolver los problemas en cuatro etapas y un método de resolución con contenido heurístico en un número de pasos. Se muestra con un ejemplo el método y su uso para la formación de maestros, justificando la pertinencia de un enfoque posible basado en la resolución de problemas de probabilidad por simulación con intención didáctica.

Palabras clave: Probabilidad, Simulación, Resolución de problemas, Formación de maestros.

1. Introducción

El significado del verbo "simular" y del sustantivo "simulación" son significados compartidos por una amplia mayoría de los ciudadanos. Simular, y su acción, simulación adquieren el significado de "representar a algo fingiendo o imitando lo que no es" (DRAE, 2015). Distinto del verbo simular es el verbo "experimentar", y su correspondiente sustantivo, "experimentación", que requiere de vivir o de "notar en uno mismo alguna cosa, alguna impresión o algún sentimiento" (DRAE, 2015). Qué bueno sería poder experimentar situaciones reales en las que, de algún modo, estuvieran implicadas la aleatoriedad, la incertidumbre. Pero esto no siempre es posible. En todo caso se pueden simular con el "riesgo" que ello conlleva. Así, no es posible que en la escuela se experimente la equiprobabilidad con el lanzamiento de una *moneda ideal*, la "moneda" con igual probabilidad en ambos lados. Entre otras razones porque no existe tal moneda. En su lugar, se simula esa idea teórica con el lanzamiento de moneadas reales (euro, distintos pesos, sol, bolívar, colón, guaraní, córdoba, dólares de cualquier tipo, etc.) con el objetivo compartido por sus usuarios de poder obtener conclusiones sobre esa "moneda" que es, a la vez, euro, peso, sol, bolívar, colón, guaraní, córdoba o dólar y ninguna de todas ellas. No obstante, con cualquiera de dichas monedas reales se pueden experimentar sensaciones compartidas, como la incertidumbre o la aleatoriedad, pero no resultados posibles. Podemos experimentar cara o cruz o canto, en las monedas reales, pero simular solamente cara o cruz con ellas.

En la literatura podemos encontrar multitud de referencias a la palabra simulación. Estas pueden ir desde ser considerada en Heitele (1975) como una idea estocástica fundamental, junto con el modelo de la urna, a un instrumento para los procesos de modelización (Batanero, 2003; Henry, 2005), pasando por ser un recurso útil para la enseñanza de la naturaleza frecuencial o experimental de la probabilidad (Chaput, Girard, Henry, 2011), y como una herramienta en la formación de maestros y profesores (Maxara y Biehler, 2006; Batanero, Biehler y Maxara, 2010; Sánchez, 2002; Godino, Cañizares y Díaz, 2010; Batenaro, Godino y Cañizares, 2005) etc., la lista de referencias podría ser interminable. Pero muy poco se ha dicho de la simulación como un método o una manera de resolver problemas de probabilidad, si acaso en Shaughnnesy (1983), Bryan (1986) y Maxara y Biehler (2006) de quienes hablaremos más adelante. En realidad muy poco sabemos sobre los problemas de probabilidad y sobre sus resoluciones. Es éste el objetivo de este trabajo, tratar de acercar los dos campos de investigación el de la resolución de problemas de matemáticas y el de la educación probabilística y tratar de aprender

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 53-67). Granada, 2015.

de ambos, mostrando un ejemplo sobre la manera de resolver problema de probabilidad por simulación en un contexto muy particular, la formación de maestros, y las posibles implicaciones que, modestamente, se pueden extraer de todo ello.

2. La simulación como método de resolución de problemas: revisión bibliográfica.

En lo que sigue prestaremos atención a la simulación como método de resolución de problemas de probabilidad en tanto que los autores describan un proceso, más o menos completo, de resolución de problemas mediante un número determinado de pasos que permita al resolutor encontrar una respuesta a un problema de probabilidad dado al transitar por ellos.

Un primer ejemplo de esto que queremos decir lo encontramos en Shaughnessy (1983) quien sugiere una metodología de enseñanza de la probabilidad en los cursos introductorios de probabilidad y estadística con estudiantes de secundaria y primeros cursos de la enseñanza superior. Su idea de que los estudiantes transiten desde la conjetura al modelo pasa por la experimentación y la simulación. Así, en dicho texto, propone la resolución de problemas para con este fin sugiriendo a los profesores cómo realizar una simulación de un experimento de probabilidad con sus alumnos siguiendo los pasos que vemos a continuación:

a. Modelar el experimento con artilugios con probabilidades conocidas: monedas, dados, pirindolas, números aleatorios…

b. “Llevar a cabo” el experimento muchas veces con dichos artilugios, así acumulando los resultados de pequeños grupos pueden ayudar a tener una muestra “bastante grande”.

c. Recolectar, organizar y analizar los datos (requiere de algunas habilidades estadísticas).

d. Calcular probabilidades experimentales u otros resultados experimentales (por ejemplo, frecuencias) a partir de los datos.

e. Realizar inferencias u obtener conclusiones desde los resultados experimentales, esto es, mirar hacia atrás. (p. 340)

En efecto, en la manera en la que Shaughnessy se refiere a la simulación lo que parece estar sugiriendo es una metodología de enseñanza de la probabilidad basada en la resolución de problemas mediante la simulación de *lápiz y papel* (paso b) de tal forma que con la obtención de información relevante (paso d) el resolutor mejore su conjetura inicial sobre una posible respuesta al problema y realice inferencias sobre dichas conjeturas iniciales (paso e). Así, advierte al resolutor por vía del profesor: “before doing any of these problems, *always write down your best guess first*, and only then carry out a simulation of the problem” (Ibid, p. 340), con el fin de obtener alguna información que pueda usarse en beneficio de dar una respuesta al problema, que de otra forma no puede obtener, o tal vez no desea. Así pues, el autor parece sugerir a los profesores que tengan en cuenta que sus alumnos deberían realizar un trabajo previo en el problema antes de pensar en llevar a cabo cualquier simulación, como conjeturar, aventurarse a dar una respuesta sobre lo que se pregunta en el problema.

El modelo de Bryan (1986), sin embargo, es de los pocos que parece estar pensados como método para resolver problemas de probabilidad, sin otro interés que el propio de encontrar una respuesta al problema formulado. Basado en un texto conjunto de la NCTM y la American Statistical Association para la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad mediante la simulación, titulado The Art and Techinques of Simulation, (Gnanadesikan, Scheaffer y Swift, 1987), citado en Bryan (1986), es un método constituido por 8 etapas o pasos, que describimos a continuación para situaciones aleatorias en las que es razonable considerar la hipótesis de la equiprobabilidad:

Paso 1. Formula el problema claramente de tal forma que se proporcione toda la información necesaria y el objetivo sea claro.

Paso 2. Formula los sucesos simples que constituyen la base de la simulación

Paso 3. Formula o establece los supuestos subyacentes que simplifiquen el problema de manera que pueda hallarse una solución.

Paso 4. Selecciona un modelo para un experimento simple escogiendo un artilugio que genere resultados aleatorios con las probabilidades prescritas para el suceso real.

Paso 5. Define y gestiona un ensayo que consiste en una serie de simulaciones de sucesos simples que se detienen cuando el suceso de interés ha sido simulado una vez.

(Defina lo que es una simulación y realice tantas simulaciones como sean necesarias hasta que el suceso por el que se pregunta ocurra una vez.)

Paso 6. Registre la observación de interés tabulando la información necesaria para alcanzar el objetivo deseado. Muy a menudo, esto requiere, en cada ensayo, simplemente una notación de favorable o no favorable. Ocasionalmente, se anotarán resultados numéricos.

Paso 7. Repita los pasos 5 y 6 al menos 50 veces. Una estimación apropiada de una probabilidad a partir de resultados empíricos requiere de un gran número de ensayos. Si la simulación se hace con la ayuda de una computadora entonces 1000 o más ensayos pueden ejecutarse sin ningún inconveniente.

Paso 8. Resuma la información y obtenga conclusiones. Podemos estimar la probabilidad de un suceso de interés, A, evaluando:

$$\frac{\textit{número de ensayos favorables a A}}{\textit{número total de enseyos en el experimento}}$$

En la discusión introducen una interesante reflexión sobre la equivalencia entre los artilugios o generadores de azar posibles para la simulación de un problema dado y su posible influencia en su solución. No obstante, el método, dicen los autores, puede usarse en situaciones más complejas, en las que la hipótesis de la equiprobabilidad no es razonable pero entonces las probabilidades de inicio han de ser conocidas. En este caso, la discusión no se centra en el método sino en el paso 4 del método en el que hay que seleccionar el generador de azar apropiado para las probabilidades de inicio. En este punto se sugiere el uso de los números aleatorios, lo que es conocido como método de simulación de Monte Carlo (Engel, 1975a).

Es posible reconocer en el método tiempos de trabajo diferentes para un resolutor, así ha de hacer un trabajo previo con el problema formulado (pasos 1 a 3), un trabajo posterior de simulación (pasos 5 a 7), siendo el paso 4 el que permite ir del problema a la simulación en los pasos 5 a 7 y la solución del problema estimada en el paso 8 por la frecuencia relativa del suceso de interés en relación con el número total de ensayos.

Por su parte, Maxara y Biehler (2006), algo más de 20 años después que los dos trabajo anteriores que hemos analizado, consideran que con la simulación se pueden cumplir dos objetivos diferentes que podrían llegar a ser incluso complementarios dependiendo del uso que se haga de ella. Así, se puede ver a la simulación como: a) método de resolución substitutivo de las “matemáticas” requeridas para su resolución teórica, al substituir el modelo teórico que resolvería el problema por un modelo que se ha de crear e implementar *ad hoc* para su resolución, es decir, algo parecido a lo que llamaremos nosotros la manera de resolver los problemas por simulación y b) la simulación como contexto de enseñanza en el que la naturaleza del concepto de probabilidad en juego sea la consecuencia de una experimentación previa. La fenomenología subyacente puede usarse para explorar intuiciones, dificultades de aprendizaje, etc.… En este caso, la simulación reemplaza al mundo real, que ha de modelizase.

El modelo de enseñanza que proponen para los futuros profesores de enseñanza secundaria (alumnos de 11 a 16 años) empieza con el análisis de datos y estadística descriptiva usando un software comercializado. La simulación como método se introduce a estos estudiantes en paralelo al concepto de probabilidad. Las situaciones, dicen, son modeladas matemáticamente y por simulación, comparando los resultados (ibid, p. 1).

A diferencia de las simulaciones de "lápiz y papel" propuestas en los dos trabajos ya mencionados, en este se nota la irrupción del software educativo especializado en la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Así, lo que parece que estos autores van a construir es un método ligado al software particular que está disponible, con el fin de realizar las simulaciones sujetas a las propias restricciones del software. Por tanto, lo que se propone como metodología de enseñanza consistiría en instruir a los estudiantes en la traducción desde el mundo de la probabilidad en el que está formulado el problema que se quiere resolver al mundo del software en el que se va a simular. Esto hace que el software provoque ciertas restricciones o dificultades en la traducción entre ambos mundos y que las soluciones que se obtengan de la simulación sean interpretadas con dificultad en el contexto en el que se formula el problema.

Pero, en la manera de resolver los problemas por simulación habrá siempre una discusión subyacente al enfrentar la simulación de "lápiz y papel" y la simulación mediante software. O lo que es lo mismo, obtener conclusiones a partir de una simulación basándose en la ley de los pequeños números o en la ley de los grandes números. En su lugar, en nuestra opinión, lo que sería pertinente es preguntarse cuándo, cómo y por qué, en este orden o en un orden parecido, se ha de introducir el software (la ley de los grandes números) a la manera de resolver problemas por simulación y no adaptar la simulación al software disponible. Debería ser el resolutor quien decidiera en qué se apoya para dar respuesta al problema. Discutiremos sobre esto un poco más adelante.

Lo que los autores (Maxara y Biehler, 2006) llaman simulación estocástica consiste en un proceso en tres pasos: establecer un modelo estocástico, escribir *un plan de simulación* y la realización con la ayuda del software. Para nosotros el modelo estocástico forma parte de lo que hay que hacer para resolver el problema simulado. Para estos autores, formular un modelo estocástico para una situación aleatoria real dada consiste en describirla mediante modelos concretos (urnas) o, incluso, en una forma más abstracta. Los estudiantes han de determinar el conjunto de resultados posibles (el espacio muestral), la distribución de probabilidad, el número de pasos del experimento y los sucesos o variables aleatorias de interés. El plan de simulación por su parte está compuesto por 5 pasos que obligatoriamente se han de cumplir y que se asemeja al que en Zimmermann (2002) se describe como proceso de simulación y que básicamente consiste en 1) establecer el problema con sus hipótesis, 2) asignar números aleatorios (o los resultados posibles de un "generador de probabilidad"), 3) definir un ensayo o prueba, 4) Repetir el ensayo muchas veces y 5) Determinar la probabilidad empírica.

3. Algunas nociones importadas del estilo heurístico en la resolución de problemas de matemáticas.

En resolución de problemas de matemáticas en los sistemas educativos, como es nuestro caso, suele decirse que su investigación puede llevarse a cabo en más de un escenario, dependiendo del ámbito más o menos amplio en el que se consideren los problemas: los problemas de matemáticas y el currículum, una familia particular de problemas o un problema en concreto en una situación de enseñanza en concreto. Además, en cualquiera de esos escenarios, pueden considerarse hasta tres personajes que intervienen en la "función": los problemas solamente, los problemas y sus resolutores y finalmente a los problemas, a sus resolutores y a los profesores que enseñan la resolución de esos problemas a sus resolutores. Es lo que Cerdán (2008) y otros (por ejemplo Puig, 1996) llaman teoría de los niveles de análisis en resolución de problemas. Pues bien, aquí nuestro interés fundamental consiste en el análisis de los modos de resolver una familia particular de problemas de matemáticas, lo que llamamos problemas de probabilidad, es decir, problemas que, formulados en una situación aleatoria o de incertidumbre, preguntan, en cualquiera de las formas en la que es habitual hacerse así, por la probabilidad de un suceso o el valor esperado de una variable aleatoria o cualquier otra cuestión sujeta a incertidumbre. No implicaremos a sus resolutores ni a los profesores, pues quedan como propuestas para indagaciones futuras.

Desde un punto de vista heurístico vamos a tomar prestadas algunas nociones sobre el estilo heurístico de resolución de problemas (Puig, 1996), como son la noción de herramienta heurística, de sugerencia heurística y de método de resolución con contenido heurístico. Entendemos por *herramienta heurística*: a un procedimiento independiente del contenido del problema que lo transforma en otro (Ibid, p. 41). Pero además consideramos esta noción bajo esta acotación que aclara su uso: lo que una herramienta heurística hace es transformar el problema en otro, aunque no lo resuelve ni siquiera garantiza su solución. Simular el lanzamiento de la moneda mediante el lanzamiento de una moneda de euro es una herramienta heurística que transforma el problema inicial en otro. Simular con números aleatorios también es una herramienta heurística pues tiene la capacidad de transformar cualquier problema en otro problema referido a ellos (Método de Monte Carlo, Engel 1975a). Ente un problema de probabilidad la sugerencia *simula el problema* constituye una sugerencia que desencadena el uso de herramientas heurísticas. Pero estas no son las únicas que se pueden considerar, como veremos más adelante. Siñériz y Puig (2006) definen *método de resolución con contenido heurístico* a un conjunto de reglas que generan nuevos problemas a partir de uno que se pretende resolver, hasta llegar a uno considerado elemental, o conocido, y que, por tanto, se sabe resolver, o a uno ya resuelto. La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación se referirá pues como el conjunto de "cosas" que hay que hacer para generar problemas nuevos a partir del problema inicialmente formulado, de manera que sobre aquellos se sepa cómo resolverlos.

4. La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación.

Por todo lo anterior, diremos que un problema de probabilidad se ha resuelto por simulación si, durante el proceso de resolución el problema formulado, al que llamaremos *problema original*, se ha transformado en otro, al que llamaremos *problema simulado*, mediante algún generador de azar, de tal forma que, desde un punto de vista probabilístico, el problema simulado es equivalente al original, problema éste que se es capaz de abordar y del que se puede proporcionar alguna respuesta a lo que en él se pregunta, y de cuya respuesta (la del problema simulado) se puede inferir una respuesta posible para el problema original (Figura 1). Si la solución del problema simulado depende de un número dado de ensayos o pruebas entonces su fiabilidad o credibilidad dependerá de la manera en la que se considere ley de los grandes o pequeños números. Así pues, en este trabajo usamos la palabra simulación en un doble sentido: como proceso o manera de resolver problemas de probabilidad y como experimentación en el seno del problema simulado.

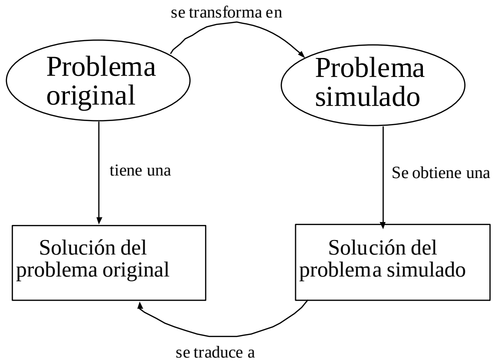


Figura 1. Esquema básico del proceso de resolución de un problema de probabilidad por simulación.

Resolver un problema por simulación implica considerar pues herramientas que transformen el problema original en otro, de tal manera que, para la herramienta considerada, el problema original y el problema simulado sean, probabilísticamente equivalentes[1]. Desde un punto de vista didáctico, lo interesante de dichas herramientas es su carácter y potencial heurístico, de exploración y de descubrimiento, que permiten ser consideradas en un buen número de problemas distintos. Desde el punto de vista del resolutor, que su conocimiento y experiencia en las herramientas le permitan obtener la mayor cantidad posible de información para que pueda ser tratada con posterioridad para dar respuesta al problema original. Por tanto, situados en el problema simulado, el resolutor ha de saber encontrar y formular una respuesta a lo preguntado en él, lo que le exige considerar los instrumentos y métodos estadísticos necesarios para tratar con la información disponible. Ha de abordar así un problema estadístico auxiliar asociado al problema simulado. La respuesta dada al problema simulado, mediante la solución del problema estadístico, se ha de "devolver" con posterioridad al problema original, lo que necesariamente implica considerar la naturaleza empírica de la probabilidad y su "estabilidad" ante un número elevado de ensayos.

Como el proceso de trasformación depende de la herramienta considerada, a cualquiera que se interese por los procesos de resolución de estos problemas le pueden surgir una serie de preguntas que seguramente deberían tenerse en cuenta, ya sea en los análisis sobre la actuación de cualquier resolutor o bien durante la enseñanza de la manera de resolver los problemas por simulación, como son, por ejemplo, (parafraseando a Puig, 1996 en p. 41): ¿cuál es la intención de uso de la herramienta? Si uso tal o cual herramienta, ¿cómo está relacionado el problema original con el problema simulado por la herramienta? Una vez obtenga una solución al problema simulado, ¿qué implicaciones puede tener en relación con la solución del problema original? ¿Qué se puede exportar de la solución del problema simulado al problema original y qué no? ¿Cómo queda transformado el problema original al incorporarle lo que se exporte de la solución del simulado? ¿Requiere ser reformulado el problema original? Estas preguntas no pueden contestarse en general, sino que han de plantearse para cada herramienta. Así, habría

[1] Si al problema original se le puede asociar un modelo teórico que lo resuelve, diremos que el problema simulado converge estocásticamente al problema original si las frecuencias relativas convergen en probabilidad hacia las probabilidades teóricas y los valores medios de las variables estadísticas cuantitativas convergen en probabilidad a las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias correspondientes. Recíprocamente, las probabilidades teóricas y las esperanzas matemáticas del problema original pueden interpretarse como frecuencias relativas o valores promedios en el problema simulado.

que considerar estas preguntas para diferentes generadores de azar: urnas, dados, pirindolas, etc.., tablas de números aleatorios, generadores de número aleatorios en hojas de cálculo, programas en R o en Matlab.

Con el fin de ver en qué consiste la manera de resolver un problema por simulación, consideremos el siguiente problema, en el que detrás de la sencillez de su enunciado oculta un buen número de dificultades para su resolución teórica. Un problema similar ya lo planteaba Shaughnessy (1983) en su propuesta de *simulation for simulation (p. 340)*:

Una conocida firma de pastelería regala con cada uno de sus pasteles una figurita que incluye en el interior del envoltorio con el que los vende. La colección completa está formada por 6 figuritas. ¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?

Asumamos que el problema formulado (el original) no se sabe resolver teóricamente pues el modelo teórico que da cuenta de él está al alcance de unos pocos e incluso fuera del nivel de nuestros estudiantes o de los objetivos de enseñanza para el que se plantea el problema, no en balde se trata de una cadena de Markov absorbente[2]. Propongamos como objetivo que el resolutor llegue a dar una respuesta al problema y que ésta sea lo más razonable posible y, además, que mientras esto ocurre él o ella aprenda a manejarse en entornos de incertidumbre. Nuestro objetivo no es, por el momento, transitar hacia el modelo teórico ni enseñar el algoritmo (Engel, 1975b) como paso intermedio, sino una manera de dar respuesta al problema que llamamos por simulación.

Según se desprende del esquema de la figura 1, para el trabajo que hay que hacer pueden identificarse cuatro momentos a lo largo del proceso de resolución completo que implica, de una parte, trabajo independiente en cada uno de ellos pero sin "perder de vista" a los otros": trabajo en el problema original, trabajo en el problema simulado, trabajo con la solución del problema simulado y trabajo con la solución del problema original, y, claro está, trabajo en las correspondientes relaciones/traducciones (Figura 2, anexo). El trabajo que hay que hacer puede sugerirse durante el proceso de enseñanza, descomponiéndose este en ocho "tiempos" para la indagación y la reflexión, como veremos en el apartado siguiente.

Excepto la primera vez, cada vez que adquiera un pastel obtengo una de las 6 figuritas[3] que o bien no la tenía aún e incrementa la colección, o bien ya la tenía y estoy en las mismas circunstancias que estaba antes de comprarlo. Pero cada vez que lo compro no sé qué figurita me va a salir hasta que no abra el envoltorio. Por hipótesis (hipótesis 1) puedo pensar que cualquiera de las figuritas es susceptible de aparecer en un pastel con la misma probabilidad que tendría cualquiera otra, 1/6, también bajo la hipótesis (hipótesis 2) de que la firma de la pastelería ha distribuido uniformemente sus figuritas entre sus bolsas conteniendo los pasteles

---

[2] Un recurso alternativo para este problema lo constituye el ábaco probabilístico de A. Engel (1975b). ¡Un algoritmo determinista resolviendo una situación aleatoria! Sugerimos al lector que resuelva el problema como le apetezca, bien considerándolo como una cadena de Markov o bien considerándolo como "un paseo aleatorio" en el ábaco de Engel, si le apetece. Si no es así, tampoco pasa nada, pues la lectura de este trabajo no depende de ello. Tal vez le apetecería simularlo para hacerse una ligera idea de "por dónde van los tiros" o incluso ir más allá, hacia una solución razonable y fiable, o incluso más allá, al modelo teórico. Una vez formulado, el problema pertenece solamente al resolutor.

[3] El número es ilustrativo e intencionado, proporcionado por el profesor.

que vende y (hipótesis 3) el centro comercial distribuye los pastelitos uniformemente en sus estantes. Dejaré de comprar pastelitos en el momento en el que tenga la colección completa. ¿Tendré la colección completa alguna vez? ¿Habrá que comprar muchos pasteles?

Al lanzamiento de un "dado cúbico" y observar la cara sobre la que se posa también se le ha concedido la hipótesis (hipótesis 1, en el problema original) de la equiprobabilidad, asignándole a cualquier de sus caras el valor de 1/6 para su probabilidad. Le concedemos a los lanzamientos sucesivos de un dado, anotando cada vez los resultados que aparecen, la hipótesis de ser un experimento aleatorio compuesto de pruebas independientes (hipótesis 2 y 3, en el problema original). Lanzar el dado repetidamente, anotar el resultado de la cara sobre la que se posa, hasta que se haya posado en las 6 caras por lo menos una vez simula el proceso de comprar pasteles (por el lanzamiento del dado) hasta tener las 6 figuritas (todas las caras del dado aparecen por primera vez en una racha de resultados). El problema simulado queda así: ¿Cuál es el número medio de lanzamientos consecutivos que habrá que hacer de un dado cúbico hasta que éste tarde o temprano se pose al menos una vez en todas sus caras? Como consecuencia, ¿se posará sobre todas las caras, al menos una vez?, ¿habrá que hacer para que eso ocurra muchos lanzamientos?

Abordemos el problema simulado. Lancemos el dado cuantas veces estimemos que sea necesario. Diremos que hemos realizado una simulación cuando al lanzar repetidamente el dado hemos conseguido reproducir el suceso por el que se nos pregunta. Lo que esta simulación produce es información sobre lo que ha ocurrido, información que debe ser organizada y tratada. Surge así el problema estadístico asociado al problema simulado. La consideración, la definición de variables estadísticas es consustancial al proceso y el tamaño de la población también. Ahora la pregunta ¿cuántas simulaciones hay que hacer para dar respuesta al problema es, entre otras, pertinente? La pregunta tiene múltiples respuestas, probablemente tantas como resolutores y tantas como niveles de exigencia sean requeridos para la respuesta que se proporciona. Por lo menos dos simulaciones, por aquello de promediar. Ahora bien, el estado de incertidumbre que me puede producir una respuesta basada en dos simulaciones puede ser mayor que si hago muchas más. Pero, ¿cuántas más?

Algunos métodos para determinar la probabilidad experimental de un suceso sugieren realizar un número de simulaciones dado de antemano: 50, 100, o 1000, número con el que se considera que se puede proporcionar una respuesta razonable al problema simulado (por ejemplo, paso 7 en el modelo de Byan, 1986). Otros, como los libros de texto por lo general, son mucho más ambiguos: muchas simulaciones, cuantas más mejor. En todo caso, siempre el resolutor se hará preguntas alrededor de cualquier sugerencia que se le haga sobre el número de simulaciones que habrá que hacer ¿por qué ese número y no otro? La respuesta concluyente es de naturaleza matemática[4], aunque en todo caso el número de aquellas dependerá solo del resolutor y del grado de credibilidad o fiabilidad que éste le otorgue a una respuesta basada en el número de simulaciones que él o ella haya considerado que es razonable realizar. O, tal vez, del profesor quien establece cuáles son dichas condiciones. Por ejemplo, supóngase que se quiere

[4] Sea p la probabilidad teórica de un suceso S. Sea fr_n la frecuencia relativa asociada a ese suceso en *n* pruebas de un experimento aleatorio que lo simula. La versión fuerte de la ley de los grandes números establece la convergencia estocástica de las frecuencias hacia las probabilidades en los siguientes términos: $P(fr_n \to p) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

una aproximación de la probabilidad teórica de hasta un 1% ($\varepsilon = 0.01$) con un grado de confianza del 95%, $\delta = 0.95$. En estas condiciones el profesor demanda de sus estudiantes un número de simulaciones n_0 que puede ser calculada usando la desigualdad de Chebyschev (DeGroot, 1975, p. 185-186): $n_0 \geq \dfrac{p(1-p)}{\varepsilon^2(1-\delta)}$. Claro que para obtener este número se ha de partir de una probabilidad teórica *p* conocida. Aunque, no obstante, se puede estimar el máximo necesario para una aproximación y grados de confianza dados, maximizando la función $n = kp(1-p)$, siendo $K = \dfrac{1}{\varepsilon^2(1-\delta)}$ una constante prefijada[5]. En realidad este número tiene más valor metodológico que real, ya que permite hacer el tránsito desde la simulación en lápiz y papel al uso consciente de la simulación con la ayuda de un software. No tanto para el resolutor cuyo nivel de satisfacción y exigencia podría darse con un número menor de simulaciones.

En todo caso la respuesta al problema simulado depende del grado de precisión y fiabilidad con la que se quiera expresar. Pero no deja de ser una respuesta al problema simulado que requiere ser traducida o usada para dar respuesta al problema original. En los términos en los que está expresada la pregunta: *¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?*, requiere además dar una credibilidad a la respuesta dada a la pregunta en el problema simulado: *¿Cuál es el número medio de lanzamientos consecutivos que habrá que hacer de un dado hasta que éste, tarde o temprano, se pose en todas sus caras?*, puesto que pide del resolutor un grado de creencia o credibilidad que le concede a dicho valor promedio.

5. Una manera de enseñar la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación en la formación de maestros. Un ejemplo.

Describiré a continuación cómo se ha formulado este problema a estudiantes para maestro y algunas consecuencias que se han observado al hacerlo así.

Antes de este problema los estudiantes habían abordado otros tres problemas, un problema sobre rachas de longitud 2 con monedas, explorando si es un juego justo. El problema de la existencia o no de una estrategia ganadora en el juego de “piedra-papel-tijera” y, finalmente, el problema de la cueva (Huerta, 2002) con la misma metodología que se ha usado con el problema que hemos resuelto en el apartado anterior. Los objetivos de enseñanza son variados y, entre otros, los siguientes:

- Explorar las diferentes naturalezas del concepto probabilidad en la resolución de problemas de probabilidad.
- Explorar el potencial de la resolución de problemas de probabilidad por simulación.

---

[5] Para cualquier ε y δ que se considere, esta función alcanza un máximo para p=1/2. El número máximo de simulaciones dependerá de estos valores y se puede estimar por $n_0 = \dfrac{1}{4\varepsilon^2(1-\delta)}$.

- Explorar si la resolución de problemas de probabilidad por simulación facilita y permite modificar el juicio subjetivo que posee el resolutor sobre los fenómenos aleatorios implicados en el problema.

Hay todavía un objetivo más, sobre potencialidades, como consecuencia del trabajo que se está haciendo mientras se resuelve el problema: explorar el potencial que tiene el método de resolución de los problemas por simulación y sus objetivos de enseñanza para la educación primaria.

El problema se enuncia a los estudiantes tal y como lo hemos presentado en el apartado anterior, junto con la tarea descompuesta en 8 tiempos y un conjunto de cuestiones asociadas a cada tiempo a modo de sugerencias heurísticas. El número de tiempos está relacionado con las macro-etapas del método de resolución (Figura 1) y las sugerencias con el trabajo que habría que hacer en cada una de ellas (Figura 2, en el anexo). El número de sugerencias es claramente variable y puede ser modificado dependiendo del problema y del nivel de los resolutores. Los tiempos y las sugerencias formuladas para el problema han sido las siguientes:

- Primer tiempo: Exploración de la situación real, de lo que está sujeto a incertidumbre y no lo está, de lo que es conocido y desconocido en la situación real.
    - ¿Crees tener seguridad de que tarde o temprano se completará la colección de figuritas? ¿Por qué?
    - Al comprar un buen número de pasteles, ¿en qué condiciones puede encontrarse la colección de figuritas?
    - Entonces, ¿cuántos pasteles exactamente se tendrían que comprar para tener la colección completa? ¿Por qué?
- Segundo tiempo: Juicios subjetivos a priori derivados del análisis de la situación real.
    - ¿Qué crees que es más fácil que ocurra, conseguir la colección completa o no conseguirla? ¿Por qué?
    - Si no sabes exactamente cuántos comprar, al menos haz una conjetura sobre el cuántos, ¿Cuántos pasteles estimas que se tendrían que comprar, más o menos, para poder conseguir la colección completa? ¿Por qué?
- Tercer tiempo: Fiabilidad o credibilidad de la conjetura.
    - Quieres explorar hasta qué punto es fiable o creíble tu conjetura sobre la posibilidad de conseguir toda la colección completa y sobre el número de pasteles que habría que comprar para obtenerla. ¿Cómo lo harías?
- Cuarto tiempo: La Simulación, necesidad y uso de herramientas heurísticas. El problema simulado.
    - ¿Experimentar o simular? ¿Puede experimentarse el problema? Por el contrario, ¿solamente se puede simular? ¿Por qué?
    - Si lo vas a simular la compra de pasteles, ¿qué vas a usar para ello? Si hay hipótesis que formular, ¿qué hipótesis son estas?
    - ¿En qué consiste una simulación?

    - ¿Cómo queda ahora el problema original en términos de la simulación (el problema simulado)? Formúlalo sin usar las palabras "pasteles" ni "figuritas" solamente en términos de la herramienta usada.
    - ¿Puedes decir otra forma de simular el problema? Repite todas las cuestiones anteriores para la nueva herramienta considerada.
    - Para las simulaciones pensadas y sus correspondientes problemas simulados formulados, ¿en qué crees que te van a ayudar a la hora de dar respuesta al problema original?
- Quinto tiempo: La simulación productora de la información dependiente de la herramienta usada. Tratamiento de la información, el problema estadístico asociado dependiente del número de simulaciones realizadas.
    - Resuelve los problemas simulados.
- Sexto tiempo: Equivalencia de problemas. Equivalencia entre los problemas simulados dependientes de las herramientas consideradas
    - Tienes una solución para cada uno de los problemas simulados. Si las comparas, ¿qué puedes decir de ellas?
    - ¿Te lo esperadas? ¿Por qué?
    - Entonces, ¿Cuál de las soluciones anteriores vas a usar para dar respuesta al problema original? ¿Por qué?
- Séptimo tiempo: De la solución del problema simulado a la solución del problema original.
    - Ahora, con la información disponible de las soluciones de los problemas simulados, trata de dar respuesta a la pregunta formulada en el problema original: *¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?*
    - Justifica por qué crees que es ese número. ¿Qué significa para ti es número?
- Octavo tiempo. La devolución de la solución al problema original: utilidad y fiabilidad.
    - ¿Hasta qué punto crees que es fiable la respuesta que acabas de dar?
    - ¿Podrías mejorar aún más esa fiabilidad de la respuesta o la credibilidad que le concedes?
    - Seguro que has vivido situaciones como la que acabas de resolver en este problema. ¿Hasta qué punto la solución que has obtenido se puede considerar como solución de una situación real que hayas vivido?
    - ¿Qué se puede aprovechar de esa solución para la situación real vivida por ti y qué no? Explícate lo mejor que puedas.
    - La reflexión anterior, ¿afectaría a la formulación del problema original? ¿De qué manera?

Podría comprobarse como lo que se le ofrece al estudiante es un método de resolución con potencial heurístico en 8 pasos, ya que, por una parte, tiene vocación de ser útil no solo para este problema sino para otros problemas de probabilidad en los que haya que tratar con probabilidades y variables aleatorias y, de otra, tiene ese marcado carácter de exploración en busca de la información que permite contestar a lo que se pregunta en él.

6. Conclusiones y reflexiones finales.

La manera de resolver un problema de probabilidad por simulación es un proceso realmente complejo y en algunas ocasiones difícil. Parece pues pertinente preguntarse, a la luz de lo expuesto anteriormente, ¿por qué resultaría de interés enseñar a los futuros maestros[6] esta manera de resolver problemas de probabilidad, por simulación como la hemos llamado? De la experiencia propia puede apuntarse que, en general, este enfoque produce más beneficios que perjuicios, pues, en nuestra opinión, hay unas cuantas razones sobre las que se sustenta y que tal vez lo justificarían. Una de ellas, citando a Freudenthal (1973), es permitir que los futuros maestros aprecien qué es eso de las Matemáticas: *To explain to people what mathematics really means, one finds the most convincing examples in probability* (p. 583), algo a lo que no están realmente acostumbrados ni preparados. Pero, además, porque esta manera de resolver los problemas pone en contacto al futuro/a maestro/a con dos tipos de informaciones referentes a los fenómenos que aparecen implicados en los problemas, informaciones de las que dependen las decisiones que toma el resolutor a lo largo de la resolución, informaciones que en términos de Borovcnik (2011, p. 72) son de tipo *objetivista* y *subjetivista*, lo que como consecuencia favorece el uso de la probabilidad tanto en su naturaleza objetiva (clásica o frecuentista) como subjetivista (bayesiana). Porque, también, pone al estudiante para maestro/a en contacto continuamente con la conjetura, en el mismo sentido que Bernouilli (1713, p. 211 y sig., citado en Sylla, 2014, p. 30): *Conjeturar sobre algo es medir su probabilidad: por tanto definimos el arte de conjeturar (Ars Conjectandi), o estocástica (Stochastice), como el arte de medir las probabilidades de las cosas tan exactamente como sea posible, para concluir que, a nuestro juicio y acciones, siempre podemos escoger o seguir aquello que se ha encontrado ser lo menor, más satisfactorio, más seguro, o más cuidadosamente considerado*[7].

Pero, también, la manera de resolver así permite al futuro maestro/a separar una “realidad” representada por el problema original del modelo creado para simular y representado por el problema simulado. Separación que resulta dura y complicada cuando el resolutor ha de formular dicho problema simulado en función de la herramienta o generador de azar considerado. Además, permite al resolutor apreciar a los generadores de azar como herramientas de transformación de un problema en otro, con el fin de indagar y explorar nuevas informaciones que no se disponían con anterioridad, con la pretensión de que sean útiles para la resolución del problema original, de ahí su carácter heurístico.

Pero aún creemos que hay más razones. Resolver los problemas de esta manera pone en contacto dos tipos de razonamiento, el razonamiento estadístico y el probabilístico, como sea que se les considere. La información proporcionada por el problema simulado, a veces escasa a veces abundante o incluso muy abundante, requiere de la formulación de pequeños o grandes problemas estadísticos auxiliares que permitan dar respuesta a las preguntas planteadas en él. Respuestas que requieren ser interpretadas en términos del problema original, de la “realidad”

[6] Esta pregunta y su reflexión posterior también la formularía en la formación de futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, aunque habría que matizar algunos aspectos debido a la diferente formación matemática inicial de ambos colectivos.

[7] Traducción del autor.

representada por él, apreciando de este modo por qué se hacen matemáticas y al servicio de qué. Porque en el desarrollo de la manera de resolver que hemos propuesto en este trabajo el resolutor, futuro maestro/a, convive con las sugerencias de tipo heurístico que le han permitido avanzar en la búsqueda de una respuesta a cualquiera de los problemas auxiliares formulados a lo largo del proceso de resolución. Porque, en suma, el estudiante para maestro/a conoce un método de resolución de problemas de probabilidad con potencial heurístico que le ayudará seguramente a considerar la posibilidad de otro enfoque de la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria, alternativo al existente, como lo demuestran sendos trabajos de realizados por un estudiante del grado de Maestro en Educación Primaria con su trabajo de fin de grado titulado “La simulación en el aprendizaje de la probabilidad en Primaria (11-12 años)” (Capella, 2013) y un segundo correspondiente al Trabajo de fin de Máster en Profesorado de Matemáticas en Educación Secundaria titulado “La simulación y la resolución de problemas de probabilidad. Estudio sobre su influencia en la probabilidad subjetiva en alumnos de 13 y 14 años” (Capella, 2014). Al menos estamos en el buen camino.

Referencias

Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía, XV*(35), 39 -54.

Batanero, C., Biehler, R & Maxara, C. (2010). *Using simulation to Bridge Teachers’ Content and Pedagogical Knowledge in Probability*. Paper presented at the 15th ICMI Study.

Batanero, C., Godino, J. & Cañizares (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En *Proceedings of First ICMI African Regional Conference*. Johannesburg: ICMI.

Benson, C. T. & Jones, G. A. (1999). Assessing Students' Thinking in Modeling Probability Contexts. *The mathematics Educator 4*(2), 1-21.

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the Role of Probability Within Statistics Curricula. In C. Batanero, G. Burril, and C. Reading (eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI/IASE Study*, pp. 71-83.

Bryan, B. (1986). *Using simulation to model real world problems*. Proceedings of the ICOTS-2 conference, pp. 86-90. Retrieved from http://iase-web.org/Conference_Proceedings.

Capella, J. (2013). *La simulació en l’aprenentatge de la probabilitat en Primària*. Treball de Fi de Grau de Mestre en Educació Primària. Universitat de Valencia. Valencia, España. Disponible en http://roderic.uv.es

Capella, J. (2014). *La simulació i la resolució de problemes de probabilitat. Estudi sobre la influència en la probabilitat subjectiva en alumnes de 13 i 14 anys*. Trabajo de Fin de Máster no publicado. Universitat de València. Valencia, España.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la Familia de problemas Aritmético-Algebraicos*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de València. Valencia, España.

Chaput, B., Girard, J.C., Henry, M. (2011). Frequentist Approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burril, and C. Reading (eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI/IASE Study*, pp. 85-95.

Engel, A. (1975a). *L’enseignement des probabilités et de la statistique*. Paris, France : CEDIC.

Engel, A (1975b). The Probabilistic Abacus. *Educational Studies in Mathematics, 6*(1), 1-22.

Freudenthal, H (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordretch, The Netherlands: Reidel.

Godino, J., Cañizares, M. J., y Díaz, C. (2010). *Teaching Probability to Pre-service Primary School Teachers through Simulation*. Retrieved from http://iase-web.org/documents/papers/isi54/2989.pdf

Gnanadesikan, M; Scheaffer, R. & Swift, J (1987). *The Art and Techniques of Simulation* (Teachers Edition). USA: Dale Seymour Publications.

Heitele, D. (1975). An Epistemological view on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205.

M. Henry (Ed.) (2005). *Autour de la modélisation en probabilités*. IREM de Franche-Comté: Presses universitaires de Franche-Comté: Université de Franche-Comté.

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *20*(1), 75-86.

Maxara, C & Biehler, R. (2006). Students' simulation and modelling competence after a computer-intensive elementary course in statistics and probability. *Proceedings of the ICOTS-7 conference*, pp. 1-6. Retrieved from http://iase-web.org/Conference_Proceedings.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.

DRAE (2015). Diccionario de la Real Academia Española. Disponible en http://www.rae.es/recursos/diccionarios/drae

Sánchez, E. (2002). Teachers' beliefs about usefulness of simulation with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. *Proceedings of the ICOTS 6 conference*, 1-6. Retrieved from http://iase-web.org/Conference_Proceedings

Saughnessy, J. M. (1983). The Psychology of Inference and The Teaching of Probability and Statistics: Two Sides of the Same Coin? R. W. Sholz (Ed.), *Decision Making Under Uncertainty*. North-Holland: Elsevier Science Publishers, 325-350.

Siñeriz, L. y Puig, L. (2006). Un modelo de competencia para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. En J. Aymerich y S. Macario, (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI*. Castelló de la Plana, España: Publicacions de la Universitat Jaume I, 323-332.

Sylla, E. D. (2014). Tercentenary of *Ars Conjectandi* (1713): Jacob Bernoulli and the Founding of Mathematical Probability. *International Staistical Review*, *82*, 27-45.

Zimmermann, G. (2002). *Students' reasoning about probability simulation during instruction*. Doctoral Dissertation. Retrieved from https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/02.Zimmerman.Dissertation.pdf

ANEXO.

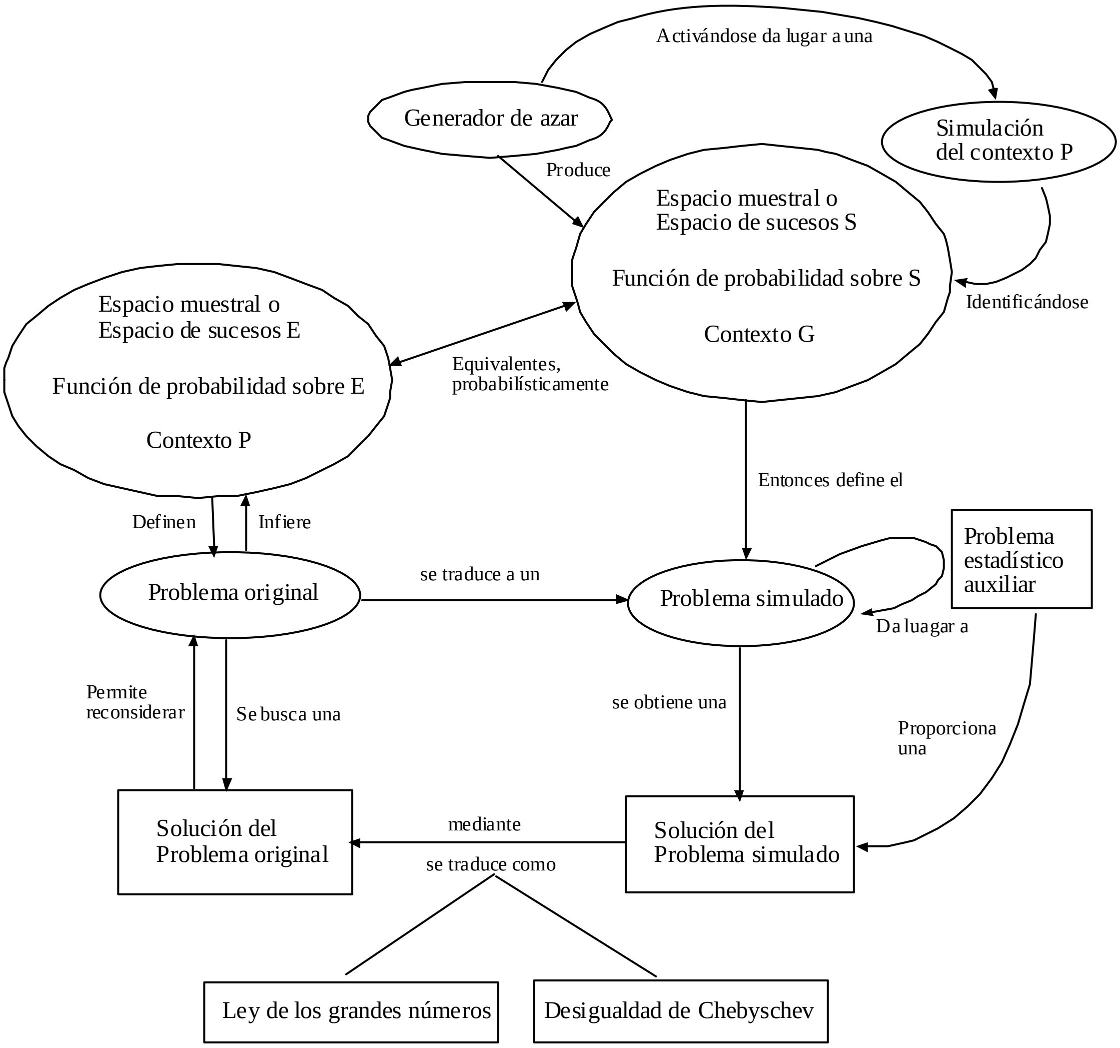


Figura 2. El trabajo durante la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación. Incluso un esquema tan complejo como este no refleja fielmente todo el trabajo que realmente hay que hacer cuando se aborda la resolución de un problema de esta manera.

Los escenarios de aprendizaje. Una estrategia para tratar los conocimientos estocáticos en las aulas

Azcárate Goded, Pilar

pilar.azcarate@uca.es; Universidad de Cádiz

Resumen

En este trabajo presentamos una estrategia para tratar los conocimientos estocásticos en el aula que se apoya en el desarrollo de un proyecto de ámbito europeo. Este proyecto, denominado EarlyStatistics, se focalizaba en el diseño e implementación de propuestas formativas dirigidas tanto a la formación permanente de profesores en relación con la educación estadística, como en la elaboración de propuestas educativas apoyadas en el diseño de escenarios orientadas a la formación estadística de los alumnos de la educación obligatoria. Para dichas propuestas se diseñaron diferentes escenarios, situaciones socio-contextualizadas, de aprendizaje cercanos a los intereses de los estudiantes y adaptados a diferentes niveles educativos. Reflexionamos sobre sus bases teóricas y presentamos la ejemplificación de un escenario de los diseñados durante el desarrollo del proyecto.

Palabras Claves: Educación Estocástica. Escenarios de Aprendizaje. Educación Obligatoria

1. Introducción

Como en gran cantidad de estudios se indica y se detecta que, aunque lleva años incluida en el currículo oficial, la educación estocástica sigue siendo una asignatura pendiente de nuestro sistema educativo y no solo de nuestro país (Borovcnik, 2011). Como respuesta a dicha realidad, se diseñó y desarrolló un proyecto de investigación e innovación, *EarlyStatistics: Improving statistics instruction in European elementary and middle schools though online professional development"* (http://www.earlystatistics.net; Socrates-Comenius Action Project 226573-CP-1-2005-1-CY-Comenius-C21), financiado por la UE y desarrollado por un consorcio de países europeos (Chipre, Noruega, Grecia y España) (Meletiou-Mavrotheris, 2007; Azcarate et al., 2008). El proyecto se focalizaba tanto en propuestas formativas dirigidas a la formación de profesores en ejercicio en relación con la educación estadística, como en la elaboración de propuestas educativas, apoyadas en el diseño de escenarios, orientadas a la formación estadística de los alumnos de la educación obligatoria.

Proyecto que fue galardonado por I.S.L.P. (International Statistical Literacy Project), en el marco de la I.A.S.E. (Asociación Internacional para la Enseñanza de la Estadística) con el *2009 Best Cooperative Project Award in Statistical Literacy* (Premio Internacional de Alfabetización Estadística 2009), por las expectativas que abre dicho plan de formación permanente, ofertado por Bruselas para los profesores de matemáticas de la Unión Europea.

El proyecto diseñado pretende dar una vuelta de tuerca al tratamiento de esta rama de las matemáticas, fundamental para los ciudadanos en formación dado el gran número de ocasiones en las que se presenta en el mundo real y cotidiano que les rodea; máxime si se imaginan en su futura vida adulta y necesitan utilizar e interpretar adecuadamente informaciones de naturaleza estadística y probabilística. Desde los principios que se parten, se pretende que los profesores se introduzcan en el dominio del conocimiento estocástico y los estudiantes desarrollen sus

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 69-86). Granada, 2015.

competencias, y terminen comprendiendo y utilizando adecuadamente los conocimientos estadísticos.

Como hemos indicado, todos nuestros estudiantes, interaccionan en un contexto social donde la información estadística está presente cotidianamente, en la prensa, los medios de comunicación, en internet, en las aulas, etc. En este contexto, la habilidad de analizar, interpretar y comunicar información desde los datos disponibles, son instrumentos necesarios para poder comprender los datos y ser capaces de darle sentido y utilidad en su intervención como ciudadano. Nuestros estudiantes, no sólo aprenden en el ámbito escolar, su interacción con el medio es una parte vital de su desarrollo, en él encuentran información significativa y la escuela les debe capacitar para poder utilizarla adecuadamente.

En este contexto y desde el objetivo de conseguir ciudadanos formados y con capacidad de intervenir en las situaciones a las que ha de enfrentarse cotidianamente, una las competencias básicas a desarrollar por los alumnos de los diferentes niveles es la alfabetización estadística (Gal, 2005); es decir, la capacidad para analizar, interpretar y comunicar la información a partir de los datos extraídos de las situaciones del entorno. Gran parte de esas situaciones están afectadas por la incertidumbre y las decisiones que en ellas se han de tomar se apoyan en una interpretación e inferencia adecuada desde informaciones de carácter estocástico. La educación estadística necesita de ambientes de aprendizaje activos que a través de la indagación y el debate, permitan elaborar un conocimiento relevante y significativo de conceptos y procedimientos implicados.

Para ello es necesario impregnar la enseñanza de la estocástica de estrategias activas de aprendizaje, en relación directa con el uso de datos reales, con el fin de que los estudiantes adquieran una verdadera comprensión conceptual de los conceptos estadísticos y probabilísticos implicados en sus actuaciones (Batanero y Díaz, 2011).

El conocimiento estadístico no puede ser comprendido separado de su contexto de aplicación, ni aplicado únicamente a problemas abstractos que no se encuentran en la vida real**.** Las ideas y procedimientos estocásticos han de ser presentados de forma contextualizada. La alfabetización estadística se incentiva en el trabajo con propuestas ligadas a la experiencia directa de los alumnos (Watson, 2011).

En nuestra propuesta hemos optado por trabajar con la presentación del contenido estadístico a través de *escenarios*. Se trata de presentar escenarios o situaciones globales que permitan el desarrollo de la las diferentes fases de un estudio estadístico: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos, obtención de conclusiones sobre el problema planteado, previsiones, toma de decisiones, etc. Estos diseños "*teatralizados*" de la realidad, para ponerlos en juego en el "*teatro del aula*", es una forma coherente con la necesidad de acercar el conocimiento cotidiano y lograr que sean, las visiones usuales de los alumnos, las que se pongan en tela de juicio para hacerlas evolucionar hacia visones más complejizadoras de la realidad, conectando su conocimiento cotidiano con este saber escolar. Los casos serán representaciones organizadas didácticamente con un guión para guiar la reflexión e indagación del alumno, inicialmente para su atención individualizada y posteriormente con ciertas pautas para el trabajo cooperativo (Cardeñoso y Serradó, 2006).

La elección de una propuesta didáctica basada en situaciones socio-contextuales cercanas a los alumnos, favorece que sean más capaces de relacionar significativamente la nueva información que si trabajan en contextos que no les son familiares.

En este sentido, entendemos por escenario una representación organizada por el educador, alrededor de un tema significativo en la vida del alumno, que sea socialmente relevante. Estos escenarios deben estar organizados y desarrollados didácticamente por el profesor. Para ello, los escenarios diseñados en el proyecto por el equipo de formadores, deben ser sometidos a un análisis previo que permita al profesor adaptarlo a su aula y guiar la actividad, la reflexión e indagación del alumno, con pautas de actuación individualizada y cooperativas, para permitir a los mismos poner en juego sus propias visiones del problema, contrastarlas con las de sus compañeros y hacerlas evolucionar hacia visones más complejas de la realidad.

Este tipo de propuesta de trabajo supone un reto para los alumnos, acostumbrados a trabajar con problemas aislados, el trabajo con y desde escenarios o proyectos, implica la existencia de diferentes procedimientos y soluciones adecuadas que suelen estar relacionados con diversos contenidos (Batanero y Díaz, 2004; Cardeñoso y Serrado, 2006; Vega, Cardeñoso y Azcárate, 2011). Pero no sólo es un reto para los alumnos, también lo es para el profesor que debe aprender a moverse en el método y razonamiento estadístico sobre el que tienen pocos referentes teóricos y prácticos (Meletiou-Mavrotheris, 2007a; Azcárate y Cardeñoso, 2011).

De hecho, uno de esos factores que facilitan el desarrollo de esas capacidades en los alumnos es la propia capacidad del docente de adaptar los contenidos de enseñanza al nivel de conocimiento de los alumnos, y diseñar su presentación en el aula en contextos cercanos a su vida cotidiana que de sentido al conocimiento que están tratando, acordes con sus intereses y sus formas de conocer. Situaciones que permitan establecer la relevancia y significado de los conceptos estadísticos**,** basados en el estudio de casos o escenarios concretos (Barab et al., 2001; GAISE, 2005; Vega, 2012).

2. Los profesores ante el reto de la educación estadística

El trabajo con propuestas de esta naturaleza supone problemas de gestión en el aula, promueve el trabajo en grupos y la perspectiva socio cultural en el aula. Supone por tanto, la interacción entre el trabajo individual del alumno y el cooperativo, orientado hacia el aprendizaje comprensivo de conceptos, de procedimientos de búsqueda y recogida de información, de reducción y procesamiento de datos, de representación gráfica y tabulares; en definitiva, de la necesaria ejercitación de procedimientos y técnicas de cálculo y la mejora en las capacidades de análisis, argumentación, formulación de conjeturas y creatividad de sus alumnos y, la adecuada organización de la información para su comunicación (Lipsony Kokonis, 2005).

Desde diferentes estudios realizados por nuestro grupos de investigación, hemos obtenido claras evidencias de investigación acerca de la pobre comprensión de estos conocimientos que disponen tanto los profesores en formación (Azcárate, 1996; Moreno, Cardeñoso y González-García, 2014; 2014a), como en activo (Cardeñoso, 2001). Esta dificultad proviene, como ya hemos indicado, tanto de una formación insuficiente para enseñar estos conceptos, la mayoría de las veces carecen de *referentes prácticos* de carácter innovador que apoyen propuestas de cambio, como del apropia visión tradicional de las matemáticas (Serradó; Azcárate y Cardeñoso, 2005; 2006; Meletiou-Mavrotheris, 2007a; Azcárate y Cardeñoso, 2011).

Por coherencia entre lo que se propugna para las aulas de educación obligatoria, las estrategias metodológicas usadas en los proceso de formación deben responder a los mismos principios. Por ello, la evolución del conocimiento profesional en relación con la educación estadística implica, poner al profesor en situación de cuestionar sus ideas, probar nuevas estrategias y evaluarlas. Desde nuestra perspectiva, todo proceso formativo implica la reflexión intencionada sobre el conocimiento profesional del docente, desde tres perspectivas (Azcárate, 1999):

- *Epistemológica:* el dominio y comprensión conceptual y didáctica del contenido.
- *Cognitiva:* la comprensión del aprendizaje estadístico y formas de promoverlo.
- *Práctica:* el desarrollo de las competencias y estrategias de intervención en las aulas.

En esta línea, el proceso formativo diseñado en el proyecto *EarlyStatistics*, se enmarcaba en torno a la reflexión sobre estos principios que se concretó en el estudio de los tres grandes ámbitos de conocimientos:

- *Relacionados con el contenido*: Análisis la naturaleza del conocimiento estadístico; Análisis y reflexión sobre los conceptos fundamentales en la probabilidad y la estadística; Análisis didáctico y problemas históricos; Análisis de planes de estudios; Análisis de los criterios de selección y organización de los conocimiento para los alumnos, y selección de herramientas para trabajar con los alumnos.
- *Relacionados con el aprendizaje de la estadística*: Análisis de cómo los alumnos aprenden estadísticas y probabilidad; Análisis y reflexión sobre la literatura de la investigación; Análisis sobre el papel de herramientas tecnológicas en el aprendizaje del alumno; Análisis de la organización del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- *Relacionados con los procesos de intervención*: Diseño personal del plan de intervención en su aula; Desarrollo en el aula; Evaluación y reflexión del proceso.

Para responder a los diferentes principios señalados, se elaboró un compleja estructura metodológica que ayudara al profesor a explicitar y explicar sus propias ideas, dar sentido a las nuevas y, establecer conexiones significativas y pertinentes entre ellas. Como podemos observar en el Gráfico 1, que representa la estructura del programa formativo, se organizó en diferentes ciclos que reflejan a su vez una composición evolutiva determinada por los problemas prácticos que se han de abordar en relación con los tres referentes indicados: “El conocimiento "de" y "sobre" la estadística”; “El conocimiento sobre el aprendizaje y al enseñanza del conocimiento estadístico”; “El conocimiento práctico profesional”.

Una parte muy importante del proceso formativo es la puesta en práctica en sus aulas de algunos de los escenarios diseñados y la posterior evaluación de su implementación, que permitió, en última instancia, reflexionar sobre la potencialidad del cambio de estrategias.

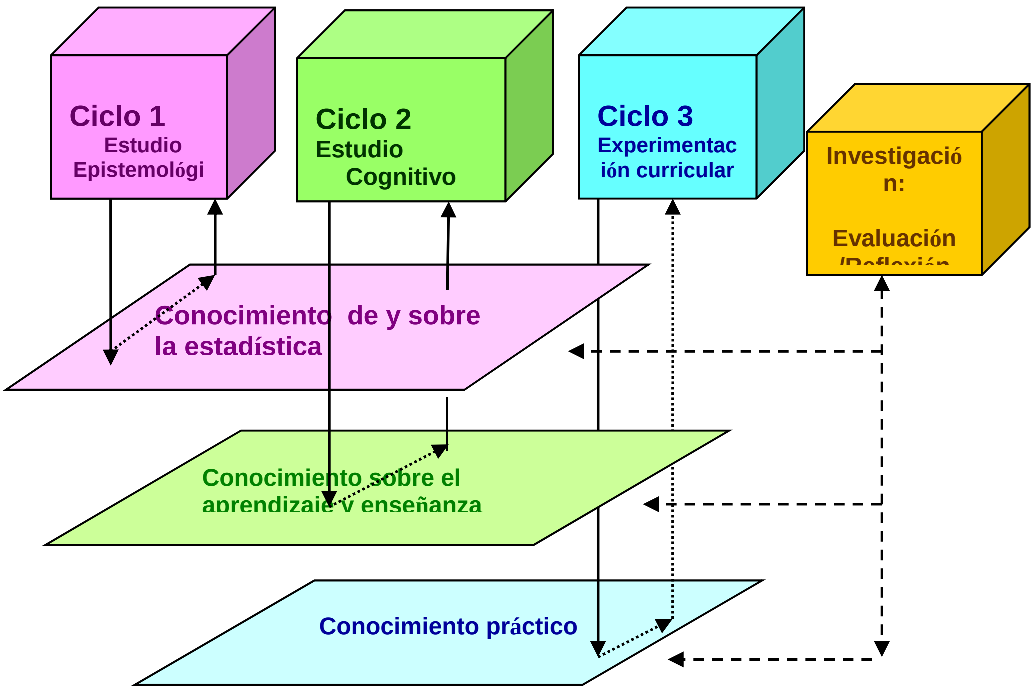


Gráfico 1.- Estructura del programa formativo

En cada ciclo formativo-reflexivo, a través de la secuencia reflejada en el Gráfico 2, se va introduciendo al profesor en procesos de análisis y reflexión sobre sus ideas y sus prácticas.

Fruto de este plan de formación, donde cada profesor seleccionaba uno de los escenarios diseñados previamente por el equipo de formadores/investigadores del proyecto Comenius y los adecua a sus circunstancias concretas de su enseñanza. Los escenarios de aprendizaje, como propuestas orientadas a la enseñanza y aprendizaje del conocimiento estadístico, no están organizados según un criterio disciplinar, sino que están organizados según los diferentes interrogantes, situaciones, problemas, y actividades vinculadas a problemas de interés para los estudiantes, lo cual, ya en sí mismo y es un reto para el profesorado.

La reflexión sobre el uso de escenarios socio-contextualizados y su incidencia en el aprendizaje de sus alumnos, favorece que los profesores sean conscientes del cambio que ello implica en su papel en el aula. Los profesores consideran que estas nuevas perspectivas de actuación en el aula necesitan de un conocimiento profesional que integran otras competencias profesionales. Estas estrategias formativas ayudan a los profesores y les motivará para intentar hacer el difícil salto de actividades de desarrollo profesional a práctica de aula (Huberman, 2001).

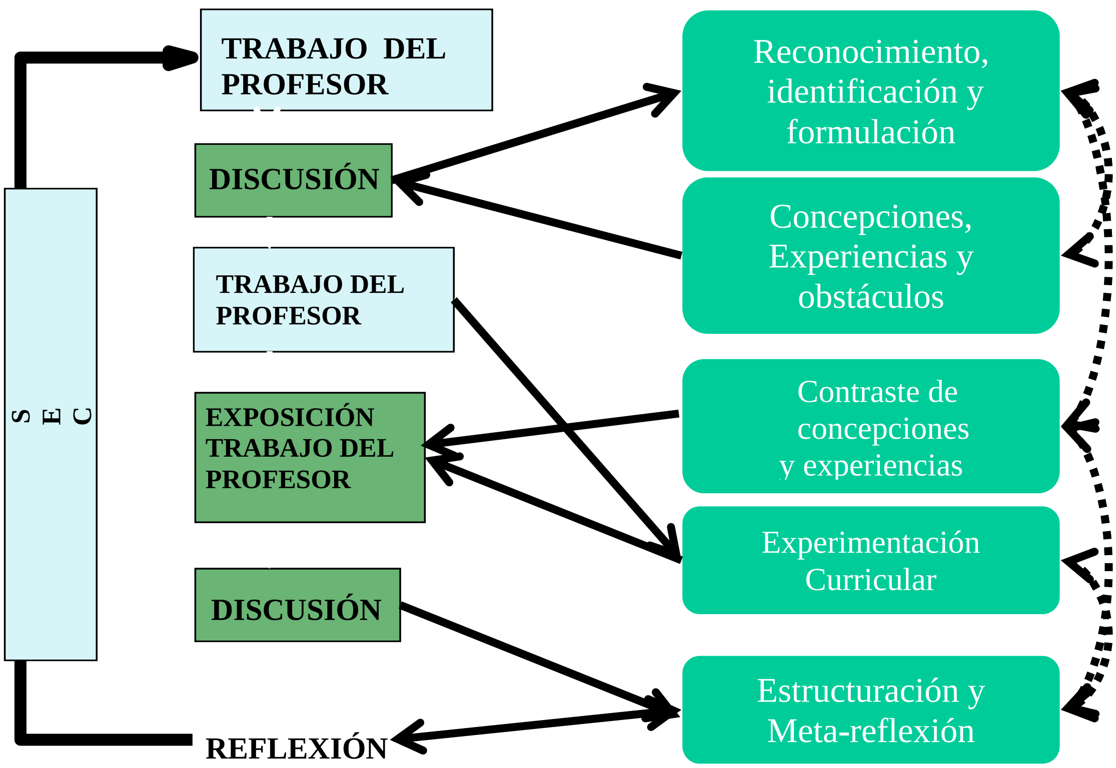


Gráfico 2.- Secuencia Formativa

3. Los escenarios de aprendizaje. Características e implementación

La propuesta educativa se concreta en la "*Realización de un estudio estadístico*" que parte de diferentes problemáticas o situaciones y, que cada profesor, deberá adaptar a su realidad de aula y sus estudiantes e intereses. Realizar el estudio de los diferentes escenarios permite facilitar una "visón general" de la estadística, reflejando el paso por las cuatro etapas del proceso de resolución de problemas en estadística: plantear la cuestión, la recogida de datos, el análisis de datos y la interpretación de los resultados. Ello permite profundizar en el conocimiento estadístico y sirve como referente para nuevas situaciones de aprendizaje.

A continuación en la Tabla 1 se recogen los diferentes escenarios diseñados, los conceptos que estaban implicados en su desarrollo y los procedimientos que se podían poner en juego, para su trabajo en el aula.

Tabla 1. Escenarios, conceptos y problemáticas asociadas

ESCENARIO	CONCEPTOS ESTADÍSTICOS	SUBPROBLEMAS Y PROCEDIMIENTOS A PONER EN JUEGO EN SU DESARROLLO
¿Nos conocemos? ¿Qué saben mis compañeros de mi?	Variable Frecuencia Diagramas	Presentación del ejemplo Recolección de los datos. Análisis y presentación de los resultados a los compañeros.
¿Cuánto pesa tu mochila?	Variable Población Muestra Recogida de datos Representación	Investigación antes de recoger información sobre el peso adecuado de una mochila. ¿Cuál será la muestra?¿Cómo podemos recoger datos? ¿Qué clase de tablas podemos construir? Presentar algunas preguntas para interpretar los datos obtenidos: ¿Qué libro es el más transportado? ¿Qué día llevas más libros?
¿Vemos mucha Televisión?	Variable Frecuencia Media Gráficos	Presentación. Recolección de datos individual en casa. Tratamiento de los datos. ¿Qué tipo de programas ves?¿En qué momentos? ¿Cómo puedes tabular la información? ¿Cómo analizar los datos: media, y diagramas ¿Cómo los podemos representar? ¿Qué clase de gráficos podemos usar? Presentación de resultados. Interpretación: ¿Cuál es el programa más visto cada día de la semana? ¿Cuántas horas pasan los estudiantes mirando la tv? ¿Cuál es la diferencia entre la moda y la media, qué debemos hacer con los valores extremos? ¿Cómo podemos extrapolar datos a toda la escuela?
¿Cuáles son los hábitos alimenticios de los alumnos de nuestra escuela?	Población Muestra Encuestas Frecuencia absoluta, acumulada y relativa. Probabilidad	Introducción a la temática a investigar Exploración inicial en grupo sobre los problemas alimenticios. Construcción de un cuestionario: ¿Qué aspectos hay relacionados con los hábitos alimenticios? ¿Cómo se debe elaborar una encuesta? ¿A quién se debe preguntar? ¿Cuánto dinero necesitaremos? ¿Cómo vamos a recoger los datos? Análisis de los datos. ¿Cómo los analizaremos? Reflexión sobre los datos obtenidos

¿Cómo pasan el tiempo libre tus compañeros?	Muestra Población Encuestas Gráficos	Introducción a la temática a investigar ¿Qué aspectos hay relacionados con los hábitos de ocio? ¿Cómo se debe elaborar una encuesta? ¿A quién se debe preguntar? ¿Cuánto dinero necesitaremos? ¿Cómo vamos a recoger los datos? ¿Cómo los analizaremos? ¿Cómo los representamos e interpretamos?
¿Puedo adivinar qué idioma está hablando mi amigo con sólo contar las vocales?	Fenómeno Población Variables y muestras aleatorias Frecuencia absoluta y relativa Poligonal Probabilidad	Actividad de motivación para el análisis de las concepciones sobre el carácter determinantico de las muestras. Cálculo, análisis y representación de las tendencias de aparición de cada vocal. Análisis del significado de estabilidad de las frecuencias relativas, y probabilidad. Autoevaluación de la actividad.

Antes de seleccionar los escenarios es necesario que el profesor realice un análisis detallado de los escenarios diseñados y decida, cuál es el más adecuado para su aula, en función de sus finalidades, de sus alumnos y del momento educativo dónde se encuentre. Ello le permite poder orientar los debates y decisiones de sus alumnos a la hora de decidir qué problemas van abordar y cómo los van a resolver y comunicar.

Por ello es importante, la reflexión profesional, sobre el propio escenario y las informaciones que aporta para la educación estadística de los estudiantes, para lo que es necesario analizar posibles cuestiones relacionadas con los diferentes elementos que condicionan y caracterizan el proceso de enseñanza y aprendizaje, como son los contenidos, las ideas de los estudiantes sobre los diversos conocimientos implicados en el desarrollo de un determinado escenario, y la propia propuesta de desarrollo del escenario, caracterizadas por el tipo de actividades, las estrategias y el proceso de regulación que demanda.

En relación con cada uno de ellos y de sus interacciones, se plantean múltiples aspectos sobre los que el profesor debe analizar y reflexionar sobre las problemáticas asociadas a su puesta en juego en el aula. En las siguientes líneas indicamos algunos de dichos interrogantes:

En relación con los *contenidos propuestos* en el escenario

- ¿Qué conocimientos están implicados?
- ¿Cómo se han organizado y presentado?
- ¿Qué relaciones hay entre ellos?
- ¿Qué fuentes de información se han utilizado para su selección?
- ¿Cuáles han sido los criterios de selección?
- ¿Con qué grado de profundidad y extensión se han formulado?
- ¿Qué otras situaciones del entorno del alumno están relacionadas con estos conocimientos?
- Etc.

A la hora de seleccionar un escenario es necesario disponer de una imagen de los diferentes conocimientos estadísticos sobre los que queremos trabajar y, la relación entre ellos, para seleccionar y adaptar el desarrollo del escenario, al nivel educativo en el que el profesor está trabajando, factor determinante para su desarrollo. Por ejemplo, una imagen global de los conocimientos implicados en un estudio estadístico están reflejados en el Gráfico 3.

En relación con *las ideas de los alumnos* sobre los contenidos que se han propuesto en el escenario diseñado,

- ¿Qué dificultades pueden tener los alumnos en su realización?
- ¿Cómo saber lo que los alumnos saben sobre estos tópicos matemáticos?
- ¿Son las ideas de los alumnos serán coherentes, arbitrarias, consistentes, etc.?
- ¿Cómo y cuándo detectar las ideas de partida de los alumnos?
- ¿Cómo pueden ser utilizadas en el aula?
- Etc.

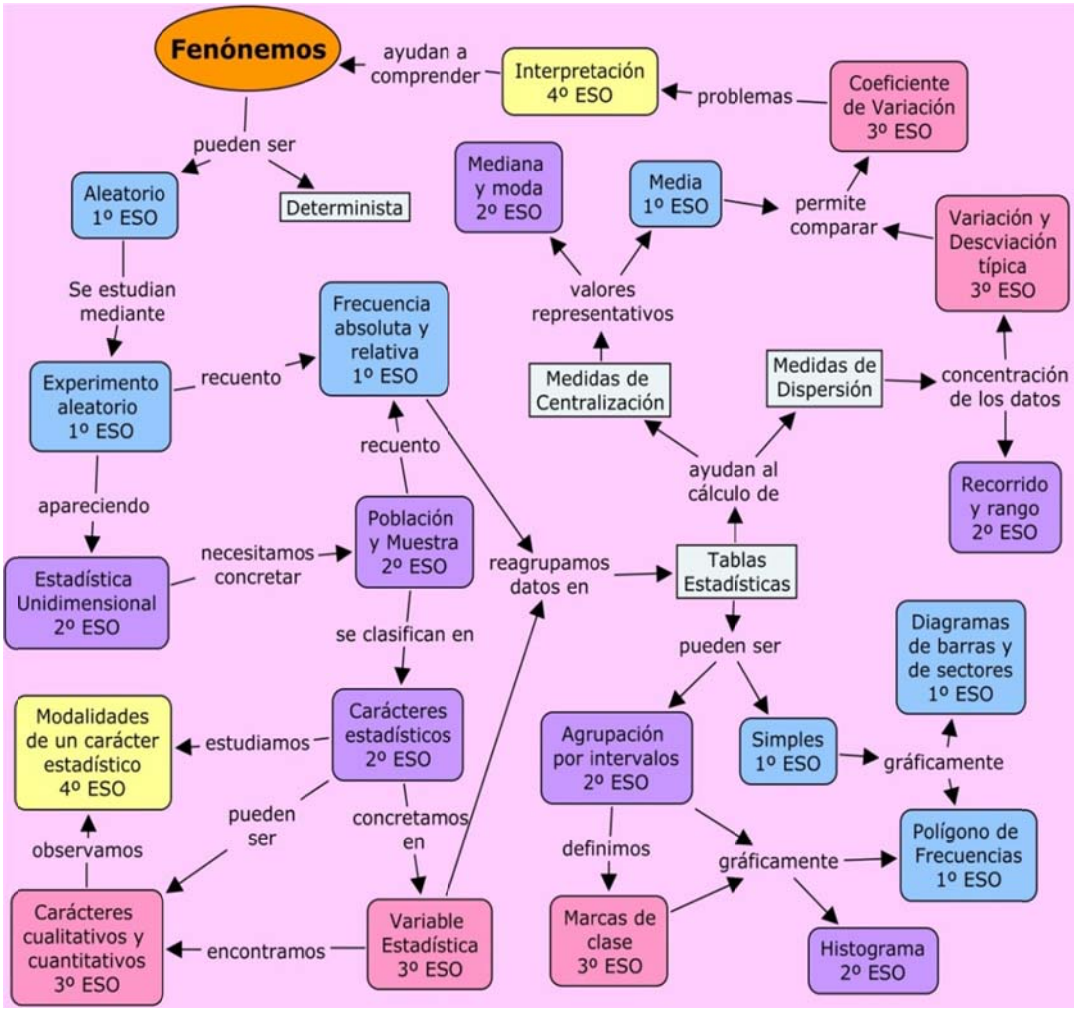


Gráfico 3.- Conocimientos estadísticos (Extraído de Vega, 2012)

En relación con *la propuesta de desarrollo del escenario,* reflexionar sobre

- ¿Qué tipo de actividades y tareas se han propuesto?
- ¿Cuál es el eje que orienta la secuencia de actividades?
- ¿Hay diferentes momentos tiene dicha secuencia?
- ¿Qué recursos se proponen utilizar en su desarrollo?
- ¿Qué tipo de tareas se le demandan al estudiante?
- ¿Cómo se incentiva su implicación?

- ¿Cómo se puede organizar el espacio y el tiempo?
- ¿Qué procedimientos, instrumentos utiliza para hacer un seguimiento del aprendizaje?
- ¿Qué criterios utiliza para regular y evaluar el proceso de E/A?
- Etc.

Con estos datos es posible comenzar la preparación de la experiencia innovadora de enseñanza que se ha de implementar en el aula con los estudiantes. Para su puesta en juego en el aula eficazmente, es muy importante que todos los involucrados o interesados tengan claridad sobre los objetivos, para que el escenarios se planee y complete de manera efectiva.

Tanto el docente, como el estudiante, cada uno a su nivel, deben conocer y hacer una planificación que explique los elementos esenciales del desarrollo del escenario y las expectativas respecto a este, que debe contener elementos como los siguientes: *Situación o problema; Descripción y propósito del escenario; Especificaciones de las actividades; Listado de los participantes en el escenario y de los roles que se les asignaron; Evaluación.*

Para tomar las decisiones adecuadas ante cada uno de los pasos a dar, el profesor ha de ir orientando las reflexiones de los estudiantes, planteando preguntas y cuestionando sus decisiones, una vez seleccionada la temática y el problema a abordar mediante el estudio estadístico.

Un aspecto muy importante es el seguimiento del proceso educativo que, para un proceso de esta naturaleza un elemento significativo es el portafolio. Dicho instrumento puede ser usado para comprender el proceso de aprendizaje, devolviendo al aprendiz cuestiones para mejorar su aportación. También le vale al docente para examinar los productos del aprendizaje al final del proceso, puesto que así sirve, a su vez, como instrumento básico de evaluación (Cardeñoso, 2006). Según Kelly y Lesh (2000), este sistema global de valoración, es una estrategia idónea de seguimiento evaluativo en la educación matemática de calidad.

4. Ejemplificaciones de desarrollo de un escenario

Aquí hacemos una breve ejemplificación de algunos de los aspectos fundamentales implicados en el desarrollo de cualquier escenario a través de la presentación de uno de los escenarios socio-contextualizados diseñados. En el diseño se van planteando las preguntas y actividades que pueden incitar la reflexión y el aprendizaje de algunas de las nociones implicadas en un estudio estadístico, que es donde se centra este escenario y sobre las que el estudiante debe trabajar. El escenario seleccionado es: **¿Cuánto pesa tu mochila escolar?**

4.1. Comienzo del estudio. Primeras decisiones.

Este escenario se orienta al estudio de algunas nociones estadísticas como Variable, Población, Muestra, Recogida de datos y Representación. La idea es que a través de dar respuestas a las cuestiones plantadas el estudiantes vaya integrando y dando sentido al conocimiento estadístico. El papel del profesor, una vez seleccionado y adaptado el escenario a su realidad, es ir orientando al estudiante en la búsqueda de respuesta y en su formalización.

Introducción de la situación

Muchos estudiantes tienen problemas de espalda. Los médicos creen que estos problemas son causados por gran peso de la mochila que suelen llevar los estudiantes. A veces también influye la forma en que llevan sus mochilas los estudiantes. En este escenario, a partir del interrogante planteado, los estudiantes recopilan datos y decidirán sobre el peso de sus mochilas escolares y su posible influencia. A lo largo del proceso de estudio se ponen en funcionamiento una gran cantidad de conocimientos estocásticos, la toma de decisiones permitirá al docente ir proponiendo actividades y presentando interrogantes que orienten a los alumnos y les incite a cuestionar sus decisiones.

Piensa sobre qué información esperas encontrar

- ¿Cuántos kilogramos crees que pesará en promedio las mochilas de los estudiantes?
- ¿Qué estudiantes crees que suelen llevar mochilas más pesadas? Explica tu respuesta.
- ¿Crees que los niños llevan mochilas más pesadas que las niñas?

Investigación antes de la recogida de datos

- ¿Cuánto puede ser de pesada una mochila para no dañarte?
- ¿Crees que algunos estudiantes pueden llevar con seguridad mochilas más pesadas que otros estudiantes?
- Los médicos recomiendan que una mochila de un estudiante no debe pesar más de un 15% de su peso corporal.
  - ¿Cuál es el mayor peso que puede tener la mochila para un estudiante que pesa 30 kilos?
  - ¿Cuál es el mayor peso que puede tener la mochila para un estudiante que pesa 40 kilos?

¿A quién puedes o debes preguntar?¿Cuál será tu muestra?

- ¿Vas a preguntar a todos los alumnos de su escuela?
- Decidir que estudiantes serán tu muestra.
- Tu muestra ha de ser representativa. ¿Qué significa?

Este es uno de los conceptos de mayor dificultad de integrar, sobre todo su implicación en los resultados y en su interpretación. Por ejemplo, en este caso en función de la investigación planteada, se puede analizar cómo la población y a muestra son diferentes pero están relacionadas. Para ello se puede proponer a los estudiantes reflexionar y cuestionar la idea de población, matizar el significado del concepto de población en Estadística para poder decidir cuál es la población en este estudio y se pueden proponer realizar actividades como:

- Buscad en libros o en internet el significado de población en Estadística.
- Analiza cómo deberíamos reformular la pregunta de la investigación para que la población de estudio fuesen todos los adolescentes de nuestro país, los adolescentes de Europa.
- Buscad en periódicos o revistas (en papel o digitales) la presentación de los resultados de una investigación estadística y describid cuál es la población de estudio.
- ¿Os informa el periódico o la revista sobre la cantidad de personas u objetos estudiados a las que se ha preguntado para poder sacar las conclusiones sobre la investigación o estudio estadístico?

En la misma línea se pueden plantear diferentes cuestiones que promuevan la reflexión sobre el significado de la muestra que se selecciona en todo estudio estadístico. Por ejemplo, si se considera como población los estudiantes del centro educativo, se tendrá que decidir a quién preguntar y reflexionar sobre algunos aspectos relacionados con los criterios que nos darían una mayor confianza a la hora de establecer los resultados de la encuesta que se ha planteado.

- Plantear propuestas sobre cómo se pueden elegir a los sujetos de la muestra.
  - Sólo le preguntamos a los alumnos que vienen un día al colegio.
  - Sólo le preguntamos a los alumnos más pequeños.
  - Sólo le preguntamos a las chicas.

- Sólo le preguntamos a los 100 primeros alumnos que llegan al colegio.

- Buscar información en libros o internet sobre los muestreos estadísticos:
    - ¿Qué tipos de muestreos existen?
    - ¿Qué diferencias existen sobre cada tipo de muestreo?
    - ¿Qué dificultades existen para poder llevar a cabo cada uno de los tipos de muestreo?
- Exponer esta información en el aula y decidid cuál va a ser la estrategia para configurar la muestra del estudio.

4.2. Proceso de obtención datos. Elaboración de un cuestionario

El siguiente paso es decidir qué datos se han de obtener y cómo. Los siguientes interrogantes y actividades van dirigidos a obtener respuestas a dichas cuestiones.

¿Cómo va a recoger sus datos?

- ¿Qué tipo de cuestionario necesitas?(preguntas abiertas/cerradas)
- ¿Dónde recogerás los datos?
- ¿Cuándo recabarás los datos?
- ¿Cuál será el costo de este estudio?
- ¿Cómo vas a obtener ese dinero?
- ¿Necesitas obtener un permiso para recoger estos datos?

Un proceso decisivo para la realización de cualquier encuesta y toma de datos es la elaboración del cuestionario La elaboración del mismo no siempre es fácil, ya que se han de tener en consideración diferentes aspectos, que pasamos a analizar:

La primera decisión es si vamos a considerar preguntas cerradas o abiertas. La pregunta cerrada consiste en proporcionar al sujeto observado una serie de opciones para que escoja una como respuesta. La pregunta abierta consiste en dejar totalmente libre al sujeto observado para expresarse, según convenga. Se proponen una serie de cuestiones que permitan reflexionar al estudiante sobre los tipos de formulaciones posibles y los tipos de datos que obtenemos en cada caso:

- Piensa en una pregunta cerrada y sus posibles respuestas.
- Piensa en una pregunta abierta y sus posibles respuestas.
- Reflexiona sobre las dificultades al responder las preguntas abiertas y cerradas.
- Reflexiona sobre las dificultades al analizar las preguntas abiertas y cerradas.
- Analiza la adecuación de las preguntas a tu problema de estudio.

Este análisis, a su vez requiere de la reflexión sobre diferentes aspectos y plantearse diversa cuestiones para tomar decisiones como:

Decisiones sobre el contenido de las preguntas:

- ¿Es necesaria la pregunta? ¿Será útil?
- ¿Se necesitan varias preguntas sobre esta cuestión?
- ¿Cuentan los estudiantes con la información necesaria para contestar la pregunta?
- ¿Necesita la pregunta ser más concreta, específica e íntimamente ligada con la experiencia personal del informante?
- ¿Está el contenido de la pregunta libre de concreciones falsas?
- ¿Expresan las preguntas datos generales o específicos?
- ¿Darán los informantes la información que se les pide? ¿Es muy personal?
- Etc.

Decisiones sobre la redacción de las preguntas:

- ¿Se puede malinterpretar la pregunta?¿Es clara?
- ¿Es engañosa la pregunta?
- ¿Está cargada emocionalmente o inclinada hacia un tipo particular de contestación?
- ¿Produciría mejores resultados una redacción más personalizada de la pregunta?
- ¿Puede preguntarse mejor la cuestión, de manera más directa o más indirecta?
- Etc.

Decisiones sobre la forma de respuesta de la pregunta:

- ¿Puede contestarse mejor la pregunta con un impreso que exija la contestación por una marca (o contestación corta de una o dos palabras, o un número), de respuesta libre o por una marca con aclaraciones?
- Si se usa la contestación por una marca, ¿cuál es el mejor tipo de cuestión: dos opciones Si/NO; de elección múltiple; en escala?
- Si se usa una lista de comprobación, ¿Es de una longitud razonable? ¿Es la redacción de los ítems imparcial y equilibrada?
- ¿Es fácil, definida, uniforme y adecuada para la finalidad, la forma de respuesta?
- Etc.

Decisiones sobre la ubicación de la pregunta en la secuencia:

- ¿Puede verse influida por el contenido de las cuestiones precedentes la contestación a la pregunta?
- ¿Está dirigida la pregunta en una forma natural? ¿Está en correcto orden psicológico?
- ¿Aparece la pregunta demasiado pronto o demasiado tarde desde el punto de vista de despertar interés y recibir la atención suficiente?
- Etc.

¿Cuál va a ser el coste de llevar a cabo la encuesta?

No es un aspecto menor que hay que analizar y sobre el que hay que tomar decisiones. Si es una encuesta impresa habrá que hacer el cálculo en función de la muestra seleccionada.

- ¿Cuántas fotocopias necesitamos?
- ¿Cuánto cuesta hacer cada una de las fotocopias?
- ¿Cuánto dinero vamos a gastar en fotocopias para los alumnos de la muestra?
- ¿Cómo vamos a conseguir este dinero?
- Etc.

4.3. Tratamiento de datos y Presentación de resultados

Es necesario plantearse qué otros aspectos hay que considerar hasta la presentación de resultados. Ya hemos decidido a quién preguntar, pero hay que considerar otras cuestiones prácticas, para el desarrollo de la encuesta, su tabulación, procesamiento, análisis y la presentación de los resultados. Habrá que prever permisos, proveer de procedimientos, pensar condiciones a “imponer” tanto al trabajo posterior de los alumnos, como a la situación y soporte de la comunicación de resultados.

¿Cuál va a ser el proceso de recolección de datos?

Para pasar la encuesta a la nuestra seleccionada se ha de organizar el proceso de recolección de datos. Hay cuestiones que debatir y acordar como:

- ¿Es necesario pasar la encuesta el mismo día? ¿Y a la misma hora?
- ¿Cuáles serán los días y horas adecuados?
- ¿Debemos explicarles a los alumnos la finalidad de la encuesta?
- ¿Debemos explicarles a los alumnos la forma de responder la encuesta?
- ¿Es necesario que primero la respondamos nosotros para saber qué dudas surgen?
- ¿Quién le pide permiso al Director del colegio para pasar la encuesta?
- ¿Quién le pide permiso a los profesores para pasar la encuesta a los alumnos?
- Etc.

Una vez obtenidos todos los datos hay que decidir qué hacer con ellos, cómo se agrupan, cómo se presentan, etc. Es claro que la forma de agruparlos dependerá de la muestra y de la información que queramos obtener, y por tanto ha de ser objeto de debate.

¿Cómo agrupar los datos?

- ¿Qué tipo de información queréis obtener y como la clasificaríais?
- ¿Nos interesan datos como las clases, edad, sexo?
- ¿Qué otro criterios podríamos utilizar?
- Etc.

¿Cómo presentar la información y las conclusiones?

Una vez que tenemos los datos agrupados y organizados hemos de decidir como presentarlos, a través de tablas, de gráficos ¿cuáles son los más adecuados?, una buena presentación nos ayudará a tomar decisiones y llegar conclusiones.

¿A quién se los presentamos?

Será interesante, para la autoestima y la mejora de los resultados, que estos últimos pasos sean lo más públicos posibles, como al centro, o a otros cursos, o a las familias o hasta haciendo un concurso de Posters “científicos”. Será interesante, antes de ello, decidir los soportes legitimados, en consonancia con el esfuerzo, el tiempo, la edad y el contexto de comunicación elegidos.

En definitiva, a través de este proceso hemos puesto en juego un gran número de nociones y procedimientos estadístico vinculados a un contexto que le han dado sentido al estudiante y una toma de decisiones que puede promover adecuadamente tanto el desarrollo profesional del docente como la formación estadística de los estudiantes.

5. Análisis y evaluación del proceso educativo

Una vez que el proceso educativo se ha desarrollado y se ha completado la implementación del escenario, de cara al profesor y a su propio desarrollo profesional, es necesario realizar un proceso de análisis sobre lo ocurrido que permita detectar la potencialidad del proceso y las debilidades que se han podido presentar. Dos aspectos fundamentales para la evaluación de la experiencia de enseñanza es analizar su relación con el propio aprendizaje de los con el propio escenario y su desarrollo, así:

En relación con el aprendizaje de los alumnos

- ¿Ha habido una conexión entre las propuestas de la actividad y los intereses de los estudiantes?
- ¿Qué actividades han causado los mayores dificultades conceptuales para los estudiantes durante su implementación?
- ¿Crees que los conceptos estadísticos introducidos durante la intervención eran demasiado difíciles para los estudiantes? ¿Cómo podemos gestionar para que sean más fáciles y más accesibles a ellos?

En relación con la evaluación de la experimentación del escenario

Esta evaluación del proceso es de vital importancia de cara al desarrollo y mejora del diseño del escenario. Para dicha evaluación es necesario centrarse tanto en los aspectos relacionados con el conocimiento, no el proceso de aprendizaje y con el proceso de enseñanza. En cada caso el docente deberá plantearse una serie de interrogantes que le pueden permitir configurar una imagen global del proceso y de los puntos negativos y positivos relacionados con esta forma de presentar los conocimientos estadísticos en el aula (Azcárate y Cardeñoso, 2011)

Sobre aspectos epistemológicos.

Con respecto al conocimiento, nos interesa reflexionar sobre su selección y organización y sobre si las formas de presentación han permitido y facilitado la implicación de los alumnos en su proceso de aprendizaje

- ¿Ha sido apropiada la formulación y la presentación de los contenidos, en función de los alumnos?
- ¿Hemos tenido alumnos con diferentes niveles de comprensión del conocimiento? ¿Cómo hemos trabajado con ellos?
- ¿Este conocimiento ha sido difícil para los alumnos? ¿Cómo podemos hacerlo más fácil y accesible? ¿Qué nivel de dificultad es adecuada para el alumno de este nivel?
- ¿Qué aspectos del conocimiento me han resultado con mayor dificultad para su tratamiento en el aula?

Sobre los aspectos de aprendizaje.

Otro de los aspectos básicos a analizar son los relacionados con el aprendizaje de los alumnos, la conexión con sus intereses y la interpretación de sus producciones, para conseguir una mayor implicación en su aprendizaje y un mayor interés por el conocimiento sobre el que están trabajando:

- ¿Qué protagonismo han tenido los alumnos en el desarrollo de la propuesta?
- ¿Hemos facilitado que a los niños expresen sus opiniones y hallazgos?
- ¿Han conectado las propuestas de actividad con los intereses de los alumnos?
- ¿Qué actividades hemos detectado como de mayor dificultad de comprensión o realización?
- ¿Qué dificultades hemos tenido para interpretar las ideas y producciones de los alumnos?

Sobre los aspectos de la enseñanza.

El proceso de gestión del aula es un aspecto fundamental y que mayor influencia tiene en el aprendizaje de los alumnos. Cada una de nuestras decisiones, gestos, palabras, influyen directamente sobre la naturaleza de la actividad que el alumno realiza y, por tanto, sobre su aprendizaje. En esta línea son múltiples los aspectos sobre los que es interesante reflexionar, aspectos como:

- ¿Cuál ha sido la lógica de la secuencia de actividades? ¿Se han implicado los alumnos en su resolución?
- ¿Cómo hemos organizado el espacio y el tiempo? ¿Qué tipo de interacciones ha promovido en el desarrollo de la actividad? ¿ha interaccionado con dicho desarrollo?
- ¿Qué clima de aula hemos promovido? ¿Cuál hemos percibido? ¿Qué actuación o actuaciones nuestras lo han provocado?
- ¿Cómo hemos dirigido la clase? ¿Hemos promovido la interacción entre los alumno?
- ¿Qué tipo de discurso se ha empleado en el aula? ¿Con qué tono de voz? ¿Cuándo deberíamos haber estado callados?
- ¿Qué hemos mirado, qué deberíamos haber mirado?
- ¿Crees que ha influido el gesto con el que nos hemos dirigido a los alumnos? ¿Cómo?
- ¿Qué dificultades han encontrado en el desarrollo de la propuesta?
- ¿Qué dificultades has encontrado a la hora de evaluar el proceso? (Evaluación entendida en diferentes sentidos: valoración, cuantificación, y regulación del producto y del proceso)
- ¿Qué cambiarías la realizarla de nuevo?

En definitiva, ninguna innovación lo es realmente si no se evalúa, es necesario analizar su desarrollo, tanto en lo positivo como en relación con las problemáticas que han surgido. Esta es la única forma que una innovación se incorpore a la docencia normal, e implique una evolución en el conocimiento y desarrollo profesional del docente. De hecho este último ciclo del proceso formativo es el más potente y del mayor incidencia en el profesor y en el aula.

6. Conclusiones

Mantener a los estudiantes comprometidos y motivados constituye un gran reto incluso para los docentes más experimentados. Aunque es bastante difícil dar una receta que sirva para todos, la investigación evidencia que existen prácticas que estimulan una mayor participación de los estudiantes. Estas prácticas implican un trabajo más retador y complejo; utilizar un enfoque interdisciplinario y estimular el trabajo cooperativo. El aprendizaje en escenarios incorpora estos principios.

Los procesos formativos y educativos organizados a través del uso de estos escenarios en escuelas de Grecia, Chipre, España permite obtener conclusiones sobre la organización de los contenidos, el aprendizaje de los alumnos y el papel del profesor (Melitou, et al, 2006). Con relación al aprendizaje de los alumnos, este tipo de trabajo favorece el aprendizaje significativo y relevante de los conocimientos y el desarrollo de su competencia estadística al proponer una actividad auténtica desde una propuesta de cognición situada que facilita la construcción del conocimiento estadístico desde actividades concretas vinculadas a situaciones reales (Vega, Cardeñoso y Azcárate, 2010). Y, en relación con el profesor, como mediador del proceso de enseñanza y aprendizaje, el proceso el permite adaptarse a las necesidades de cada alumno, facilitar la interacción entre alumnos y favorecer la formulación de un conocimiento estadístico útil, que no se quede en la mera actividad de cálculo.

La enseñanza basada en escenarios es diferente: Es una estrategia educativa integral (holística), en lugar de ser un complemento. Este concepto se vuelve todavía más valioso en la sociedad actual en la que los maestros trabajan con grupos de niños que tienen diferentes estilos de aprendizaje, antecedentes culturales y niveles de habilidad. Un enfoque de enseñanza uniforme no ayuda a que todos los estudiantes alcancen estándares altos; mientras que uno basado en escenarios, donde hay un proyecto de acción conjunta, permite construir fortalezas individuales a los estudiantes y explorar sus áreas de interés dentro del marco de un currículo establecido.

Es importante que los estudiantes encuentran los escenarios divertidos, motivadores y retadores para que les inciten a desempeñar en ellos un papel activo tanto en su selección, como en su planificación y desarrollo (Challenge, 2000). Este enfoque motiva a los jóvenes a aprender porque les permite seleccionar temas que les interesan y que son importantes para sus vidas y tiene significativos beneficios para su desarrollo: Aumenta la motivación. Permite la conexión entre el aprendizaje en la escuela y la realidad. Ofrece oportunidades de colaboración para construir conocimiento. Aumenta las habilidades sociales y de comunicación.

En las páginas precedentes, sólo se ha presentado un esquema de uno de los escenarios posibles a desarrollar con los alumnos que faciliten la construcción del conocimiento estadístico y probabilístico desde edades tempranas. El uso de los diferentes escenarios en diversos contexto nos permite obtener conclusiones sobre la organización de los contenidos, el aprendizaje de los alumnos y el papel del profesor.

En definitiva, nos queda constancia, después de que dicho proyecto Comenius, diese lugar a procesos de formación profesional a través de la puesta en juego de escenarios en el aula y efectuar su evaluación (Serrado, Azcárate y Cardeñoso, 2009; Vega, 2013):

Con relación a la organización de los contenidos, la realización de escenarios, proyectos, investigaciones o resolución de problemas basados en situaciones reales o simulados, cercanas a la realidad cotidiana de los estudiantes, permite, en general, un tratamiento complejo, sistémico y helicoidal de los contenidos, que se organizan como redes de conocimiento. Por lo tanto, estos escenarios se pueden retomar en diferentes niveles educativos. Es importante que partan de problemas cercanos a los estudiantes que, además de la construcción del conocimiento estadístico y probabilístico, favorecerán el desarrollo de la competencia social y ciudadana (MEC, 2007).

Referencias

Azcárate, P. (1996). E*studio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad.* Granada: Editorial Comares.

Azcárate, P. (1999). El conocimiento profesional: naturaleza, fuentes organización y desarrollo. *Quadrante* 8, 111-138

Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2011). La educación estadística a través de escenarios: implicaciones para el desarrollo profesional. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática*, 24 (40), 789-810. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291222113009.

Azcárate, P.; Serradó, A.; Cardeñoso, J. M.; Meleitou, M. & Paparistodemou, E. (2008). An on-line professional environment to improve the teaching of statistics. En C. Batanero; G. Burrill; C; Reading; A. Rossman (Eds.). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 y 2008 IASE Round Table Conferenc***e.** Monterrey, Mexico: IASE,

Barab, S. A.; Thomas, M. T. & Merrill, H. (2001).Online Learning: From Information Dissemination to Fostering Collaboration. *Journal of Interactive Learning Research*, 12, (1), 105-143, Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.) (2011). *Estadística en Proyectos*. Granada: Departamento de didáctica de la Matemática. ISBN: 978-84-694-9152-2. Disponible en http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf.

Batanero, C.; Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In: Patricio Royo, J. (Ed.). *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp 125-164). Zaragoza: ICE, 2004

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics currila. En C.Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges forteaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp.77-83), New York: Springer.

Cardeñoso, J.M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de Primaria andaluces sobre la Matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la Aleatoriedad y Probabilidad***.** Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz,

Cardeñoso, J.M. (2006). Evaluación como elemento de instrucción y sus peculiaridades en el aula de matemáticas. En, Chamoso y Durán (Eds) *Enfoques actuales en la didáctica de la Matemática*. Madrid: MEC.

Cardeñoso, J. M. & Serradó, A. (2006).¿Puedo adivinar qué idioma está hablando mi amigo con sólo contar las vocales? Escenarios para el aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad. En Flores, P.; Pozuelo, R. & Roa, R. (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar*. Granada: S.A.E.M. Thales y Universidad de Granada,

Challenge, C. (2000). *Why do project based learning*? .Multimedia Project San Mateo, CA: San Mateo County Office of Education. http://pblmm.k12.ca.us/PBLGuide/WhyPBL.html

GAISE (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education. Report A pre-K-12 curriculum framework*. The American Statistical Association (ASA),. Disponible en: http://www.amstat.org/education/gaise/.

Gal, I. (2005). Democratic access to probability: Issues of probability literacy. En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*.(pp. 39-63). New York: Springer.

Huberman, M. (2001). Networks that alter teaching: Conceptualisations, exchanges and experiments. En Craft, A., Burgess, H. & Soler, J. (Eds.). *Teacher development: Exploring our own practice*. (pp. 141-159). London: Paul Chapman in association with the Open University.

Kelly, A.E. y Lesh, R. (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, N.J. Erlbaum.

Lipson, K. ; Kokonis, S. (2005).The implications of introducing report writing into an introductory statistics subject. Comunicación presentada en *la IASE Satellite Conference Statistics Education and the Communication of Statistics*. Sídney, Australia: IASE, Disponible en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/14/lipson.pdf

MEC (2007). *Real Decreto, 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria*. BOE núm. 5 de 5 de enero de 2007 (677-773).

Meletiou, M. (2007). *Online teacher professional development in statistics education: The European project EARLYSTATISTICS*. (Internal document. Project: 226573-CP-1-2005). http://www.earlystatistics.net;

Meletiou-Mavrotheris, M. (2007a). The Formalist Mathematical Tradition as an Obstacle to Stochastical Reasoning. En K. François, J.P. Van Bendegen (Eds.), *Philosophical Dimensions in Mathematics Education 42*. Belgium: Springer.

Melitou, M; Paparistodemou, E.; Serradó, A.; Azcárate, P.; Cardeñoso, J.; Chadjipantelis, T.& Andreadis, Y. (2006). Early Statistics: Improving Statistics Instruction in European Elementary and Middle Schools through Online Professional Development of Teachers. En Rossman y Chance (Edt.): *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador de Bahia (Brasil): Internacional Association for statistical Education.

Moreno, A.; Cardeñoso, JM y González-García, F (2014). La Aleatoriedad en Profesores de Biología y de Matemáticas en Formación: Análisis y Contraste de Significados , *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias (REurEDC)*, 11(2), 198-215.

Moreno, A.; Cardeñoso, JM y González-García, F (2014a). El Pensamiento Probabilístico de los Profesores de Biología en Formación Probabilistic Thinking of Biology Teachers in Training. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática*, 28 (50) 1415-1442.

Serradó, A., Azcárate, P. & Cardeñoso, J.M. (2005). Randomness in textbooks: the influence of deterministic thinking. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings for the CERME 4: Four Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Barcelona: Ramon Llull University.

Serradó, A., Azcárate, P. & Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En Rossman, A.; Chance, B. (Eds.). *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador de Bahia, (Brasil): Internacional Association for Statistical Education.

Serradó, A.; Azcárate, P. & Cardeñoso, J. M. (2009). Numbers: Zona cero (I): El método científico de investigación estadística. *Revista Eureka sobre la enseñanza y divulgación de las ciencias*, 6 (1), 47-62,

Vega, M. (2012). *El aprendizaje estadístico en la educación secundaria obligatoria a través de una metodología por proyectos. estudio de caso en un aula inclusiva*. Tesis Doctoral inédita. Universidad de Granada.

Vega, M. Cardeñoso, JM y Azcárate, P. (2010). Research In Statistical Education: Competence Level Of Secondary School Pupils. Conference in *ICOST 8,* Ljubljana, Slovenia. Disponible en, http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_C110_VEGA.pdf; 06/2010

Vega, M. Cardeñoso, JM y Azcárate, P. (2011). *Statistics in Life and for Life*. Comunicación presentada en el IASE. Satellite States Education and Outreach, Dublín, Ireland 2011; Disponible en :http://www.conkerstatistics.co.uk/iase/proceedings.php. y Disponible en: http://www.conkerstatistics.co.uk/iase/papers/IASE2011Paper1B.3Vegaetal.pdf; 08/2011

Watson, J.M. (2011). Foundations for improving statistical literacy. *Statistical Journal of the International Association of Official Statistics, 27 (3/4)*, 197-204.

Reflexões em torno do feedback do professor em aulas de Estatística[1]

Carolina Carvalho[1] y Carlos Monteiro[2]

[1]cfcarvalho@ie.ul.pt, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
[2]carlos.monteiro@campus.ul.pt, Universidade Federal de Pernambuco

Resumo

Neste artigo são discutidos aspetos que indicam que o feedback é um importante elemento que pode relacionar os objetivos pedagógicos dos professores com as necessidades de aprendizagem dos estudantes. Para ilustrar a discussão são analisados trechos de diálogos entre professores e duplas de estudantes de estudos que investigaram elementos do ensino de Estatística no âmbito do uso do *Software TinkerPlots*. A discussão motivada por este artigo sugere que o feedback dos professores que ensinam Estatística pode influenciar a relação dos alunos com estes conteúdos curriculares. Os elementos discutidos neste artigo sugerem ainda questões a serem investigadas em pesquisas que abordem de maneira mais específica os processos de feedback em situações de ensino de Estatística.

Palavras-chave: Literacia Estatística, Educação Estatística, Feedback

1. Introdução

Nas décadas de 1980 e 1990, a Estatística foi incluída como tópico do currículo para educação básica em diversos países. Um principal argumento para a implantação da Estatística como conteúdo de ensino desde os primeiros anos foi o fato de que são diversas as situações cotidianas para as quais as pessoas necessitam compreender aspetos da Estatística (Monteiro, 2005). Cada vez mais nas sociedades contemporâneas os cidadãos se relacionam com indicadores numéricos, sendo necessário possuir conhecimentos que os ajudem a compreender os significados desses índices e os processos pelos quais são gerados. Ter conhecimentos de Estatística tornou-se então uma inevitabilidade para exercer uma cidadania crítica, reflexiva e participativa, tanto em decisões individuais como coletivas (Carvalho & Solomon, 2012).

No início do século XXI, diversos países ampliaram o acesso a escolarização básica (Oliveira, 2007). Assim, a Matemática tem sido ensinada para um maior número de pessoas, ocorrendo um processo de massificação do ensino de Matemática enquanto disciplina escolar (Adler, Ball, Krainer, Lin & Novotna, 2005). Uma vez que os conteúdos de Estatística são em geral tópicos do currículo escolar de Matemática, também está havendo um maior acesso a tais conteúdos. Se por um lado, a massificação do ensino de Matemática e Estatística pode apresentar aspetos positivos, pois torna acessíveis conteúdos curriculares para um crescente número de pessoas, por outro lado esse processo demanda níveis de qualidade da formação docente e das condições pedagógicas.

[1]Trabalho realizado no âmbito do Projeto Feedback, Identidade e Trajetórias Escolares apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia de Portugal [PTDC/CPE-PEC/121238/2010] e do Projeto de Pós-Doutoramento do segundo autor apoiado pela CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, do Brasil.

Ainley e Monteiro (2008) discutem aspetos das diferenças entre o que se planea e o que implementa em termos de currículo de Estatística para os primeiros anos de escolaridade. Aqueles autores afirmam que apesar dos responsáveis pela elaboração dos currículos enfatizarem a participação ativa dos estudantes na construção dos conhecimentos, não há uma especificação clara nos documentos de como os professores poderiam desenvolver tal abordagem. Por exemplo, Ainley e Monteiro afirmam que tanto no currículo da Inglaterra como no do Brasil, vigentes no ano de 2008, havia uma tentativa dos elaboradores em enfatizar a resolução de problemas e o processo investigativo como ideias principais subjacentes. No entanto, esses objetivos tão gerais constituem-se em grandes desafios para os professores dos primeiros anos que podem, eles próprios ter pouco conhecimento aprofundado sobre ideias estatísticas, e que, portanto, precisam contar com materiais de apoio mais detalhados (ex. livros didáticos, guias de planeamento, exemplos de atividades e problemas, critérios de avaliação). Em ambos os contextos nacionais mencionados por aqueles autores, a interpretação dos objetivos curriculares em tais materiais de apoio afasta-se das noções mais desafiadoras de resolução de problemas e investigação.

Assim, para além da prescrição de quais conteúdos e de uma indicação geral de como deve ser ensinado conteúdos de Estatística, são necessários encaminhamentos na formação dos professores para que eles estejam conscientes de seu papel no processo (Quintas, Tomás Ferreira & Oliveira, 2013). Martins e Carvalho (2013) enfatizam que as relações entre professores e alunos são particularmente importantes para o processo de aprendizagem. Neste sentido, comportamentos, intervenções ou atitudes dos professores podem constituir-se em feedback sobre como os estudantes estão atuando para alcançar um determinado objetivo em sala de aula (Wiggins, 2012). Esse feedback pode influenciar em muito como estudantes aprendem os conteúdos escolares.

Neste artigo, pretende-se contribuir para um debate sobre o feedback no ensino e na aprendizagem de Estatística e, em particular, quando existe o recurso à tecnologia. Essa discussão tem como objetivo subsidiar investigações futuras que abordem especificamente os processos de feedback dos professores que ensinam Estatística nos primeiros anos de escolaridade. Assim, na seção seguinte, introduziremos alguns dos principais conceitos relacionados com o feedback em contextos de sala de aula. Em seguida, nós apresentaremos alguns exemplos de dois estudos que investigaram a aprendizagem de Estatística. Apesar de que os trechos de diálogos entre os professores investigadores e duplas de alunos não tenham sido originariamente desenvolvidos no âmbito de uma pesquisa sobre o feedback, esses referidos extratos podem exemplificar aspetos relacionados a importância das intervenções docentes no processo de aprendizagem de noções e conceitos estatísticos.

2. Evidências e consequências do feedback na sala de aula

O feedback ocorre após um comportamento, um desempenho ou uma atitude, consistindo na informação recebida sobre o esforço desenvolvido para alcançar um determinado objetivo e concretizar uma determinada tarefa (Wiggins, 2012). Num contexto de sala de aula, e pensando no professor, o feedback é uma consequência da actuação de um aluno e a sua finalidade é fornecer informações relacionadas com a tarefa ou processo de aprendizagem, cujo objetivo é melhorar o desempenho numa tarefa específica e/ou o entendimento de um determinado assunto (Sadler, 1989). De acordo com Hattie (2009), o feedback visa a redução das discrepâncias entre a compreensão e o desempenho atuais, por um lado, e uma intenção ou objetivo de aprendizagem, por outro. O feedback do professor deverá fazer com que o aluno consiga ir mais longe nos seus desempenhos e raciocínios.

Skemp (1978) enfatizava a necessidade de os alunos passarem de conhecimentos instrumentais para conhecimentos relacionais. Para aquele autor, um aluno possui um *conhecimento instrumental* de um conceito quando domina uma colecção isolada de regras e algoritmos aprendidos por meio da repetição e da rotina de tarefas e procedimentos.Sempre que um conhecimento de um aluno é desse tipo, ele tende a resolver um conjunto limitado de situações, em contextos semelhantes. Por oposição, o *conhecimento relacional* é aquele no qual o aluno construiu um esquema do conceito que pode ir actualizando sempre que novas atividades assim lho exijam, ou seja, um conhecimento que vai mobilizando. Concretamente nas aulas de Estatística, o feedback do professor deve permitir ao aluno abandonar progresssivamente esse conhecimento instrumental e apoderar-se de um conhecimento relacional.

Embora o termo feedback faça parte do discurso do professor e esteja presente em muitas situações da sua prática lectiva a literatura refere-o como sendo complexo e nem sempre utilizado de forma eficaz pelo professor (Fonseca et al., in press). Vários autores têm vindo a considerar o feedback como tendo três dimensões: cognitiva, motivacional e afectiva. Por exemplo, Brookhart (2008) descreve o feedback eficaz em termos de duas dimensões: a cognitiva e a motivacional. A dimensão cognitiva tem a ver com o fornecimento de informações necessárias aos alunos para poderem compreender onde se encontram na sua aprendizagem e o que têm de fazer a seguir para melhorar desempenhos. A dimensão motivacional diz respeito ao desenvolvimento nos alunos da "sensação de que têm controlo sobre sua própria aprendizagem" (Brookhart, 2008, p.2).

Há um consenso geral na literatura de que o feedback deve ser dado a um nível que os alunos o possam compreender (Orsmond, Merry, & Reiling, 2005), e será mais eficaz na promoção da aprendizagem se for fornecido num clima de sala de aula onde a resposta, mesmo quando incorreta, é valorizada como uma oportunidade de reflexão ao invés de ser oferecido como um juízo de valor (Weaver, 2006). Para ser eficaz, o feedback deve ainda ser claro, ter um propósito, ser significativo, compatível com o conhecimento prévio dos alunos e fornecer-lhe conexões lógicas que o levem a concentrar-se em maneiras de melhorar o seu desempenho (Hattie, 2009).

A dimensão afetiva do feedback revela-se de particular importância quando a informação fornecida pelo professor se centra na pessoa do aluno e não no desempenho ou compreensão. Esse tipo de feedback centrado nas características pessoais do aluno pode algumas vezes ter resultados indesejáveis, entre eles aumentar o medo do fracasso. De facto, o feedback do professor fornece informação que permite aos alunos fazer interpretações sobre si mesmos, sobre os outros, e sobre a escola. No entanto, se a componente afetiva do feedback for negligenciada por um professor, os alunos poderão minimizar o seu esforço, tentando assim evitar riscos para si próprios na abordagem de tarefas desafiadoras (Black & William, 1998).

Brookhart (2008) descreve algumas estratégias e conteúdo de feedback que podem ser identificáveis na prática letiva e que estão, em parte, sob o controlo do professor. Nomeadamente, aquela autora sugere três tipos de estratégias de feedback, conforme descrita no Quadro 1 (abaixo):

Estratégias de Feedback	
(1) *Timing*	Quando é dado o feedback e com que frequência.
(2) *Modo*	Oral, escrito, ou feedback visual e/ou cinestésico.
(3) *Audiência*	Individual, grupo.

Adaptado de Fonseca et al. (in press)

O *Conteúdo* do feedback pode ser descrito e avaliado em termos das seguintes categorias, conforme o Quadro 2 (abaixo):

Conteúdos de Feedback	
(A) *Enfoque*	Centra-se no trabalho, no processo que o aluno desenvolveu para atingir uma resposta.
(B) *Função / Valência*	Quando há descrição negativa do trabalho do aluno, deve ter sugestões positivas com vista a melhoria.
(C) *Clareza / Especificidade*	Usa vocabulário e conceitos que o aluno entende, ajusta o grau de especificidade ao aluno e a tarefa. A meta é uma informação compreensível, significativa e acionável.
(D) *Tom*	Respeito pelo aluno enquanto agente.

Adaptado de Fonseca et al. (in press)

Estas características das estratégias e conteúdo de feedback não devem ser entendidas como dimensões isoladas, pois acontecem numa situação de comunicação interativa num contexto de sala de aula onde o professor deve estar atento às discrepâncias metas/desempenho encontradas e, ao mesmo tempo, sensível a preocupações relativas à auto-estima do aluno (Fonseca et al., in press). Será um professor que contribui para um ambiente de abertura e de respeito mútuo que promove o controlo dos alunos sobre sua própria aprendizagem.

Na medida em que há tantos fatores que fogem ao controlo do professor, mas que concorrem para os processos de ensino e aprendizagem, o feedback constitui-se numa das poucas ferramentas que os professores podem utilizar de maneira autônoma e que está sob o seu controlo pois é ele quem decide que conteúdo ou estratégia de feedback utiliza numa determinada situação durante a sua prática. Assim, em comparação com aspectos escolares que são impostos pelas realidades complexas, tais como: condições sociais dos alunos; os predeterminados conteúdos curriculares e as diversas questões de gestão e organização do tempo escolar, pode-se afirmar que o feedback apresenta-se como um elemento que pode ser usado pelos professores enquanto protagonistas e facilitadores do ensino e da aprendizagem dos alunos. O feedback do professor revela-se como uma variável com potencial impacto no envolvimento escolar dos alunos. Por essa relevância justifica-se que sejam empreendidas investigações para entender melhor as repercussões do feedback no ensino de áreas de conhecimento específicas, tal como é a Estatística. Neste sentido, este artigo procura contribuir para tal desafio.

3. Exemplos do uso de feedback a partir das relações entre um professor investigador e estudantes do ensino básico

Neste artigo, para ilustrarmos a discussão sobre o feedback em situações de ensino e de aprendizagem de Estatística apresentaremos alguns exemplos retirados de um o estudo realizado por Lira (2010) que investigou a utilização do *TinkerPlots* como recurso para explorar o ciclo investigativo (Will & Pfannkuch, 1999) durante o ensino de Estatística no ensino básico. Para uma melhor compreensão do contexto nos quais os diálogos aconteceram, na próxima subseção (3.1) apresentaremos de maneira sucinta o *software TinkerPlots*. Na subseção 3.2, descrevemos elementos da pesquisa realizada por Lira (2010) com estudantes do 7º ano, os quais tinham familiaridade com o uso de computador em contextos escolares mas não haviam tido nenhum contato com o *software TinkerPlots*.

3.1. O softwareTinkerPlots

O *TinkerPlots* foi desenvolvido por Konold e Miller (2005) para a interpretação de dados, com o objetivo de favorecer a aprendizagem de conceitos estatísticos entre crianças dos primeiros anos da escola básica. Esse *software* possui um ambiente dinâmico, no qual os estudantes podem organizar e explorar diferentes representações gráficas de dados, a partir de várias ferramentas. As possibilidades de produzir uma diversidade de representações oferecem condições para análise de hipóteses no processo de interpretação de dados.

A tela inicial do *TinkerPlots* é constituída por uma área em branco, sem muitos atrativos visuais; a barra de menu é no idioma inglês e apresenta cinco ferramentas básicas: *Cards*, *Table*, *Plot*, *Slider e Text*.

Figura 1. *Menu* e ícones da ferramentas na tela inicial do *software TinkerPlots*

A função da ferramenta *Cards* é possibilitar o registro para criação de banco de dados. Ao ativar a ferramenta *Table*, automaticamente, obtém-se a distribuição dos dados em forma de tabela. A ferramenta *Plot* permite realizar a manipulação dos dados, que poderão ser analisados de acordo com suas ocorrências, e dispõe de alguns recursos cujos ícones estão ilustrados na Figura 2, a seguir. O ícone *Slider* refere-se a um recurso pelo qual são realizadas alterações na amostra dos dados a serem trabalhados, e a ferramenta *Text*, ao ser ativada, disponibiliza na tela uma caixa de texto na qual podem ser digitadas informações complementares ao trabalho que está sendo desenvolvido.

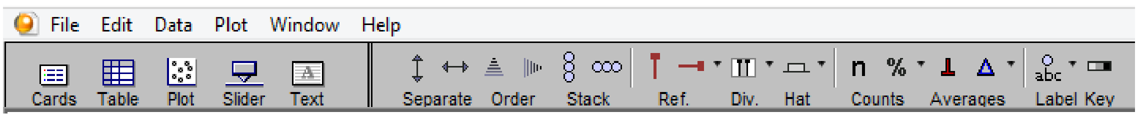


Figura 2. Barra de menu exibindo os ícones dos recursos da ferramenta *Plot* do *software TinkerPlots*

Conforme a Figura 2, a ferramenta *Plot* possui alguns recursos: *Separate* separa os *plots* de maneira vertical ou horizontal, conforme a escolha do usuário. *Order* ordena os *plots* de acordo com um atributo escolhido e, se for o caso, de acordo com a variação quantitativa. *Stack* é utilizado para empilhar os *plots* verticalmente, uns sobre os outros ou horizontalmente, em colunas ou blocos lado a lado. *Ref*, *Div* e *Hat* oferecem possibilidades para incluir nas representações algum marco de referência para interpretar os dados. *Counts* é utilizado para dois tipos de contagens dos *plots*: a numérica, representada pelo ícone *n*, e a contagem a partir de percentuais, representada pelo ícone *%*. *Averages* possibilita representar a média e a mediana dos dados. *Label* é a função que rotula os *plots* apresentados. Finalmente, o ícone *Key* possibilita incluir legendas.

A ferramenta gradiente do *TinkerPlots* está vinculada a função de colorir os *plots* com o objetivo de diferenciar variáveis qualitativas e quantitativas. Para as variáveis quantitativas os *plots* apresentam uma gradação de cor, cuja intensidade varia das nuances mais claras (casos de menor valor) para as mais escuras (casos de maior valor). Para as variáveis qualitativas as cores não variam em nuances. Por exemplo, para a variável gênero, uma cor representaria os casos masculinos e outra cor os casos femininos. O recurso das cores das variáveis no *TinkerPlots* é mostrado nos *Cards* e *Plots*, conforme pode ser observado na Figura3.

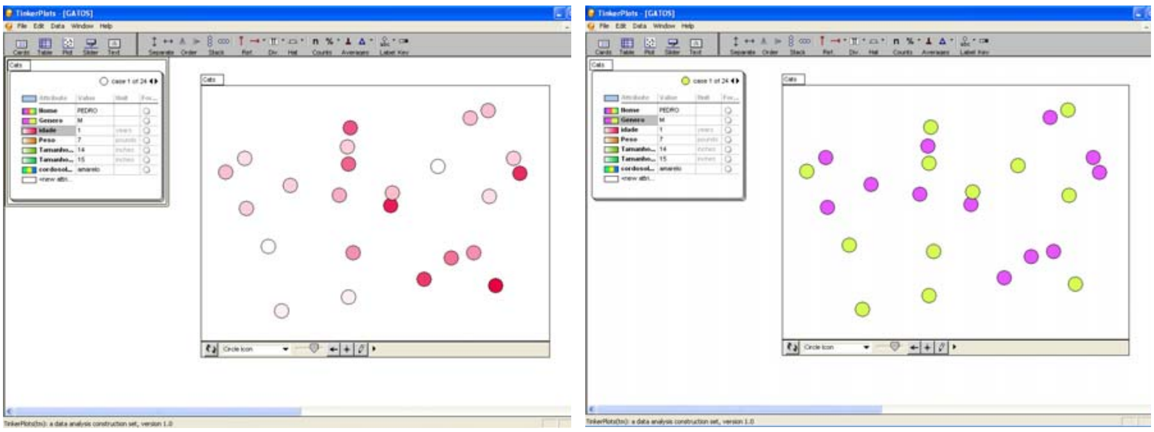


Figura 3. Exemplos de representação de variáveis, respectivamente quantitativas e qualitativas.

3.2. O uso doTinkerPlots entre estudantes utilizadores de computador na escola.

Na investigação de Lira (2010) participaram estudantes entre os 11 e 12 anos de idade pertencentes a uma turma do 7º Ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada, na cidade do Recife, Brasil. Na escolha da turma foram estabelecidos alguns critérios que estiveram também presentes na formação das duplas. Estas eram compostas por estudantes que se assemelhavam quanto a alguns aspetos: (a) as médias escolares em Matemática de todos participantes deveriam ser entre 5.0 e 6.0, para garantir que entre eles não existiriam muita discrepância entre seus rendimentos escolares;(b) todos os alunos selecionados frequentavam a mesma escola desde o 5º ano, sendo que o uso do laboratório de informática constituía-se numa prática quotidiana para todas as disciplinas.

O trabalho com o Tinker Plots decorreu ao longo de quatro sessões no laboratório de informática da escola. Cada dupla utilizou um computador. Os estudantes foram acomodados, mantendo uma distância razoável entre uma dupla e outra, para que a conversação de uma não interferisse na de outra e os áudios pudessem ser registrados com a melhor acuidade.

A primeira sessão foi a familiarização com o TinkerPlots versão 1.0. Na segunda sessão simulou-se uma recolha com a posterior organização de dados no TinkerPlots com o objetivo de explorar as funções do software, terminando com as duplas a apresentarem os seus resultados aos colegas. No final da sessão todas as duplas decidiram pelo problema a pesquisar *a saúde alimentar*, pela planificação da pesquisa que seria realizada, pela amostra e forma de recolha de dados. A pesquisa foi realizada por meio de um questionário. Este questionário seria aplicado a outros estudantes da escola antes da terceira sessão. Nesta terceira sessão, os estudantes utilizaram os recursos do *TinkerPlots* para a construção do banco de dados coletados pelo questionário. Concretamente, a organização dos dados resultou da e exploração dos recursos da ferramenta *Plot*. A quarta sessão deu continuidade ao trabalho iniciado na terceira sessão, concentrando-se sobretudo na exploração de dados, análise e interpretação usando o *TinkerPlots*.

A professora investigadora foi oferecendo feedbacks às duplas para que pudessem compreender as ferramentas do *TinkerPlots*, assim como que produzissem as representações dos dados estatísticos. Para ilustrar, trazemos dois exemplos das interações da professora com as duplas.

Um primeiro exemplo é da *dupla 4* na 2ª sessão. Segundo Lira (2010), a *dupla 4* não teve dificuldades em manusear as ferramentas *Cards* e *Table*, e na simulação de entrada de dados da investigação que estavam a fazer, associaram determinados atributos conforme a tabela apresentada na Figura 4.

Collection 1

	Nome	Idade	Sexo	Fumante	Dirige	Bebe	<new
1	Leonardo	25	m	n	s	s	
2	Larissa	12	f	n	n	n	
3	Beatriz	12	f	n	n	n	
4	Natalia	18	f	n	n	n	
5	Luiza	29	f	s	s	s	
6	Douglas	34	m	s	s	s	
7	Renato	27	m	s	n	n	
8	Roberto	14	m	n	n	s	
9	Marilia	32	f	n	s	s	
10	Nina	26	f	s	s	n	

Figura 4. Tabela obtida com os dados do *Cards* realizado pela *dupla 4*

Quando questionados pela professora sobre o porquê de terem escolhidos tais atributos, eles não souberam explicar. Assim, a *dupla 4* não conseguiu estabelecer relações entre os dados, realizando, apenas, a sua leitura na tabela.

A *dupla 4* também demonstrou dificuldade em trabalhar com a ferramenta *Plot.* Mesmo tendo solicitado por várias vezes a ajuda à professora, ao experimentarem as opções do menu *Plot*, a dupla finalizou o trabalho dessa sessão escolhendo a opção *Fuse Circular* do menu, o que ocasionou a construção do gráfico apresentado na *Figura 5*.

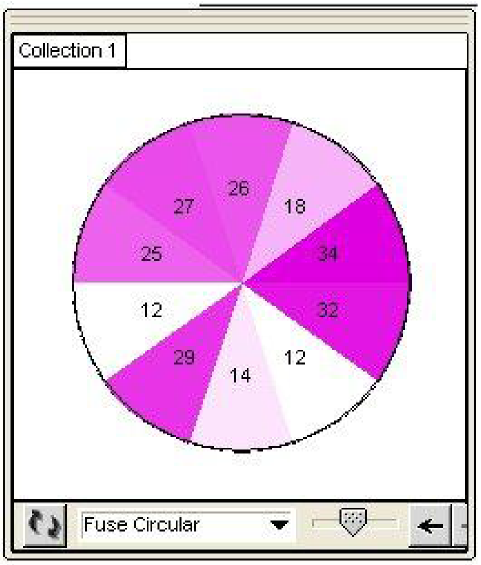


Figura 5.*Plot*da Dupla 04 utilizando a opção *Fuse Circular*

No momento da apresentação dos resultados para as demais duplas, ao exibirem o gráfico da Figura 5, esses estudantes não souberam expressar a impossibilidade de transformar a tabela da Figura 4 num gráfico com o simples clicar no ícone da ferramenta *Plot*. Ao serem questionados sobre a escolha dessa representação (*Fuse Circular*) e o que teriam compreendido sobre os dados, eles não souberam responder. Os extratos de falas, a seguir, durante a apresentação dos resultados da *dupla 4* no final da sessão, ilustram esse episódio:

Professora: Como foi que vocês construíram esse gráfico?

4A: A gente clicou aqui.

[o estudante apontou para as opções do menu Plot].

4A: E aí fez esse gráfico de pizza.

Professora: E o que vocês podem concluir olhando para esse gráfico?

Os estudantes ficam pensativos e o estudante 4A, sugere que o parceiro responda.

4A: Fala tu.

4B: É... é... sei não.

Professora: E porque vocês escolheram essa função?

4A: A gente ficou testando e essa fez o gráfico. Não seria para fazer um gráfico?

Professora: Sim, mas por que, essa?

4A: Porque essa fez o gráfico.

A professora investigadora deveria ter fornecido um feedback aos estudantes que lhes permitisse observar e refletir sobre os dados na tabela e depois realizar uma comparação com a representação gráfica obtida. A introdução de um feedback nessa situação poderia auxiliar os estudantes a mobilizar conhecimentos de maneira a perceber a necessidade de formular uma questão que pudessem relacionar as variáveis presentes na tabela. Talvez pela ausência de tal feedback, a dupla continuou demonstrando que não compreendia a representação obtida ao usarem a opção *Fuse Circular*. Nas análises dos registros escritos das observações da pesquisadora durante a apresentação dessa dupla, a mesma percebeu que apesar dessa interferência sugerindo aos estudantes que observassem os dados com o intuito de levá-los a uma possível interpretação, esses alunos não realizaram esse processo. Essa dificuldade sentida pela professora em fazer os alunos avançarem nos seus conhecimentos pode resultar de não ter sido mais específica (*Como foi que vocês construíram… o que vocês podem concluir… Sim, mas por que, essa*) no que pedia aos alunos em função do objectivo da tarefa e/ou dos conhecimentos que os alunos apresentavam.

Face às hesitações dos alunos em justificarem os seus argumentos na escolha do tipo de gráfico a professora não criou uma oportunidade para que reformulassem as suas respostas. Isso provavelmente aconteceu por não ter apresentado novos argumentos, não ter trazido mais informações para a discussão ou não ter demonstrado uma nova alternativa de gráfico que levassem os alunos a ter de contra argumentar. Algo que ilustra esta situação refere-se ao fato do gráfico construído pela *dupla 4* não apresentar as variáveis organizadas, ou seja, ordenadas de forma crescente ou decrescente. Essa opção poderia ser alcançada pelos alunos se estes tivessem clicado no recurso *Order* do *TinkerPlots*. Assim, os alunos, nesse momento, necessitavam de um feedback da professora que os instigassem a procurar formas de organizar melhor os dados ali apresentados.

Assim, ela poderia ter realizado abordagens, tais como:

> Se tivessem de dizer a alguém como se pode utilizar essa ferramenta *Plot* como fariam? Conseguem explicar como lá se chega? Teríamos de ir ao menu? Como se chegou a esses valores do gráfico? O que significam? Será que se poderia utilizar a restante informação presente na tabela? Estes dados estão bem organizados nesse gráfico?

Essas reflexões sobre o que era pedido ao aluno e como poderiam fazer poderia ajudá-los a questionar a representação gráfica obtida com os dados representados na tabela.

Outro exemplo retirado dos resultados do estudo de Lira (2010) refere-se aos diálogos da professora com a *dupla 1*, na quarta sessão de pesquisa. Após tabular no *TinkerPlots* os dados recolhidos por meio do questionário, a *dupla 1* realizou algumas explorações sobre a melhor maneira de representar os dados e decidiu utilizar a representação ilustrada na Figura 6.

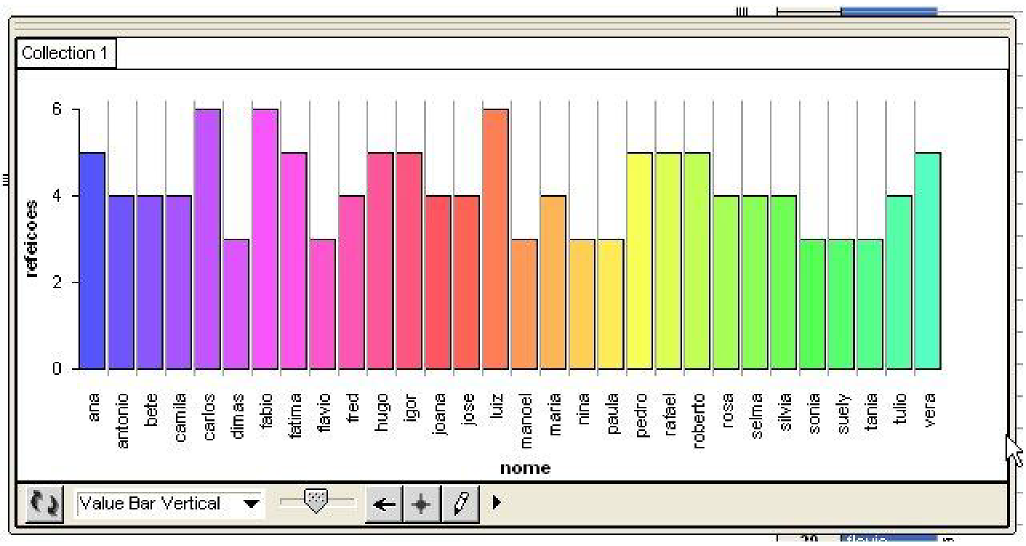


Figura 6. Gráfico da *dupla 1,* construído com a função *Value Bar Vertical da* ferramenta *Plot.*

O gráfico da Figura 6 representa a relação entre os atributos *nome e número de refeições*. A professora solicitou aos estudantes que utilizassem a ferramenta *Text* e registrassem as conclusões deles a partir da análise do gráfico. A Figura 7 ilustra os registros da *dupla 1*.

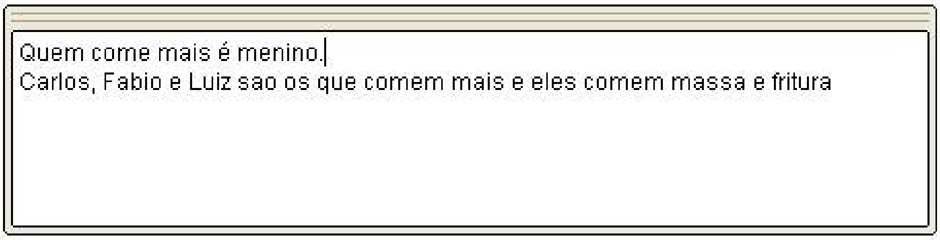


Figura 7. Registro da *dupla 01* sobre a interpretação do gráfico obtido durante a 4ª sessão.

A professora perguntou à dupla como eles haviam chegado à conclusão de que os sujeitos que comem mais, se alimentam de massa e fritura, uma vez que na representação obtida não havia tal informação. Os estudantes responderam que tinham essa informação a partir da *Table* gerada, pois quando clicavam com o mouse sobre a coluna de cada um dos sujeitos, as informações sobre este sujeito ficavam destacadas, conforme trecho do diálogo abaixo:

> Professora: Está muito bonito o gráfico de vocês. Quer dizer que vocês usaram os atributos nome e refeições. Então concluíram que quem come mais são os meninos Carlos, Fábio e Luiz são os que comem mais e eles comem massa e fritura. Agora, é... como é que vocês chegaram a essa conclusão, que eles comem massa e fritura, se aqui no gráfico não tem?
>
> 1B: Assim, ó Professora (...): É... a gente viu que quem come mais são os meninos porque aqui na... no gráfico, na coluna maior, essa, essa e essa são dos meninos Carlos, é... Fábio e Luiz. Aí, quando a gente clica aqui, aí na tabela, Carlos aparece marcado e a gente vê que ele come lasanha. Quando clica aqui em Fábio, lá na tabela mostra que ele come bife com fritas. E quando a gente clica em Luiz, ele come macarronada. Aí a gente viu que os três são os que comem mais e comem massa e fritura. Foi assim.

Analisando o trabalho realizado pela *dupla 1*, foi possível perceber que os estudantes conseguiram envolver-se verdadeiramente num processo de interpretação de dados mediados por ferramentas do *software TinkerPlots*. Além disso, esses estudantes observaram, paralelamente, as informações contidas na representação gráfica obtida utilizando apenas dois atributos com os dados: *nome* e *número de refeições*. Eles conseguiram inferir pelo uso dessas duas ferramentas, uma relação com outro atributo não apresentado no gráfico: *comida preferida*. Quando nos focamos no feedback da professora constatamos que esta consegue ser específica no que pede aos alunos, vai sempre acrescentado algo que os ajuda a ir caminhando nos argumentos (*vocês usaram os atributos nome e refeições…como é que vocês chegaram a essa conclusão* (…) *se aqui no gráfico não tem?*).

Há de considerar-se que a situação de pesquisa na qual a professora estava engajada, assemelhava-se a situação de tantas salas de aula, nas quais os professores precisam dar feedback para diversos alunos e/ou grupos de alunos simultaneamente. Neste sentido, os exemplos aqui apresentados realçam a complexidade presente na utilização do feedback ao processo de ensino. Todavia, faz-se necessário desenvolver pesquisas que possam investigar como os professores podem desenvolver estratégias e conteúdos de feedback eficazes em situações de sala de aula.

4. Considerações finais

Nos diálogos apresentados temos uma realidade que pode facilitar a eficácia do feedback do professor e ultrapassar uma limitação da sua operacionalização: os alunos trabalharam na sala de aula em duplas e na implementação da actividade recorreu-se a uma ferramenta interativa, o *TinkerPlots*, para trabalhar conteúdos de Estatística. No entanto, quando analisamos os diálogos entre as duplas e a professora verificamos que a quantidade de feedback dado às duplas não é equivalente. No primeiro trecho de diálogo ilustrativo a professora não foi específica no feedback fornecido aos alunos e não conseguiu fazer com que esses ultrapassassem as dificuldades apresentadas na passagem de um tipo de representação para outro. No segundo trecho exemplificativo tal situação já não aconteceu. A professora não revelou aparentar dificuldades em levar a dupla a explicar e a refletir acerca da sua resolução.

Estes resultados sugerem que os professores conhecem e utilizam as estratégias de feedback mas que quando têm de ser precisos pensando num aluno concreto a realizar uma tarefa concreta podem revelar fragilidades em fornecer-lhe um feedback mais individualizado que lhe permita apropriar ou mobilizar os saberes necessários para compreenderem em que ponto se encontram na sua aprendizagem e o que têm de fazer para evoluir.

Conforme enfatizamos, nossa proposta era de iniciar uma discussão sobre o uso de estratégias e conteúdos de feedback que poderiam ser eficazes nos processos de ensino e aprendizagem da Estatística. Para tanto, em pesquisas futuras deve-se investigar o feedback em situações reais em sala de aula de Estatística, bem como em simulações na formação inicial de professores que vão ensinar Estatística.

Referencias

Adler J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F.L. &Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 359-381.

Ainley, J., & Monteiro, C. (2008). Comparing curricular approaches for statistics in primary school in England and Brasil: a focus on graphing. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI /IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education*. (pp.1-6). México: Monterrey. Recuperado de http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/

Black, P., & Wiliam, D. (1998). *Inside the black box: Raising standards through classroom assessment*. London: School of Education, King's College.

Brookhart, S. (2008). *How to give effective feedback to your students*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Carvalho, C., & Solomon, Y. (2012). Supporting statistical literacy: What do culturally relevant/realistic tasks show us about the nature of pupil engagement with statistics? *International Journal of Educational Research, 55*, 57-65.

Fonseca, J., Carvalho, C., Conboy, J., Valente, M.O., Gama, A.P., Fiúza, E., & Salena, H. (in press). *Feedback na prática letiva: Uma oficina de formação de professores*. Manuscrito submetido para publicação.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to* *achievement.* New York: Routledge.

Konold, C., & Miller, C.D. (2005) *TinkerPlots: Dynamic Data Explorations* [software, Version1.0]. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Lira, O.C.T. (2010). *Uso de ferramentas do software TinkerPlots para interpretação de dados.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.

Martins, D., & Carvalho, C. (2013). Teachers' feedback and students' identity: An Example of Elementary School Students in Portugal. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 82*, 302-306.

Monteiro, C. (2005). *Investigating critical sense in the interpretation of media graphs*. (PhD Thesis). Institute of Education, University of Warwick, England.

Monteiro, C.E.F., Carvalho, L.M.T.L., & Ainley, J.M. (2013). O TinkerPlots como recurso para o ensino e a aprendizagem de conteúdos de Estatística no Ensino Fundamental. In R. Borba & C. Monteiro (Eds.), *Processos de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática* (pp. 133-166). Recife, PE: Universitária UFPE.

Oliveira, R.P. (2007). Da universalização do ensino fundamental ao desafio da qualidade: uma análise histórica. *Educação e Sociedade*, *100*(28), 661-690.

Orsmond, P., Merry, S., & Reiling, K. (2005). Biology students' utilization of tutors' formative feedback: A qualitative interview study. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 30*, 369–386.

Quintas, S., Tomás Ferreira, R., & Oliveira, H. (2013). O conhecimento didático do professor no ensino da variação estatística. En J. M. Contreras, G.R., Cañadas, M. M. Gea & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria: Vol.1.* (pp. 439-446). Granada: Universidad de Granada.

Sadler, D.R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, *18*, 119–144.

Skemp, R.R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Weaver, M.R. (2006). Do students value feedback? Student perceptions of tutors' written responses. *Assessment and Evaluation in Higher Education*, *31*, 379–394.

Wiggins, G. (2012). Seven keys to effective feedback. *Feedback for learning, 70*(1), 10–16.

Wild, C.J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review, 67* (3), 223-265.

Comunicaciones

Segundas Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Actitudes hacia la Estadística de los Profesores: un Camino a Recorrer

José Alexandre Martins[1], Assumpta Estrada[2], Maria Manuel Nascimento[3] y Carles Comas[4]

[1]jasvm@ipg.pt, UDI/IPG, Instituto Politécnico da Guarda, Portugal
[2]aestrada@matematica.udl.cat, Universidad de Lleida, España
[3]mmsn@utad.pt, UTAD, *CIDTFF*, *LabDCT-UTAD*, Portugal
[4]carles.comas@matematica.udl.cat,Universidad de Lleida, España

Resumen

Este estudio se centra en la medición y caracterización de las actitudes hacia la estadística de profesores portugueses de primero y segundo ciclo de la educación básica. Esta investigación surgió a raíz de los cambios que se propusieron desde el 2007 en la enseñanza de la estadística en la educación primaria en Portugal. Su objetivo principal es contribuir positivamente en el desarrollo profesional de los profesores, así como en la educación estadística de sus alumnos diseñando caminos que puedan dar lugar a intervenciones para prevenir y/o corregir actitudes negativas hacia la estadística.

Palabras clave: Actitudes, Estadística, Profesores.

1. Introducción

La estadística es ampliamente reconocida como un área clave del conocimiento e, incluso, de la ciudadanía. Por eso, en las últimas décadas la enseñanza de la estadística se ha ido incorporando gradualmente en el currículo de matemáticas de los niveles escolares, básico y secundario tanto en Portugal, en especial desde el curso 2007-2008, como en muchos otros países.

Por otro lado, el proceso de Bolonia plantea un cambio de paradigma relativo a los procesos de enseñanza y aprendizaje: de la metodología tradicional centrada en el profesor a una metodología centrada en el alumno y en la consecución de determinadas competencias. Al mismo tiempo, impone una serie de exigencias entre las que destacamos la mejora de las prácticas de enseñanza, tanto a nivel pedagógico como didáctico.

No obstante y a pesar de las actuales directivas curriculares con una mayor presencia de la estadística en los distintos niveles de aprendizaje, hay factores que pueden poner en riesgo su aplicación, tales como: la falta de formación en estadística de los profesores; la sub y/o sobrevaloración del tema; cierta falta de interés y motivación, desconocimiento de resultados de investigaciones recientes sobre educación estadística o incluso de nuevos materiales y tecnologías así como falta de condiciones para introducir nuevas metodologías por citar las más relevantes (Estrada, Batanero y Lancaster, 2011).

Así mismo en este tiempo de cambios podemos afirmar que los objetivos de las reformas en educación estadística incluyen además de la mejora del proceso educativo propuestas de mejora de las actitudes hacia esta materia (Tishkovskaya y Lancaster, 2012).

El análisis de las actitudes hacia la estadística tiene ya una cierta tradición, sobre todo en las dos últimas décadas, porque dadas las características del proceso educativo de la estadística es fácil entender que en la interacción profesor-alumno no solamente se transmiten conocimientos; sino también, un posicionamiento actitudinal por parte del docente que puede afectar dicho

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 101-107). Granada, 2015.

Sin embargo en Portugal las investigaciones en educación estadística están creciendo en número y calidad pero en el ámbito de las actitudes hacia la estadística no se está siguiendo esta tendencia internacional.

En este contexto, el trabajo sobre las actitudes hacia la estadística que aquí se presenta surge como una necesidad de cubrir esta laguna sobre todo en un momento de cambio de planes de estudio y, consecuentemente, de exigencias didácticas y pedagógicas para los profesores responsables de la educación estadística en los primeros seis años de escolaridad.

Resulta difícil de definir y no hay unanimidad respecto al significado del término actitud. McLeod (1992) al conceptualizar el dominio afectivo de la educación Matemática distingue entre emociones, actitudes y creencias. Las emociones son respuestas inmediatas positivas o negativas producidas mientras se estudia matemáticas; mientras que las actitudes son respuestas o sentimientos más intensos y estables que se desarrollan por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo.

Respecto a la educación estadística, según Gal, Ginsburg y Schau (1997) durante mucho tiempo, los términos de actitud y sentimientos han sido utilizados indistintamente. Las definen como una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio y sugieren que en su origen intervienen pensamientos o creencias intensos. Más recientemente Phillipp (2007) las considera como "sentimientos, acciones o pensamientos que manifiesta una persona respecto a una materia". Siempre se expresan positivamente o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto), surgen favorables en edades muy tempranas pero evolucionan negativamente con el paso del tiempo. Además, en la actualidad, las actitudes hacia la estadística se consideran un concepto pluridimensional y jerárquico, compuesto de diferentes elementos o dimensiones analizables por separado (Gil Flores, 1999). Han sido estudiadas por diversos autores, principalmente en estudiantes universitarios, a partir del uso de escalas o cuestionarios.

Para Manassero y Vázquez (2001) la evaluación de las actitudes no ha de estar centrada en "el qué" (simple conocimiento) sino el "para qué". En esta línea nuestro estudio está dirigido a analizar las actitudes hacia la Estadística de los profesores de el primer y segundo ciclos de la enseñanza obligatoria en Portugal para poder en un futuro planificar y decidir las acciones educativas más adecuadas para mejorar su formación estadística e indirectamente incidir en las actitudes de estos alumnos.

2. Metodología

El estudio que aquí presentamos complementa trabajos previos de Estrada y cols. (2004, 2010) y también Martins y cols. (2009, 2011) sobre la influencia de las actitudes en la enseñanza de la estadística en diferentes contextos, y también aborda la incidencia de las variables: género, ciclo de enseñanza en el que imparte docencia, años de experiencia docente, área de formación, cómo y dónde ha recibido la formación y finalmente si la enseña (ver Tabla 3).

Como punto de partida consideramos que las actitudes son tendencias o predisposiciones, positivas o negativas hacia el objeto actitudinal, en nuestro caso la estadística, con componentes pedagógicos (cognitivos, conductuales y emotivos) y antropológicos (social, educativo e instrumental) (Estrada, 2010). Utilizamos como instrumento de medición de actitudes la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada, EAEE (Estrada, 2002), presentada en el XIV congreso de la SEIEM y cuya versión portuguesa fue validada por un panel de expertos (Martins et al., 2012), además en esta versión los maestros podían presentar sus justificaciones para la clasificación atribuida en nueve de los ítems presentados en abierto. Dicha escala está compuesta por 25 ítems, 13 afirmativos frente a 12 negativos, que se distribuyen según componentes pedagógicos y antropológicos definidos en Estrada (2010). Cada uno de los ítems tiene 5 respuestas posibles, incluyendo una alternativa neutral (3). La puntuación de la escala está formada por la suma de los valores obtenidos para cada elemento. Dado que los ítems no están redactados en el mismo sentido, todos ellos han sido codificados de modo que una puntuación mayor vaya asociada a una actitud más positiva y viceversa. Es por ello que los elementos positivos presentan la escala siguiente: muy en desacuerdo (1), en desacuerdo (2), indiferente (3), de acuerdo (4) y muy de acuerdo (5) y los negativos: muy en desacuerdo (5), en desacuerdo (4), indiferente (3), de acuerdo (2) y muy de acuerdo (1). Así, los valores de la puntuación total varían entre 25 y 125, siendo la mitad 75 puntos (indiferencia).

La escala EAEE se presentó a una muestra de profesores de primer y segundo ciclos de educación básica de las áreas pedagógicas ("Quadros de Zona Pedagógica") de Coimbra, Guarda y Vila Real. En un muestreo por conglomerados se encuestó a 1135 profesores, número correspondiente al 50,4% del total de los profesores objetivo. De estos, 878 eran profesores del primer ciclo, 48,3% del total de profesores objetivo de ese ciclo, y 257 eran profesores del segundo ciclo, 65,9% del total de profesores objetivo de ese ciclo. Con un 1,3% de encuestas inválidas resultaron 1098 encuestas válidas. La muestra cuenta con una importante variedad de casos relevantes para las variables del estudio, y se consiguió una cierta aproximación de las distribuciones de los criterios esenciales de la población a nivel nacional.

Para el análisis cuantitativo fueron calculadas estadísticas descriptivas, así como aplicados métodos paramétricos y no paramétricos unidimensionales, análisis de *clusters* multidimensional y análisis factorial. Para hacer el análisis de las justificaciones de los profesores se utilizó el análisis del contenido (Martins et al., 2012).

3. Resultados de la investigación

A continuación se presentan algunos de los principales resultados cuantitativos de la investigación.

En este estudio se obtuvo una elevada consistencia interna de la escala, con un alfa de Cronbach, 0,869, superior al obtenido en estudios similares que utilizan la misma escala EAEE (Estrada 2002, Estrada et al., 2010, Martins et al., 2012). Además, emergieron los aspectos multidimensionales de la EAEE.

En términos globales las actitudes de los profesores hacia la estadística fueron moderadamente positivas, con una puntuación media global de 87,9, por encima de los 75 puntos correspondientes a la indiferencia, y con una dispersión baja, con un coeficiente de variación (cv) de 13% (Tabla 1).

De igual modo, la investigación puso de relieve de manera positiva los componentes cognitivo y social y de una forma menos positiva los componentes comportamental e instrumental (Tabla 1).

Tabla 1: Resumen estadístico sobre la puntuación total en términos globales y por componentes de las actitudes

	Puntuación Total	Mínimo posible	Mínimo	Máximo	Máximo posible	Media	Punto medio	Desv. tipica	cv
	Global	25	46	119	125	87,97	75	11,87	0,13
Componentes Pedagógicos	Afectivo	10	16	50	50	35,47	30	5,56	0,16
	Cognitivo	8	16	40	40	29,27	24	4,08	0,14
	Comportamental	7	13	33	35	23,23	21	3,65	0,16
Componentes Antropológicos	Social	8	15	40	40	30,33	24	4,27	0,14
	Educativo	9	15	44	45	31,82	27	5,14	0,16
	Instrumental	8	10	39	40	25,82	24	4,39	0,17

En lo que se refiere al estudio transcultural este permitió reforzar la admisibilidad de los resultados obtenidos en la investigación teniendo en cuenta que en Perú, como consecuencia del estudio psicométrico, se utilizó una versión reducida a 22 ítems de la escala, tal como aparece recogido en la Tabla 2, y las comparaciones entre países se hicieron contemplando estas circunstancias en este sentido.

Se concluyó que genéricamente las actitudes hacia la estadística de los profesores portugueses son menos positivas que las de sus compañeros españoles y son ligeramente más positivas que las de sus pares peruanos (Estrada et al., 2010) – Tabla 2.

Tabla 2: Resumen de la puntuación media global para España, Portugal y Perú

	Media Global	Desviación típica
España – 25 ítems	88,8	8,5
Portugal – 25 ítems	88,0	11,9
España – 22 ítems	83,9	7,2
Portugal – 22 ítems	79,6	12,3
Perú – 22 ítems	72,9	11,1

Comparando las actitudes hacia la estadística de los profesores del primer ciclo y de los profesores del segundo ciclo de la educación básica, se determinó que son significativamente diferentes (p = 0%), con actitudes más positivas entre los profesores de matemáticas del segundo ciclo de la educación básica (Tabla 3). Con respecto a la incidencia de otras variables (Tabla 3), se llegó a la conclusión de que las actitudes hacia la estadística de estos profesores no están significativamente relacionadas con el género (p = 11%), aunque los hombres presentan una puntuación global ligeramente superior. Sí están significativamente relacionados: con la experiencia docente (p = 0%), en que los profesores con menos años en ejercicio tienen una actitud más positiva; con su área de formación (p = 4,7%), en que los profesores que tenían una formación inicial más específica para la enseñanza en el ciclo donde imparte su docencia tienen una actitud más positiva (por ejemplo, en el segundo ciclo los profesores de matemáticas pueden ser economistas, ingenieros, biólogos); con la formación en estadística (p = 0%), donde los profesores con más formación en estadística tienen una actitud más positiva (muchos maestros mayores nunca aprendieron estadística en la universidad); y con la enseñanza de la estadística (p = 0%), los profesores que ya han enseñado estadística tienen una actitud más positiva (en el primer ciclo el análisis de datos era un tema muy reciente en los planes de estudio en Portugal).

Tabla 3: Resumen de la puntuación media global por variable

Variable		Media	Desviación típica	Mediana	p (α = 0,05)	Test
Género	Masculino	89,22	13,45	90	0,109	t de Student
	Femenino	86,89	11,41	88		
Ciclo de enseñanza	1er Ciclo EB	85,40	11,23	85	0,000	t de Student
	2do Ciclo EB	96,87	9,48	97		
Experiencia docente	[0 , 5[	91,16	12,14	90	0,000	Kruskal-Wallis
	[5 , 10[	91,34	11,55	92,5		
	[10 , 15[	89,91	12,18	90		
	[15 , 20[	89,58	11,49	91		
	[20 , 30[	86,90	11,56	88		
	[30 , 50[	86,08	11,94	85,5		
Área de formación	Área específica	88,64	12,02	89	0,047	t de Student
	Otra área	87,00	11,96	87		
Formación en estadística	Ninguna	81,06	9,71	80	0,000	Kruskal-Wallis
	Solo	85,26	9,78	85		
	Escuela	87,10	10,10	88		
	Universidad	91,24	12,02	92		
	Formación continua u otra	86,12	11,16	88		
	Escuela y universidad	97,19	10,19	97,5		
	Escuela y/o Universidad y formación continua	93,37	10,36	94		
Enseñanza de la Estadística	No	80,29	10,39	79	0,000	Kruskal-Wallis
	Si, en un ciclo	90,11	10,60	91		
	Si, en más que un ciclo	96,02	11,30	98		

4. Consideraciones Finales

En primer lugar queremos indicar que las actitudes en general fueron moderadas o positivas, con una puntuación promedio global ligeramente superior a la posición teórica de indiferencia y con resultados inferiores a los de Estrada (2010) con futuros profesores españoles y moderadamente superior a los peruanos, en consonancia con las diferencias de énfasis del currículo de Educación Primaria en estos países (Estrada et al., 2010).

Del análisis cuantitativo se puede inferir que los profesores tienen claro que la estadística es útil y valoran su papel en la vida diaria de los ciudadanos, por lo que también ven la necesidad de incluir la en los planes de estudio, como un componente de la educación matemática. Al mismo tiempo no son entusiastas del trabajo colaborativo entre profesores y, generalmente, no comparten sus dificultades en estadística con sus colegas.

Fuera de la escuela, los profesores no la ven como una herramienta útil en su vida cotidiana y expresan un sentimiento de duda hacia el uso de las estadísticas y hacia la información transmitida por la televisión.

Por ello, para mejorar las actitudes de los profesores hacia la estadística se proponen acciones de formación (inicial y continua) sobre análisis de datos para los profesores con más años de servicio y menos formación inicial en estadística así como para los profesores de las áreas sin formación inicial en estadística o con formación inicial en un área diferente (por ejemplo, ingeniería). También se debería explorar los aspectos afectivos y sociales de las actitudes, especialmente con las profesoras, y dar un enfoque a los problemas cotidianos de la vida, tales como el uso de las noticias con datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación, televisión y periódicos.

En este estudio también emerge la necesidad de promover el trabajo colaborativo entre profesores del mismo ciclo de la educación básica y entre los ciclos, para proporcionar a los alumnos un proceso de continuidad en el aprendizaje de la estadística entre los ciclos. Finalmente nos parece importante la continuación de los esfuerzos de los últimos años en las políticas gubernamentales, a fin de garantizar el fortalecimiento de la enseñanza de la estadística en las escuelas, desde los primeros años, así como en la formación de los futuros profesores. También debe prestarse atención a la calidad y a la adecuación de la formación continua de los profesores en estadística.

Agradecimientos

Este trabajo tiene el apoyo del Proyecto EDU 2013-41141-P (MICIIN, España), del Centro de Investigação "Didática e Tecnologia na Formação de Formadores" (CIDTFF, LabDCT-UTAD-UA, Portugal) y del proyecto PEst-OE/EGE/UI4056/2014 UDI/IPG de la UDI/IPG y financiado por la Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT, Portugal).

Referencias

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis de Doctorado, Universitat Autónoma de Barcelona.

Estrada, A. (2010), Instrumentos de medición de actitudes hacia la Estadística: la escala EAEE para profesores. En Moreno, M., Estrada, A., Carrillo, J., y Sierra, T (Eds.), *Actas del XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.271-280). Lleida: SEIEM.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias, 22* (2), 263-274.

Estrada, A., Batanero, C. y Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 163–174). New York: Springer.

Estrada, A., Bazán, J. L. y Aparicio, A. (2010). A cross-cultural psychometric evaluation of the attitude statistic scale Estrada's in teachers. En C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. *Proceedings of Eighth International Conference on Teaching of Statistics* (ICOTS 8). Ljubljana. Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Gal, I., Ginsburg, L. y Schau, C. (1997). *Monitoring attitudes and beliefs in statistics education.* En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). Voorburg: Netherlands: IOS Press.

Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.

Mc Leod, D. B. (1992). Reseach on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (ed.). *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). Macmillam N.C.T.M. New York.

Manassero, M. A. y Vazquez, A. (2001).Instrumentos y métodos para la evaluación de actitudes relacionadas con la ciencia, la tecnología y la sociedad. *Enseñanza de las Ciencias*, 20 (1), 15-27.

Martins, J., Nascimento, M. & Estrada, A. (2009). Estudio preliminar de las actitudes de profesores portugueses hacia la estadística. En T. Cotos, M. Mosquera & A. Pérez (Eds.), *Actas do IX Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións* (pp. 31-36). Ourense: Departamento de Estatística e Investigación Operativa de la Universidad de Vigo.

Martins, J., Nascimento, M. y Estrada, A. (2011). Attitudes of teachers towards statistics: a preliminary study with portuguese teachers. En M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 7* [CD-ROM]. Rzeszow: European Society for Research in Mathematics Education e University of Rzeszów. Disponible en: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/5/CERME_Martins-Nascimento-Estrada.pdf

Martins, J. A., Nascimento, M. M. S. y Estrada, A. (2012). Looking back over their shoulders: A qualitative analysis of portuguese teachers' attitudes towards statistics. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 26-44. Disponible en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ11(2)_Martins.pdf.

McLeod (1992). Mc Leod, D. B. (1992). Reseach on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (ed.). *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan y N.C.T.M.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Matehmatics* (pp. 257-314). Charlotte: Information Age.

Tishkovskaya, S. & Lancaster, G. (2012). Statistical education in the 21st century: a Review of challenges, teaching innovations and strategies for reform. *Journal of Statistics Education*, *20* (2), 1-24. Disponible en: http://www.amstat.org/publications/jse/v20n2/tishkovskaya.pdf

Análisis de la construcción de la definición de estadística por maestros en formación inicial

Ignacio González-Ruiz[1], *Mª Teresa González Astudillo*[2] *y Myriam Codes Valcarce*[3]

[1]ignaciogr@usal.es, Universidad de Salamanca
[2]maite@usal.es, Universidad de Salamanca
[3]mcodes@usal.es, Universidad de Salamanca

Resumen

En este trabajo analizamos los aspectos que organizan la definición de Estadística propuesta por un grupo de futuros maestros. Para ello introducimos un conjunto de cinco conectores que nos permiten llevar a cabo dicho análisis, al mismo tiempo que caracterizar tales aspectos. Concluimos que los futuros maestros aportan una definición poco precisa sobre la Estadística y manifiestan dificultades a la hora de identificar y determinar cuáles son los objetivos que su estudio persigue, los conceptos que en ella se involucran y sus aplicaciones.

Palabras clave: Definición de Estadística, Estadística, formación de maestros.

1. Introducción

En la sociedad actual cada vez recibimos más información sobre gran cantidad de datos a través de cualquier medio de información y comunicación. El ciudadano ha de ser competente para poder interpretar y producir este tipo de datos, y el conocimiento matemático es uno de los vehículos para lograrlo ya que permite "conocer y estructurar la realidad, analizarla y obtener información para valorarla y tomar decisiones" (MECD, 2014). Esta necesidad ha llevado a que el currículo de Educación Primaria contemple la iniciación de los alumnos en el mundo de la Estadística, para dotarles de los conocimientos básicos para ser competente en el futuro.

Fundamentalmente se trata de que los alumnos durante la enseñanza primaria adquieran los conocimientos necesarios y comprendan las representaciones de los datos para poder producir información estadística, poder resolver problemas y ser capaz de tomar decisiones adecuadas a partir de la información recibida. Se trata de fomentar la cultura estadística procurando que los alumnos sean capaces de leer y organizar los datos, estén familiarizados con los conceptos estadísticos, sepan interpretar los datos en función del contexto de origen y sean críticos con la información estadística. Tal como indica Gal (2002) la cultura estadística está organizada en torno a dos componentes:

> La habilidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, y cuando sea pertinente, la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas, tales como su comprensión del significado de la información, sus opiniones sobre las implicaciones de esta información, o su interés en relación a la aceptabilidad de las conclusiones dadas (pp. 2-3).

Esto implica que los futuros maestros han de estar convenientemente formados para capacitar a sus alumnos en la cultura estadística.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 109-115). Granada, 2015.

> Pero a pesar de su utilidad reconocida y de figurar en los programas oficiales de nuestro país, la estadística es una materia frecuentemente olvidada en la educación primaria y secundaria (…). La misma situación se reproduce en la Facultades de ciencias de la Educación encargadas de formar al profesorado (Estrada, 2009, p.119).

Por otro lado, tradicionalmente en la enseñanza de la estadística se busca más que los alumnos ejecuten procedimientos en lugar de que razonen y piensen estadísticamente. Esto puede ser una consecuencia de la escasa formación recibida tanto en la educación básica como en la superior de los futuros maestros.

Uno de los peligros de la escasa formación es el cúmulo de falsas intuiciones de los alumnos que, de no ser tratados, tendrá fatales consecuencias en el ejercicio de su futura docencia. Esto supone un reto para el formador de maestros que tendrá que conocer esas ideas previas de cara a identificar dificultades y obstáculos de aprendizaje para planificar su docencia. Se plantea, por tanto, un problema importante en la formación de los futuros maestros que se deberá organizar para lograr un adecuado nivel de pensamiento y razonamiento estadístico. En el Grado de maestro de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca se ha apostado por la formación de los futuros maestros estando una asignatura (Matemáticas y su didáctica III) completamente dedicada a la Estadística, la Probabilidad y su didáctica.

Para conocer las ideas previas de los futuros maestros en relación a la estadística y la probabilidad, se diseñó un cuestionario que comienza preguntando qué es la estadística. En este trabajo analizamos las respuestas de estudiantes del grado en Maestro en Educación Primaria a esta pregunta. El estudio de las definiciones de futuros profesores sobre otros temas ha sido tenido en cuenta por otros autores; por ejemplo, Batanero, Contreras, Díaz y Cañadas (2013).

2. Referentes teóricos

Shulman (1986) caracterizó el conocimiento del profesor organizándolo en siete categorías, cuatro de las cuáles pueden considerarse dentro de la pedagogía general y tres de ellas tienen que ver con la propia materia. Dentro de este último bloque, en el denominado conocimiento de la materia, Schwab (1978) distingue entre el conocimiento sustantivo y el conocimiento sintáctico. Por conocimiento sustantivo se entiende los hechos, conceptos, principios y el marco teórico de la propia disciplina mientras que el conocimiento sintáctico se refiere a la naturaleza de dicho campo de indagación así como la forma en la que el nuevo conocimiento se integra dentro de la comunidad. Es imprescindible por tanto que el profesor tenga conocimientos de esta índole para estar capacitado para su enseñanza. Si nos referimos al conocimiento de la Estadística, el futuro maestro debe conocer no sólo los métodos estadísticos, los conceptos, propiedades y relaciones sino la naturaleza de dicho conocimiento que tiene que ver con la forma en que se define la Estadística.

Edwards y Ward (2008) destacan la importancia de la definición en *"la estructura axiomática que caracteriza a las matemáticas"* (p. 223) y los objetivos pedagógicos de su uso para:

- Impulsar la comprensión conceptual profunda de las matemáticas involucradas,
- Impulsar una comprensión de la naturaleza o de las características de la definición matemática, y/o
- Impulsar una comprensión del papel de la definición en matemáticas (p. 229).

En la literatura no hay consenso acerca de qué es la estadística. Una revisión de las definiciones que recoge Gómez (2005) nos induce a pensar que, en parte, la definición depende del área de conocimiento desde la que se argumente. La Real Academia Española (RAE) emplea dos definiciones que ilustran perfectamente este hecho: 1. Estudio de los datos cuantitativos de la población, de los recursos naturales e industriales, del tráfico o de cualquier otra manifestación de las sociedades humanas. (…) 3. Rama de la matemática que utiliza grandes conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades (Real Academia Española, s.f.). Estas dos definiciones ilustran el hecho de que la estadística sea una ciencia relativamente moderna en cuyo desarrollo han tenido una influencia notable diversas disciplinas como la economía, la política, la biología o la matemática (Batanero, Godino, Vallecillos, Green, y Holmes, 1994). Su acercamiento a problemas de la vida real hace que en el ámbito de la matemática protagonice el área de matemática aplicada.

Las definiciones que adoptan Godino y Batanero (2002) destacan dos aspectos de la estadística. Por un lado, su carácter interdisciplinar ligado a fenómenos colectivos:

> La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final (Cabriá, 1994, citado en Batanero y Godino, 2002, p. 701).

Y por otro su vínculo con la Matemática, con la que comparte muchos modos de razonamiento y técnicas operacionales, pero independiente de ella por su especificidad:

> La estadística es la ciencia de los datos. Con más precisión, el objeto de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos. La estadística es una disciplina científica autónoma, que tiene sus métodos específicos de razonamiento. Aunque es una ciencia matemática, no es un subcampo de la Matemática. Aunque es una disciplina metodológica, no es una colección de métodos (Moore, 1991, citado en Batanero y Godino, 2002, p.701).

3. Metodología

Para analizar los aspectos sobre los que organizan la definición de Estadística los futuros maestros, hemos contado con una muestra intencional de 53 estudiantes del grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Salamanca. Todos ellos cursan, en la actualidad, la asignatura “Matemáticas y su Didáctica III”, vigente en el cuatro curso del citado plan de estudios, centrada en la enseñanza de contenidos básicos de estadística y probabilidad.

Se propuso a los sujetos de investigación que respondiesen a la pregunta “¿Qué es la Estadística?” como actividad inicial de la asignatura, previa a cualquier tipo de formación recibida en ella, de forma que nos advirtiese del tipo de conceptos con que la relacionan. Esta cuestión encabeza una encuesta de conocimientos previos que en un aula de grado de maestro además de cumplir su cometido habitual (Socas, 1997), muestra al futuro maestro un ejemplo de buena práctica en la que vive como alumno lo que en su vida profesional ha de ejercitar como docente.

Un análisis de las respuestas, basado en la construcción de las mismas, nos permitió diferenciar cinco variables de análisis (ver Tabla 1), sobre las que codificaremos la información que nos aporten las primeras. Esto es, organizaremos las 53 respuestas valiéndonos de estas variables, consideradas como conectores que forman parte de la definición propuesta por cada alumno.

En la Tabla 2 se ilustran algunos ejemplos de respuestas obtenidas, destacando los aspectos asociados a las distintas variables de análisis.

Tabla 1. Variables de análisis.

V1	Es/está considerada como…
V2	Forma parte de…/está vinculada a…/ está relacionada con…
V3	Su objeto de estudio es…/ su estudio se centra en…
V4	En su estudio se involucran los conceptos de…
V5	Su estudio se aplica a…

Tabla 2. Relación entre los ejemplos y las variables de análisis.

V1	"Es una *rama* de las matemáticas que analiza, interpreta o explica datos".
V2	"Una rama de la *ciencia matemática* que se encarga de recoger datos y porcentajes sobre aspectos de la sociedad".
V3	"Es una rama de las matemáticas que recoge datos e información para *realizar un estudio sobre un tema determinado."*
V4	"Es una rama de las matemáticas a través de la cual se estudian *la probabilidad, la media, la moda…* de un aspecto concreto".
V5	"Rama de las matemáticas que se dedica a estudiar la probabilidad en la que se presentan diferentes *datos en la sociedad*. Ya sean datos sobre *objetos culturales, físicos, actitudinales…*"

Esta manera de proceder, nos permitirá, por un lado, construir una definición representativa de lo que consideran qué es Estadística los futuros maestros, y por otro, determinar los aspectos de la definición que entrañan una mayor dificultad para ellos.

4. Resultados

A partir de las respuestas obtenidas, hemos seleccionado los distintos términos, conceptos o expresiones que los sujetos de la investigación vinculan a cada una de las categorías anteriores. Presentemos, para cada de ellas, estos resultados junto con su frecuencia asociada.

La Tabla 3, pone de manifiesto que la mayoría de los sujetos, treinta y dos del total, conciben la estadística como una rama de conocimiento, muy en conexión, con los ocho que la consideran una ciencia o disciplina. Resulta significativo que dos de los sujetos se refieren a ella como un instrumento o método, mientras que tres de ellos no aportan información en este sentido.

Tabla 3. Codificación de las respuestas asociadas a V1.

Respuestas asociadas a V1	Frecuencia
Rama de conocimiento	32
Ciencia/Disciplina	8
Parte/ Apartado de	7
Nulo	3
Instrumento/ Método	2
Otros	1
Total	53

Además, es clara la vinculación que establecen entre la Estadística y las Matemáticas, presente en cuarenta y cuatro respuestas (ver Tabla 4). Cabe destacar que la Matemática es el único ámbito del saber con el que relacionan a la Estadística.

Tabla 4. Codificación de las respuestas vinculadas a V2.

Respuestas asociadas a V2	Frecuencia
Matemáticas	44
Otras disciplinas	9
Total	53

Se observa, en los resultados de la Tabla 5, que los sujetos de investigación entienden como objetivo de la estadística la realización de estudios o informes, en muchos casos sin precisar su tipología (quince del total), y estudiar la probabilidad o el azar (doce del total). Además de estos, en menor medida, se señala como otra de sus pretensiones la recogida de información (manifestado por siete sujetos) o la representación de datos, curiosamente aspectos vinculados a la Estadística Descriptica. Es interesante destacar que cuatro sujetos no aportan respuestas en este sentido.

Tabla 5. Codificación de las respuestas vinculadas a V3.

Respuestas asociadas a V3	Frecuencia
Hacer estudios/ informes	15
Probabilidad/ azar	12
Recoger información	7
Presentar/ Representación/ Expresar datos	6
Nulos	4
Analizar/caracterizar e interpretar	3
Concluir	3
Otros	3
Total	53

Los sujetos de investigación tienen dificultades a la hora de identificar los conceptos que involucra la Estadística para satisfacer sus objetivos como ámbito de conocimiento (ver Tabla 6). Así, dieciséis de ellos no identifican ninguno. Los conceptos más recurrentes son el trabajo con datos, presentes de forma explícita en quince respuestas e implícita en cinco (las referentes a las variables estadísticas). Por otro lado, las probabilidades y el estudio de sucesos centran un número significativos de respuestas siete y seis respectivamente

Tabla 6. Codificación de las respuestas vinculadas a V4.

Respuestas asociadas a V4	Frecuencia
Nulos	16
Datos (sin concretar su naturaleza)	15
Probabilidad	7
Sucesos/ fenómenos/ Hechos	6
Variables (cuantitativas/cualitativas/sin especificar)	5
Otros:	4
Total	53

En relación a las aplicaciones de la Estadística, encontramos que la mayoría de los sujetos (un total de treinta y dos) no distingue ninguna. En menor medida, siete del total, indican que se aplica a hechos o acontecimientos, sin concretar más sus respuestas, al igual que lo hacen los cuatro que señalan que la Estadística tiene aplicaciones en la vida real. Se observa que seis de los sujetos destacan sus aplicaciones al estudio de poblaciones, muestras o conjuntos (ver Tabla 7).

Tabla 7. Codificación de las respuestas vinculadas a V5.

Respuestas asociadas a V5	Frecuencia
Nulos	32
Hechos/ acontecimientos	7
Poblaciones/ muestras/ conjuntos/ individuos	6
Vida real	4
Datos numéricos	2
Estudios	1
Otros	1
Total	53

A partir del análisis de cada variable, estamos en disposición de construir una definición de Estadística que sea representativa de la muestra que disponemos. Podemos decir que, los futuros maestros entienden que la Estadística es "una rama de conocimiento vinculada a las matemáticas que tiene como objetivo la realización de estudios, generalmente, sobre datos".

5. Conclusiones

Los resultados que revela el análisis de las respuestas muestran que los futuros maestros tienen una idea poco precisa sobre qué es la Estadística. En líneas generales, la vinculan a las Matemáticas, como una de sus ramas, y determinan que entre sus objetivos está la elaboración de informes, para los que se requiere de datos, sin especificar la naturaleza de éstos.

Determinar cuál es el objetivo de la Estadística pone de manifiesto la variedad de respuestas que proponen los futuros maestros, generalmente vinculadas a la Estadística Descriptiva y en menor medida con la Probabilidad, tal y como lo confirman los conceptos que proponen como característicos de su estudio. Si bien, se muestra falta de concreción en ellos, aportando respuestas muy generales en este sentido. Es destacable que los futuros maestros, en su mayoría, no son capaces de identificar situaciones o contextos concretos donde puede aplicarse la Estadística.

La definición de Estadística que hemos construido a partir de las repuestas propuestas por los futuros maestros, que consideramos representativa en ellos, dista de la mayoría de definiciones que recogemos en este trabajo. Pese a de ello, destacamos cierta proximidad a la que propone Moore, al identificar dos aspectos comunes en ambas: su vinculación a la Matemática y la importancia conferida a los datos.

En suma, esta experiencia pone sobre aviso a los formadores de maestros acerca de las ideas que en ellos subyacen sobre la Estadística, advirtiendo sobre el tipo de aspectos que han de enfatizarse más en su formación: los objetivos de la Estadística, los conceptos que ella requiere y sus aplicaciones.

Referencias

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C. y Cañadas, G. (2013). Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: Un estudio con futuros profesores Defining probability and conditional probability: A study with prospective teachers. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática, 8*(1), 75-91.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Disponible en: www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25*(4), 527-547.

Edwards, B. y Ward, M. B. (2008). The role of mathematical definitions in mathematics and in undergraduate mathematics courses. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection. research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 223-232). Washington, DC: The Mathematical Association of America (MAA).

Estrada, A. (2009). Las actitudes hacia la estadística de los profesores en formación. Incidencia de las variables género, especialidad y formación previa. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estocástica* (pp. 117-131). Melilla: Universidad de Granada.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: meaning, components, responsibility. *International Statistical Review*. *70*(1), 1-25.

Gómez, M. A. (2005). *Inferencia estadística*. Madrid: Díaz de Santos.

Real Academia Española. (s.f.). *Diccionario de la lengua española.* Disponible en lema.rae.es/drae/?val=estadística.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

Schwab, J. J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N. J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum and liberal education* (pp. 229-272). Chicago: University of Chicago Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, L. Puig, M. Sierra y M. Socas (Eds.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.125-154). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona- Horsori.

Análisis de libros de texto. Estadística de libros empleados en Andalucía

Jesús del Pino Ruiz[1] *y Antonio Estepa Castro*[2]

[1]jpr00026@red.ujaen.es, Universidad de Jaén
[2]aestepa@ujaen.es, Universidad de Jaén

Resumen

En este artículo mostramos la investigación sobre el análisis de libros de texto en el estudio del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. A su vez presentamos los diferentes marcos teóricos que existen para realizar estos estudios. Por último hemos realizado un estudio sobre los libros más usados en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en Andalucía. Este trabajo trata de dar respuesta a alguna de las primeras cuestiones que se plantean cuando iniciamos una investigación sobre libros de texto, entre las que destacamos dos preguntas: ¿Qué marco teórico utilizaremos? Y ¿qué libros analizaremos?

Palabras clave: Libros de texto, EOS, TIMMS, estadística.

1. Introducción

El libro de texto ha sido y es ampliamente utilizado en la Educación no universitaria. En dichos textos se pretende adaptar el saber científico al nivel de enseñanza al que se dirige el texto, es lo que conocemos en Didáctica de la Matemática como transposición didáctica Chevalard (1991). El proceso de trasposición didáctica es largo y complejo y el resultado final condiciona los aprendizajes logrados dentro de aula. Por estas razones y las que veremos a continuación, el estudio de los libros de texto escolares cobra una especial relevancia cuando tenemos interés por indagar algún tópico de currículo actual.

El trabajo que presentamos es parte del comienzo de un proyecto de investigación en el que pretendemos analizar la dispersión estadística desde el punto de vista didáctico en la Educación Secundaria Obligatoria. En la bibliografía analizada no hemos encontrado el análisis de este tema en dicho nivel de enseñanza en el currículo actual.

Comenzaremos nuestra investigación con un análisis de libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. Para acometer esta tarea surgen, de manera natural, varias cuestiones: a) que papel han desempeñado y desempeñan los libros de texto b) que libros de texto se utilizan en la actualidad en el tópico y nivel que nos interesa, c) los debo analizar todos o solamente una muestra de ellos, d) como los debo analizar, es decir que marco teórico debo seguir para fundamentar nuestro estudio.

2. Los libros de texto de Matemáticas

Hay muchos trabajos sobre investigaciones de libros de texto de Matemáticas, debido al espacio disponible, expondremos algunas ideas sobre el tema, de interés para el presente trabajo y desarrollos futuros.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 117-124). Granada, 2015.

El objetivo de todo libro es trasmitir hechos e ideas, en consecuencia, si el contenido del libro es propio de un campo de conocimiento su fin es trasmitir hechos e ideas de dicho campo. Un tipo de libro especial es el libro de texto que se escribe con el objetivo de desarrollar un programa de enseñanza previamente establecido. Si el programa es de Matemáticas tenemos: el libro de texto de Matemáticas.

Libros con contenido matemático han existido desde la antigüedad, cuyo objetivo era la transmisión de contenidos matemáticos a los lectores, así tenemos el libro de Ahmes, escrito antes del año 1.700 a. C., dirigido a los funcionarios reales cuyo contenido era problemas sobre capacidades, áreas dimensiones de terraplenes etc. El primer libro de Matemáticas propiamente dicho, en el sentido de que partiendo de unos axiomas se desarrolla una teoría matemática, es los "*Elementos*" de Euclides, escrito alrededor del siglo III a. C. (Aleksandrov et al. 1988), podemos decir que es el libro de texto de Matemáticas por excelencia, al menos por su duración en el tiempo, ya que muchos de sus contenidos se enseñan aún en nuestras escuelas. El primer libro de Matemáticas en España, escrito en lengua popular fue *"Summa de l'art d'Arimètica"* de Frances Santcliment, que enseñó Aritmética en Barcelona y Zaragoza, escrito en el 1482, en catalán y traducido unos años más tarde al castellano (Veguín Casas, 2010). Desde este texto a los actuales, se ha ido configurando la cultura escolar del libro de texto. Porque la evolución de la Educación Matemática y de la matemática escolar y su enseñanza, en gran medida, se puede estudiar a través de los libros de texto que la han apoyado, ya que, el desarrollo curricular siempre ha estado liderado por los libros de texto (Howson, 2013).

Hasta el presente el saber matemático ha estado institucionalizado, seleccionado, secuenciado y debidamente estructurado en el libro de texto, proporcionando seguridad al enseñante. El libro de texto supone un esfuerzo de síntesis, planificación estructuración y acomodación de los contenidos dispuestos por el curriculum, en consecuencia, el libro de texto se ha considerado como el paradigma del conocimiento que se debe trasmitir a los estudiantes (Rico, 1990).

Howson (2013, pp. 652-654) basándose en su larga experiencia de escribir y revisar libros de texto apunta los atributos que debe tener un libro de texto para un revisor del mismo o para un usuario:

- Coherencia matemática. Claridad y precisión de las explicaciones.
- Claridad en la presentación de núcleos. El rango, cantidad y calidad de los ejercicios.
- Conexión con la vida real y con otras asignaturas tanto en la explicación como en los ejercicios.
- Balance de género, racial y social.
- El uso de lenguaje apropiado para desarrollar las habilidades lecto-escritoras.
- Se tiene en cuenta la evidencia de resultados de investigaciones y la experiencia profesional acumulada.
- Previsión de las diferentes capacidades de los estudiantes que van a emplear el libro.
- Atractivo físico del libro: formato, letra, color, ilustraciones…
- Algunos signos de originalidad en el material, ejemplos o ejercicios.
- La previsión de guías del profesor que vayan más allá de un libro de respuestas y compense la doble demanda de desarrollo de la comprensión matemática de los profesores y apoyo en la gestión de las lecciones. (Howson, 2013, p. 654)

El libro de texto ha significado un apoyo inestimable en la enseñanza no universitaria, en la actualidad, en la era de la información, nos podíamos plantear sobre la continuidad en el sistema escolar del libro de texto de papel. Las nuevas tecnologías nos presentan textos de la misma calidad o superior a los escritos en papel, superan a estos en que pueden introducir textos o representaciones dinámicas, almacenar cientos de libros en el soporte (Ipad, libro electrónico, portátil…), fácil actualización, ahorro de papel y, en consecuencia, de árboles, etc…. Además, si los estudiantes usan soporte electrónico no tendrán que cargar con varios libros de camino al colegio, se eliminan problemas futuros de espalda, etc… En consecuencia, con estas ventajas parece probable que en pocos años, el libro de texto en papel será sustituido por su equivalente electrónico. Pero no será así, el libro en papel y el libro electrónico coexistirán en nuestra sociedad, como lo hace el resto de literatura, los periódicos en papel y su edición electrónica, los artefactos de cálculo y el cálculo con lápiz y papel,… En definitiva como dice Usiskin (2013) se llevarán a cabo investigaciones de comparación entre libros de texto y libros en medios electrónicos, pero las decisiones con respecto a su uso tenderán a hacerse independiente de los resultados de dichas investigaciones.

3. Investigación didáctica sobre libros de texto

Aunque el libro de texto ha estado presente en la enseñanza de las Matemáticas, no se comenzó a investigar sobre los mismos, desde el punto de vista didáctico, hasta la década de los 80, creciendo rápidamente en las tres décadas posteriores (Fan et al., 2013). Dicho interés, no ha decrecido en la actualidad, ya que la prestigiosa revista *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, ha dedicado su volumen 45, número 5 del año 2013 al tema monográfico "*Investigar libros de texto en Educación Matemática*". En este número se hace una recopilación de la investigación pasada, presente y las perspectivas de futuro.

En cuanto a Educación Estadística hemos revisado la Web de la "International Association for Statistical Education" que contiene una gran cantidad de trabajos de investigación en Educación Estadística en general, pero en el caso de los libro de texto, apenas hemos encontrado una veintena de trabajos, lo que representa una pequeña proporción.

El lugar donde más libros de texto se han analizado, desde el punto de vista didáctico en distintos tópicos estadísticos, es en la Universidad de Granada, donde se han utilizado libros de Educación Primaria, Secundaria y Universidad. Donde destacamos desde el primero Ortiz (1999) hasta algunos de los últimos como Gea, Batanero, Cañadas y Arteaga (2013) o bien, Gómez, Ortiz y Gea (2014).

4. Algunas metodologías para el análisis de libros de texto en matemáticas.

4.1. El tetraedro socio-didáctico (SDT.)

Es un modelo socio-cultural desarrollado por Rezat y Sträßer (2012) que sirve para analizar "artefactos", uno de ellos es el libro de texto. Rezat diseño el primer tetraedro para analizar libros de textos y material TIC y Sträßer lo generalizó para los "artefactos" en general. La perspectiva que aporta es que los libros de texto estructuran el proceso de aprendizaje de las matemáticas haciendo énfasis en que el alumno no elige el libro de texto, sino el profesor, que utiliza uno u otro libro con un objetivo concreto.

El objetivo de este modelo es analizar la interacción entre los profesores, los alumnos, los materiales y los roles que cada uno tiene en la educación, su potencia radica en que nos permite analizar el libro de texto como el nexo entre las personas y las matemáticas, como elemento social y cultural y como indicábamos en la introducción como transposición didáctica de la ciencia matemática, es decir, como matemáticas que pueden ser comprendidas por la institución que conforman los alumnos de una escuela. (Rezat, 2013)

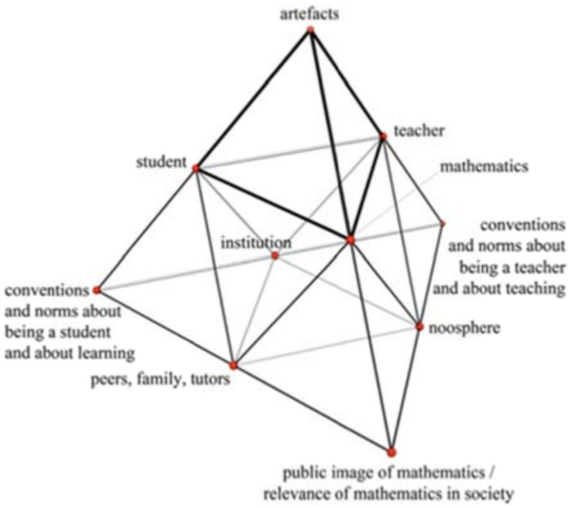


Figura 1. Tetraedro socio-didáctico. (Rezat y Sträßer, 2012, p. 648)

4.2. Método basado en el Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias (TIMMS.)

El TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study) es una evaluación internacional de las habilidades en matemáticas y ciencias de corte similar al europeo PISA que analiza las competencias generales. Se hace desde 1995 con una frecuencia de 4 años.

Este marco se basa principalmente en el curriculum, esta es la pieza clave del sistema, y presenta un modelo trinitario de curriculum: el curriculum pretendido, el curriculum implementado y el curriculum conseguido. Los libros de texto se hayan a medio camino entre el curriculum pretendido y el implementado, como piedra angular de transmisión entre el curriculum pretendido e implementado. En lo que como vemos en la siguiente figura, Valverde presenta como curriculum potencialmente implementado. (Valverde, et al. 2002).

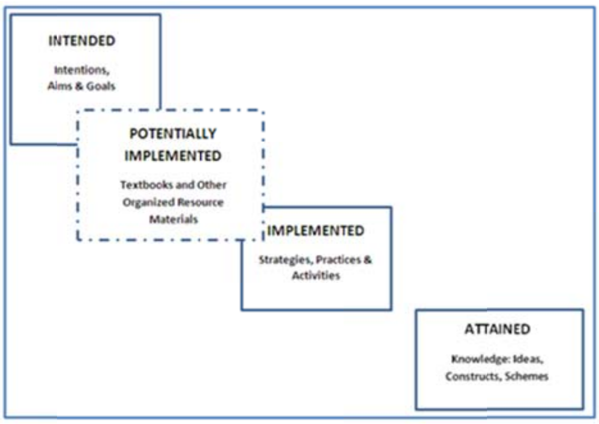


Figura 2. Los libros de texto en el modelo TIMMS. (Valverde et al. 2002, p .13)

El TIMMS nos proporciona unas herramientas para analizar libros de texto que en ocasiones se suele combinar con la matriz de River. (Mikks, 2000; Rivers, 1990.) En la primera versión de este marco se analizan dos dimensiones que resultan en tres elementos: estructura (que contiene dos elementos, estructura en sí y contenido) y aspiraciones (que solo se contiene a si mismo como elemento.) Más tarde Morgan (2004) le añadió al método los elementos para el análisis lingüístico como tercera dimensión.

La potencia de este marco es que analiza varios niveles de concreción a la vez ya que estudia la conexión entre curriculum y libros de texto.

4.3. Método basado en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS.)

El Enfoque Onto-Semiótico (EOS) fue desarrollado por Godino y colaboradores en diferentes trabajos desde principios de los 90 (Godino y Batanero, 1994; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006); Godino, Contreras y Font (2006); Godino y Font (2007); entre otros)

En el marco teórico se distinguen seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. (Godino, Batanero y Font, 2007) A su vez, para realizar un análisis epistémico hay que describir los significados parciales de los objetos matemáticos. En el EOS se establece que el significado global de referencia de un objeto matemático está compuesto de dos nociones: el significado global (u holístico) que aglutina los diferentes significados parciales del objeto y el significado de referencia que son:

> Los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático (Pino-Fan, Godino y Font, 2011, p.147)

Sin embargo como indica Godino, (Godino y Font, 2007) los sistemas de prácticas no son útiles a la hora de hacer un análisis "fino" de la actividad didáctica, para ello establece las seis entidades u objetos matemáticos primarios Godino (2002) y Godino y Font (2007) que vamos a analizar y que son:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...)." (Godino y Font, 2007, p.3)

Existe una interesante herramienta para realizar el análisis que en el EOS denominan Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008):

> Es una herramienta que da cuenta de un proceso complejo y dinámico,- la emergencia de objetos y significados- y que puede ser cumplimentada de varias maneras; lo cual pone de manifiesto la relatividad de los objetos y significados matemáticos (Castro, Godino y Rivas, 2010, p. 267) .

La ventaja de utilizar esta herramienta es que sistematiza el análisis de objetos y significados permitiendo un gran margen de maniobra.

5. Determinación de los libros de texto que utilizaremos en la investigación.

Una vez hemos contextualizado la situación del estudio de los libros de texto y los principales marcos teóricos en los que fundamentar los análisis de estos, presentamos el modo en que hemos elegido los libros de texto que utilizaremos como muestra para realizar nuestro estudio.

Como pertenecemos a la Comunidad Autónoma de Andalucía, hemos creído que debemos extraer la muestra de libros de los utilizados en esta Comunidad en los cuatro cursos de Educación Secundaria Obligatoria.

Tabla 1. Número de centros públicos andaluces que utilizan cada editorial por curso, en centro públicos y privados.

	Curso											
Editorial	1º		2º		3º		4ºA		4ºB		Total	
	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi
Anaya	73	28	73	28	76	25	67	18	63	21	352	120
Bruño	22	3	22	3	21	3	9	1	8	1	82	11
Casals	2		3		2		0		0		7	0
Edelvives	4	3	4	3	4	4	1	3	1	4	14	17
Editex	0		0		0		0		1		1	0
Everest	0		1		0		0		0		1	0
Guadiel-Edebé	1	4	2	6	1	4	2	2	2	2	8	18
McGraw Hill	0		0		0		3		3		6	0
Oxford	19	5	21	4	18	5	19	6	20	6	97	26
Santillana	32	11	31	14	33	9	44	4	42	5	182	43
SM	33	39	28	45	33	41	35	31	36	42	165	198
Vicen Vives	1	2	1	1	2	2	1	0	1	0	6	5
Total	187	95	186	104	190	93	181	65	177	81	921	438
No consigna	23	14	24	5	20	16	29	44	33	28		236

CPu = Colegio Público; CPi = Colegio Privado

Para ello hemos analizado los datos de la página web de la Junta de Andalucía (Consulta selección de libros de texto por centro, 2014) para el curso 2013/14 donde la mayoría de los centros consignan los libros que emplean, en nuestro análisis hemos utilizado los 210 centros públicos que han consignado los libros que emplean y los 109 centros privados ubicados en las capitales de provincia que igualmente han consignado los libros que utilizan. Esta página fue consultada por Gómez (2014), para el curso 2011/12. Hemos obtenido los resultados que se presentan en la tabla 1:

Con estos datos tenemos que las editoriales más usadas en los centros públicos son Anaya y Santillana, seguidos por Oxford y Bruño, y en los centros privados las editoriales mayoritarias son SM y Anaya.

En consecuencia, utilizaremos en nuestro estudio los libros de los cuatro cursos de Anaya (472), SM (363) y Santillana (225). Las cifras entre paréntesis corresponden al número total de centros, públicos y privados, que emplean cada editorial (corresponden a las sumas CP_U + CP_I totales de la tabla 1)

6. Conclusiones.

Sabemos de la importancia que el profesorado no universitario, en general, concede a los libros de texto, hecho que hemos visto constado en la investigación didáctica sobre los mismos. También hemos visto someramente las herramientas que se pueden utilizar para el análisis de dichos libros y la muestra que podemos utilizar. En consecuencia, parece razonable que desde la educación matemática en general, y estadística en particular, prestemos especial atención al análisis de los libros de texto en un tema como la dispersión estadística, que aún no ha sido realizado en el curriculum actual de la ESO.

Referencias

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A. y otros (1988). *La matemática: su contenido, método y significado*. (Vol. 1). Madrid: Alianza Universidad. (Primera edición castellana de 1973).

Castro, W. F., Godino, J. D., y Rivas, M. (2010). Competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 259-270). Lleida: SEIEM

Chevallard, Y. (1991). La *transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble*: La Penseé Sauvage

Junta de Andalucía (2014) Consulta selección de libros de texto por centro. Sevilla: Autor: Recuperado el 3 de abril de 2014, de www.juntadeandalucia.es/educacion/educacion/nav/contenido.jsp?pag=/Contenidos/PSE/Becas/Gratuidadlibros/Enlaceconsultalibros&vismenu=0,0,1,1,1,1,0,0,0

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013) Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM. The international Journal on Mathematics education*, 45 (5), 633-646.

Gea, M., Batanero, C., Cañadas, G. y Arteaga, P. (2013). La organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 373-381). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, (2.3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D, Batanero, C y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The international Journal on Mathematics education*, 39 (1), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Recuperado el 3 de abril de 2014, de: www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., y Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. ICME 11, Topic Study Group 27, *Mathematical Knowledge for Teaching*. Monterrey, Mexico.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gómez-Torres, E., Ortiz, J. J. y Gea, M.M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 5, 49 – 71.

Howson, G. (2013) The development of mathematics textbooks: historical reflections from a personal perspective. *ZDM. The international Journal on Mathematics education*, 45 (5), 647-658.

Mikk, J. (2000). *Textbook Research and Writing*. Oxford: Lang.

Morgan, C., (2004). *Writing mathematically: The discourse of investigation* London: Falmer Press.

Ortiz de Haro, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J.D, y Font, V., (2011) Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*. 13 (1), 141-178.

Rezat, S. (2013) The textbook-in-use: students' utilization schemes of mathematics textbooks related to self-regulated practicing. *ZDM. The international Journal on Mathematics education*, 45 (5), 659-670.

Rezat, S., y Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 44(5), 641–651.

Rico, L. (1990) Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En: LLinares y Sánchez (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Alfar. Sevilla. Págs 17 - 62.

Rivers, J. (1990). Contextual analysis of problems in Algebra 1 textbooks. Paper presented at the *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, Boston, MA, April

Shen, K., Crossley, J. N., y Lun, A. W.-C. (1999). *Nine chapters on the mathematical art: Companion and commentary*. Oxford: Oxford University Press.

Usiskin, Z. (2013). Studying textbooks in an information age – a United States perspective. *ZDM. The international Journal on Mathematics education*, 45 (5), 713-723.

Valverde, G. A., Bianchi, L.J., Wolfe, R.G., Schmidt, W.H., and Houang, R.T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Veguín, M. V. (2010). *Historia de la matemáticas en la Península Ibérica: Desde la Prehistoria hasta el siglo XV*. Barcelona: Editorial Reverté.

Aprendizagem de conteúdos de estatística por meio de um trabalho com recursos informáticos para alunos do ensino superior

Gonçalves Gabriela[1], Jorge Mendonça[2] y Teresa Ferro[3]

[1]gmc@isep.ipp.pt, [2]jpm@isep.ipp.p, [3]tmf@isep.ipp.pt

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Resumo

Este trabalho teve como objetivo mostrar que é possível favorecer, por intermédio de atividades que envolvem o trabalho com projetos, as competências que consideramos essenciais na Educação Estatística: a literacia, o pensamento e o raciocínio estatísticos. Para tal, foi pedido aos alunos que desenvolvessem uma ferramenta computacional simples (linguagem JAVA) de ajuda à resolução dos exercícios de estatística da unidade curricular de Matemática Computacional (U.C.). Desta forma pretendemos comparar o desempenho dos alunos que aderiram ao trabalho relativamente aos conceitos em causa, com o desempenho dos restantes alunos. Pretendemos ainda avaliar a influência motivacional de um recurso informático na aprendizagem dos conceitos estatísticos. Os resultados mostram que os alunos que participaram no trabalho obtiveram os melhores resultados.

Palavras chave: Estatística, Inferência, Software, Ensino Superior.

1. Introdução

Na sociedade vivemos rodeados por uma quantidade de informação tão grande que não podemos deixar de pensar o quanto a Estatística nos é útil e o quanto esta ciência se vem tornando como uma das competencias mais importantes para quem necesita de tomar decisões.

A Estatística desempenha um papel fundamental neste desenvolvimento uma vez que proporciona ferramentas metodológicas gerais para analizar a variabilidade, determinar relações entre variáveis, desenhar as suas próprias experiênias e tomar decisões perante situações de incerteza (Batanero, 2003). Assim, torna-se necessário que a Escola prepare os seus alunos para pensar e refletir sobre a sociedade que os rodeia de forma crítica e criativa, não actuando apenas a partir de verdades adquiridas que lhe são impostas (Pimenta, 2009).

Embora a Estatística esteja associada ao crescimento e ao avanço tecnológico, a sua utilização é reconhecida desde os tempos remotos. A chegada de computadores cada vez mais poderosos fez com que os dados estatísticos pudessem ser tratados de uma forma mais ágil e a Estatística se tornasse mais acessível aos seus usuários.

Fernandes et al. (2009) afirmam que o aluno, recorrendo ao computador, pode construir uma simulação da realidade, isto é, um modelo simplificado do fenómeno em questão, manipulável por ele (aluno) e condensado no tempo. O facto de os alunos utilizarem programas de simulação torna possível a exploração e a descoberta de conceitos que de outro modo seriam muito mais abstratos.

A aprendizagem de uma U.C. establece por um lado uma relação entre o aluno e os seus conteúdos programáticos e, por outro lado uma relação entre o aluno e as ferramentas de ensino

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 125-133). Granada, 2015.

e de aprendizagem utilizadas, cumplicidade da qual poderá depender o grau de implicação dos alunos e consequentemente a performance dos mesmos (Simon, 2000).

A informática é uma ferramenta facilitadora da aprendizagem por permitir ao aluno, individualmente a aquisição de habilidades. Em específico, no caso das distribuições de probabilidades e intervalos de confiança - área a que corresponde este trabalho – a tecnologia computacional tem mostrado um enorme potencial para ajudar os alunos a compreender conceitos difíceis (Ben-Zvi, 2000; Mills, 2002; Chance & Rossman 2006).

Através da simulação os alunos podem explorar e apreender conceitos e princípios, (distribuições de probabilidade e distribuições estatísticas) que de outra forma seriam muito mais abstratos, contribuindo para melhorar a experiencia estocástica e a intuição probabilística. Consideramos que a tecnologia pode ajudar a visualizar e compreender as complexas relações existentes entre estes conceitos.

1.1. Referencial teórico

Os autores Chance, delMas e Garfield (2004) acreditam que quando se usam simulações (*applets* que permitem simular vários conceitos de Estatística) os alunos envolvem-se e interessam-se mais na aprendizagem da Estatística. Estes autores realizaram um estudo sobre distribuições amostrais com o uso de um software de simulação e concluiram que o facto de os alunos fazerem experiências com distribuições amostrais de diferentes tipos de populações e de diferentes dimensões não conduz necessariamente a uma compreensão conceptual dos principais conceitos em estudo.

Martínez e Martínez (2010) desenvolveram um software didático para a formação do pensamento estatístico que é utilizado desde o ano letivo 2007-2008 na disciplina de Estatística do curso de Agronomia da Universidade “Máximo Gómez Báez” de Ciego de Ávila (UNICA). Segundo os autores, este recurso informático é uma fonte de informação complementar aos livros, favorece a interpretação dos conteúdos estatísticos e motiva o aluno para o estudo. Os investigadores têm a convicção que o uso do software didático como estratégia constitui um meio que apoia, complementa e suprime carências detetadas no livro de texto, além de contribuir para a aprendizagem independente e consolidação dos conhecimentos dos alunos, motivando-os e levando a mudanças de atitude perante o tema e a perceber a sua importância como ferramenta de análise na resolução de problemas.

Cazares (2010) elaborou um artigo onde apresenta uma proposta alternativa para o ensino e aprendizagem da estimação de parâmetros por intervalos de confiança baseada na utilização de software (Fathom e Excel). O modelo utilizado no trabalho utiliza os princípios teóricos para criar Ambientes de Aprendizagem para o Pensamento Estatístico (AARE) definidos por Garfield e Ben-Zvi, (2008) e Cobb e McClain, (2004). Estes princípios baseiam-se num modelo construtivista e no uso de tecnologia na prática de ensino com o propósito de estimular os estudantes a construir o seu conhecimento mediante atividades que lhes proporcionem oportunidades de pensar, raciocinar e refletir sobre a sua aprendizagem, e, além disso, conduzindo à discussão e reflexão com os colegas da turma. No final do estudo o investigador concluiu que o uso da tecnologia (computadores) permitiu uma atividade cognitiva de maior nível do que o uso “fastidioso” mediante o cálculo de fórmulas. Ele considerou que a investigação conduziu a indícios positivos, mas que seria necessário aprofundar com outros estudos.

Filgueira, Carvalho, Figueiredo e Dantas (2007) efetuaram uma pesquisa com alunos da disciplina de Estatística Aplicada do curso superior de Tecnologia em Gestão Ambiental do Centro Federal de Educação Tecnológica-CEFET/RN, tendo como objetivo avaliar uma metodologia de ensino orientada para projetos e também o grau de satisfação do aluno no que diz respeito à importância da referida disciplina para o curso. Em relação aos resultados, os autores destacam uma melhoria na aprendizagem dos alunos, sendo a metodología utilizada eficaz.

2. Metodologia

Para atingir os fins propostos foi pedido aos alunos na U.C. de Matemática Computacional, do primeiro ano da Licenciatura em Engenharia Informática do Instituto Superior de Engenharia do Porto, com cerca de 386 alunos inscritos no ano letivo 2013/14 que realizassem um trabalho (Figura 1), cujo objetivo seria o desenvolvimento de uma aplicação computacional simples (linguagem JAVA), de apoio à resolução de alguns problemas de Estatística, nomeadamente envolvendo distribuições Binomial e Poisson, e ainda intervalos de confiança para grandes amostras.

Os conceitos estatísticos foram lecionados em 4 aulas teóricas (4h) e em 4 aulas teórico práticas (6h), onde os alunos resolveram exercícios práticos com a ajuda da máquina de calcular e de tabelas/formulários de Estatística.

2.1. Avaliação do trabalho de grupo

Este trabalho facultativo destinou-se a grupos de 4 ou 5 alunos. Cada grupo elaborou um relatório com um máximo de 15 páginas onde constavam exemplos de aplicação a problemas dados nas aulas TP relativamente às alíneas (a) e (b) do enunciado (Figura 1). Cada grupo implementou o código das subrotinas que calculavam os itens pedidos em (a) e (b) (Figura 1). Este código foi apresentado em anexo ao relatório. Depois de terminado o prazo de entrega, cada grupo reuniu com o docente para fazer uma demonstração da sua aplicação. O prazo de entrega dos relatórios foi de aproximadamente um mês e meio e estes foram colocados na plataforma Moodle. Foi atribuída uma bonificação no máximo de 1 valor em 20 aos alunos que realizaram este trabalho.

Trabalho de MATCP: Desenvolvimento de uma ferramenta computacional simples (linguagem JAVA) de ajuda à resolução dos exercícios de estatística da U.C. de MATCP.

Objetivo: Pretende-se o desenvolvimento de uma aplicação computacional simples (linguagem JAVA) de apoio à resolução de alguns problemas de estatística no âmbito da UC, nomeadamente:

a. Cálculo das probabilidades em distribuição Binomial e distribuição de Poisson;
b. Determinação de intervalos de confiança para grandes amostras:
    b1. Para a média de populações Normais;
    b2.Para diferença de médias de populações Normais.
    b3.Para proporções e diferença de proporções.

Figura 1. Enunciado do trabalho

A avaliação deste trabalho teve em conta os seguintes critérios de validação: executabilidade do trabalho; valores de probabilidade coerentes; média e desvio-padrão dentro dos padrões das respetivas distribuições e apresentação do relatório.

Depois de analisados os trabalhos concluimos que de um modo geral os alunos cumpriram os objetivos propostos. É de salientar que um dos grupos excedeu as espetativas ao desenvolver uma aplicação privada, para Android, do trabalho proposto.

2.2. Motivação para a utilização de recursos informáticos

Para avaliar esta componente foi realizado um questionário anónimo e facultativo com o objetivo de recolher a opinião dos alunos sobre o trabalho realizado, contemplando a implementação de uma ferramenta computacional de ajuda à resolução de problemas que envolvam conceitos de Estatística assim como o incentivo ao estudo e aprendizagem dos conceitos. Este questionário é apresentado no anexo A. O questionário foi colocado no "Google docs", no final do semestre e simultaneamente foi enviado um email aos alunos, no sentido de os informar da disponibilidade do mesmo e do tempo permitido para o seu preenchimento.

3. Análise de resultados

3.1. Análise do questionário

Dos 386 alunos 102 participaram no trabalho proposto e desses 63 responderam a um questionário (Anexo A) sobre a motivação dos alunos para este tipo de trabalho.

Os resultados globais dos questionários anónimos e facultativos realizados pelos 63 alunos do ano letivo 2013/14, revelam que a grande maioria dos alunos (54,8% mais 32,3% - Figura 2) concorda que a programação dos modelos estatísticos contribui de forma significativa para a consolidação dos seus conhecimentos, o que também se oberva quanto à facilidade na apendizagem destes conceitos (Figura 3).

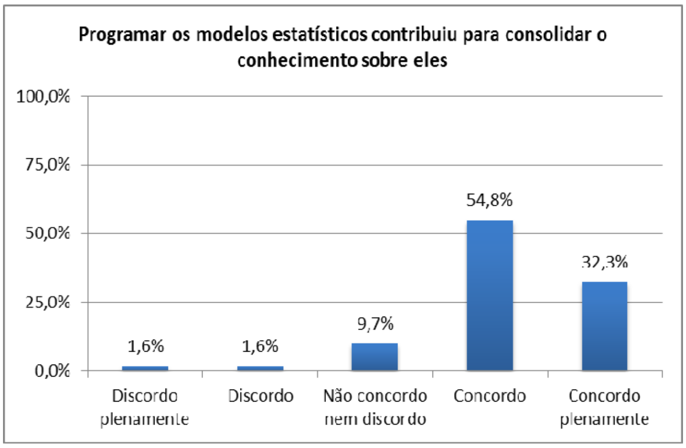


Figura 2. Programar os modelos estatísticos contribuiu para consolidar o conhecimento sobre eles.

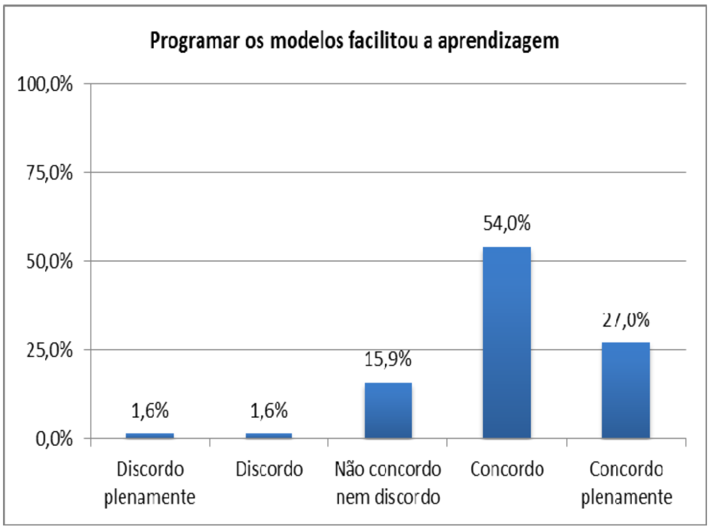


Figura 3. Programar os modelos facilitou a aprendizagem

O trabalho proposto revelou-se importante no seu relacionamento com diferentes unidades curriculares (52,4% + 31,7% - Figura 4) e o aumento da frequencia da realização do mesmo é tido como um ponto importante na aprendizagem voluntária e direta do aluno (52,4% + 36,5% - Figura 5).

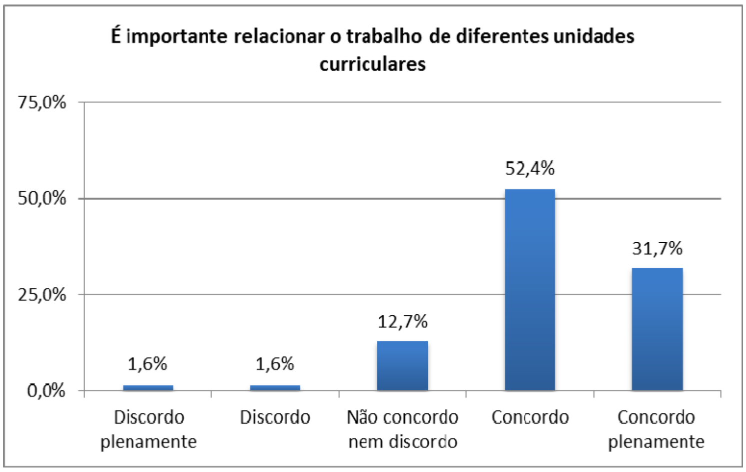


Figura 4. É importante relacionar o trabalho de diferentes unidades curriculares

Com o objetivo de complementar esta análise efetuou-se uma comparação entre dois grupos de alunos que se diferenciam pelo facto de frequentarem a U.C. pela primeira vez (Sim/Não) e a sua influência nas respostas às diferentes questões propostas. Realizou-se um teste de Mann-Whitney que revelou não existirem diferenças significativas entre os dois grupos conforme p-values que variam entre 0,126 e 0,719. Logo, a frequência pela primeira vez não é característica diferenciadora nas questões em análise.

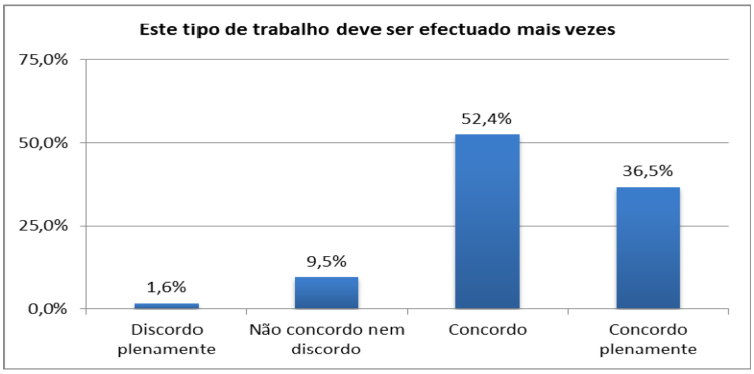


Figura 5. Este tipo de trabalho deve ser efetuado mais vezes

3.2 Análise das Classificações dos alunos

Para avaliar o impacto do trabalho compararam-se as classificações dos alunos na prova de Estatística que realizaram o trabalho proposto com as daqueles que não participaram. Observando a Tabela 1 (tabela obtida com aplicação do package SPSS) concluimos que os alunos que participaram no trabalho proposto obtiveram resultados superiores aos daqueles que não participaram.

Tabela 1. Classificações finais na U.C. de Estatística

	TrBonif.	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Nota Final	0	284	14,361	4,2189	0,2503
	1	102	16,071	2,736	0,2709

Tabela 2. Testes de Levene e t-student (Nota final)

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means			Mean difference			
	F	Sig.	t	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	12,653	0	-3,812	384	0	-1,7093	0,4484	-2,5909	-0,8278
Equal variances not assumed			-4,634	275,466	0	-1,7093	0,3689	-2,4355	-0,9832

Os resultados são estatisticamente significativos conforme podemos observar na Tabela 2. Foi realizado um teste de Levene para averiguar a igualdade das variâncias dos dois grupos (realização de trabalho - Sim/Não) que com um p_value de 0 (<0,05) leva à rejeição da hipótese nula de serem iguais. Concluimos que as variâncias dos dois grupos são diferentes. Para averiguar se a diferença amostral entre os dois grupos é estatisticamente significativa foi efetuado um teste t_student para amostras independentes (Tabela 2.). O resultado deste teste indica que se pode rejeitar a hipótese nula de terem médias semelhantes (p_value=0<0,05). Como se pode observar no intervalo de confiança (95%) a diferença varia entre -2,44 e -0,99, com vantagem para os alunos que realizaram o trabalho. Em resumo podemos concluir que os resultados amostrais podem ser extrapolados para a população estabelecendo que os alunos que realizam os trabalhos têm classificações significativamente melhores do que os que não o realizam.

4. Conclusões

Tal como relatam os estudos de Filgueira, Carvalho, Figueiredo (2007) neste estudo também destacamos uma melhoria na aprendizagem que se refletiu nas classificações obtidas na prova de Estatística. Face aos resultados obtidos no questionário e nas classificações dos alunos na prova de Estatística, é nossa opinião que a utilização de este tipo de trabalho motivou os alunos para uma melhor aprendizagem dos conceitos de Estatística. Os resultados vêm de encontro às conclusões dos estudos aqui revistos.

Comparativamente com os estudos aqui revistos, neste estudo destaca-se o desenvolvimento de uma aplicação computacional na linguagem JAVA, de apoio à resolução de alguns problemas de Estatística.

Em resumo, a análise dos resultados do questionário mostrou que a maioria dos alunos concorda que a programação dos modelos estatísticos contribui para a aprendizagem e consolidação dos mesmos. Além disso, concordam que o trabalho proposto é transversal a varias U.C. e, por esta razão, são de opinião de que este tipo de estudo deverá ser realizado mais vezes.

Perante os dados obtidos, recomendamos que se aplique mais vezes este tipo de trabalho, uma vez que, além de contribuir para a aprendizagem e consolidação do conhecimento, motiva os alunos levando-os a mudanças de atitude perante os conceitos de estatística e perceber a sua importância na análise da resolução de problemas.

Referências

Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidade. *Educación y Pedagogia, 35*, 37-64.

Ben-Zvi, D. (2000). Towards understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematics Thinking and Learning*, 2(1&2), 127-155.

Cazares, S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje: Un enfoque alternative para la enseñanza y aprendizaje de la inferência estadística. *RMIE, 15*, 423-452.

Chance, B., delMas, R. C., & Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 295-323). Amsterdam: Kluwer.

Chance, B., & Rossman, A. (2006). Using simulation to teach and learn statistics. *Proceeding of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia): IASE,

Cobb, P. & McClain, K. (2004). Principles of instructional design for supporting the development of students statistical reasoning. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 375-395). Nova Iorque: Springer.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. & Díaz, C. (2009). A simulação em probabilidades e estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, 8(1&2), 161-183.

Filgueira, J., Carvalho, C., Figueiredo, L. & Dantas, M. (2007). Metodologia de ensino orientada para projetos: Um estudo de caso da disciplina de estatística aplicada do curso de Gestão Ambiental do CEFET/RN. *Holos, 23*.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008).Creatting statistical reasoning. In , J. Garfileld & D. Ben-Zvi (Eds.), *Developing students statistical reasoning*. (pp.91-114). Nova Iorque: Springer.

IBM Corp. Released (2013). *IBM SPSS Statistics for Windows*, Version 22.0. Armonk, NY:IBM Corp.

Martinez, N. & Martinez, O. (2010). Software didático para la formación de pensamiento estadístico. *Educación y Sociedad*, 8(3). Online: http://www.ucp.ca.rimed.cu/edusoc.

Mills, J. D. (2002), Using computer methods to teach statistics: a review of the literatura. *Journal of Statistics Education 10*(1).

Simon, T. (2000). Appréciation d'une technologie de l'information et de la communication par des étudiants universitaires et performances disciplinaires. *In actes du Congrès International Francophone.* Nanterre. *ADMES-AIPU.*

Anexo A – Questionário sobre a utilização de uma ferramenta computacional na aprendizagem dos conceitos estatísticos

1. É a primeira vez que frequento esta U.C.
    - Sim
    - Não
2. Gosto de trabalhar em grupo
    - Discordo plenamente
    - Discordo
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo
    - Concordo plenamente
3. Gosto de programar em Java
    - Discordo plenamente
    - Discordo
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo
    - Concordo plenamente
4. A programação para mim não é um problema
    - Discordo plenamente
    - Discordo
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo
    - Concordo plenamente
5. Todos os elementos do grupo contribuíram da mesma forma para o trabalho
    - Discordo plenamente
    - Discordo
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo
    - Concordo plenamente
6. Programar os modelos estatísticos contribui para consolidar o conhecimento sobre eles
    - Discordo

    - Discordo plenamente
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo
    - Concordo plenamente
7. Programar os modelos facilitou a aprendizagem
    - Discordo
    - Discordo plenamente
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo
    - Concordo plenamente
8. A programação dos modelos implicou demasiado trabalho, o tempo necessário para o fazer prejudicou o estudo
    - Discordo
    - Discordo plenamente
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo
    - Concordo plenamente
9. O trabalho contribui para melhorar as minhas qualidades como programador
    - Discordo
    - Discordo plenamente
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo
    - Concordo plenamente
10. É importante relacionar o trabalho de diferentes unidades curriculares
    - Discordo
    - Discordo plenamente
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo
    - Concordo plenamente
11. Este tipo de trabalho deve ser efetuado mais vezes
    - Discordo
    - Discordo plenamente
    - Não discordo nem concordo
    - Concordo

Aproximación informal al contraste de hipótesis

Carmen Batanero[1] y Carmen Díaz[2]

[1]batanero@ugr.es, Universidad de Granada
[2]carmen.diaz@dpsi.uhu.es, Universidad de Huelva

Resumen

La inferencia estadística es una herramienta esencial en muchas ramas de la actividad humana, por lo que su enseñanza es generalizada en la universidad y formación profesional, en incluso en alguna modalidad de Bachillerato. A la vez encontramos una extensa bibliografía que critica su uso inadecuado. Ello ha originado una línea de investigación y desarrollo de lo que se conoce como *inferencia informal* que está cobrando un gran auge. En este trabajo se resumen las diferentes aproximaciones actuales al contraste de hipótesis y algunas dificultades frecuentes de comprensión de la inferencia. Finalmente se muestra un ejemplo de aproximación informal a la enseñanza del contraste, siguiendo la metodología de Fisher y se analizan las condiciones para que una aproximación informal pueda considerarse como inferencia. Estas aproximaciones informales, bien planteadas pueden contribuir a la educación del razonamiento del estudiante, antes de iniciar el estudio formal.

Palabras clave: Inferencia estadística, errores de comprensión, aproximaciones informales, inferencia informal.

1. Introducción

La inferencia estadística se incluye en la actualidad la mayoría de las carreras universitarias, y estudios de postgrado. También se introduce en Bachillerato en la especialidad en Ciencias Sociales del Bachillerato (MEC, 2007), donde encontramos la asignatura Matemática II Aplicadas a las Ciencias Sociales, con los siguientes contenidos:

- Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la binomial a la normal y Ley de los grandes números.
- Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales.
- Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida.
- Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida (p. 45476).

La importancia que se da a este tema se refleja en el hecho de que en las pruebas de acceso a la Universidad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales se ha venido proponiendo con relativa frecuencia un problema sobre contraste de hipótesis. Un ejemplo típico es el siguiente, propuesto en las pruebas de acceso en Andalucía en Junio de 2013 (prueba de reserva a), calificado con 2.5 puntos:

> Problema 1: Un director sanitario sostiene que el Índice de Masa Corporal (IMC) medio de los adolescentes de su distrito no supera el nivel 25 (sobrepeso). Para contrastar su afirmación toma una muestra aleatoria de 225 adolescentes que da como resultado un IMC medio de 26. Sabiendo que el IMC sigue una distribución Normal con desviación típica 5 discuta, mediante un contraste de

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 135-144). Granada, 2015.

hipótesis con $H_0 \equiv \mu \leq 25$, si la afirmación del director sanitario es correcta, con un nivel de significación del 5%.

Para resolver el problema, el alumno debe recordar que, para realizar un contraste de hipótesis sobre la media de la población μ, ha de utilizar la media de la muestra; en este caso $\bar{x} = 26$. También que, cuando la variable sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ la media muestral tiene una distribución normal $N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, donde n=225 es el tamaño de la muestra. Por tanto, la distribución de la media muestral tiene como desviación típica $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{225}} = \frac{5}{15} = 1.33$. Tipificando la variable media muestral obtenemos una distribución normal tipificada N (0,1): $\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - 25}{1/3} = (26 - 25) \times 3 = 3$

En dicha distribución normal tipificada la probabilidad de obtener un valor 3 o superior sería $P(Z \geq 3) = .0013$. Lo razonable sería rechazar la afirmación del director sanitario, pues si el índice medio de masa corporal en su distrito fuese igual o menor a 25; sólo 13 de cada 10000 muestras de 225 adolescentes darían un índice medio igual o mayor que 26. Como vemos, este problema requiere el uso de muchos conceptos y procedimientos: muestra y población, media muestral y poblacional, distribución de la media muestral, probabilidad condicional, hipótesis nula y alternativa, región de aceptación y rechazo, distribución normal, tipificación, uso de las tablas de la distribución normal tipificada.

En realidad, la resolución correcta de este problema no implica que el estudiante comprenda y discrimine todos estos conceptos ni que haya adquirido suficiente razonamiento estadístico, sino que recuerda y sabe aplicar una serie de fórmulas, que quizás no comprenda. Esta enseñanza soslaya también la problemática filosófica asociada y los errores de aplicación de la inferencia. Además, presenta la inferencia frecuencial como una metodología única, ocultando las diferentes aproximaciones y las controversias que dentro de la misma estadística ha tenido la inferencia (Batanero, 2000). En lo que sigue analizamos las aproximaciones más importantes a la inferencia, los errores más comunes en su interpretación y un ejemplo en que aplicamos el enfoque didáctico denominado *inferencia informal* (ver, por ejemplo, Rubin, Hammenran y Konold, 2006; Zieffler, Garfield, delMas y Reading, 2008; Rossman, 2008) analizando las condiciones para que dicho enfoque constituya en si mismo una verdadera inferencia estadística.

2. Inferencia estadística: diferentes aproximaciones

La inferencia estadística se creó como respuesta al problema consistente en obtener un conocimiento general (una nueva teoría científica) a partir del análisis de casos particulares (inducción empírica). Esto es, nace con la búsqueda de métodos que permitan justificar el razonamiento inductivo y la extensión de sus conclusiones, problema de gran importancia en las ciencias empíricas. Este problema ha ocupado a los filósofos y estadísticos por largo tiempo, sin que se haya obtenido una solución aceptada por consenso (Cabria, 1994; Rivadulla, 1991).

En el problema descrito el director sanitario quiere probar que el índice de masa corporal de los adolescentes en su distrito es adecuado, es decir, no supera el valor fijado de 25. Para comprobar si esta hipótesis es cierta, obtiene una muestra aleatoria de adolescentes en su distrito, los pesa y calcula el IMC medio. Como estos adolescentes son una muestra de todos los posibles en el distrito, estamos en un caso de razonamiento inductivo, porque queremos generalizar lo observado en casos particulares (la muestra) a algo más general (la población).

¿Cómo podríamos validar una generalización inductiva a partir de datos empíricos?

Popper (1967) propuso aceptar una teoría como provisionalmente cierta frente si, a pesar de numerosos intentos, no se consigue refutarla. Este autor sugirió poner a prueba las hipótesis científicas, mediante experimentos u observaciones y comparar los patrones deducidos de la teoría con los datos obtenidos. La teoría seria provisionalmente confirmada si los datos recogidos siguiesen estos patrones. En el ejemplo dado, si al medir el IMC en muestras sucesivas de adolescentes, siempre obtenemos un IMC medio dentro del rango esperado (menor que 25), se acepta la afirmación del director sanitario. Pero es importante ver que esta aceptación es sólo provisional. La confirmación de una teoría a partir de datos empíricos nunca es definitiva, porque los datos futuros podrían contradecirla. Así, basta que en una muestra el IMC sea muy alto para que no pueda sostenerse la afirmación del director sanitario. En cambio, si los datos del experimento se apartasen del patrón esperado, la teoría sería refutada, por lo que el rechazo de la hipótesis tiene mayor fuerza que su confirmación (basta que en una única muestra, como ha pasado al resolver el problema, los datos contradigan al director sanitario).

Estas ideas de Popper tuvieron una gran influencia en el desarrollo de la inferencia estadística. Ya que mediante un razonamiento inductivo no es posible llegar a la certidumbre de una proposición (verdad cierta), diversos autores intentaron calcular la probabilidad de que una hipótesis sea cierta (verdad probable) (Ridadulla, 1991; Batanero, 2000).

2.1. Probabilidad de una hipótesis e inferencia bayesiana

Es importante resaltar que la probabilidad de una hipótesis no tiene sentido en inferencia clásica frecuencial, donde la probabilidad se interpreta como límite de la frecuencia relativa en un gran número de repeticiones independientes de un experimento. La razón es que una hipótesis será cierta o falsa siempre; no puede ser cierta un porcentaje de veces en una serie de pruebas. En el ejemplo dado o es cierto o es falso que el IMC medio en la población no supera el valor 25.

Sin embargo, es posible asignar una probabilidad a las hipótesis dentro del marco de la *inferencia bayesiana*, donde la probabilidad se concibe como un grado de creencia personal que oscila entre 0 (falsedad absoluta) y 1 (certeza absoluta) (Gingerenzer, 1993; Lecoutre & Lecoutre, 2001). Es decir, si pedimos al director sanitario que nos exprese en una escala 0-1 su grado de creencia en que el IMC de los adolescentes no supera el valor 25, el director podría decirnos que su grado de creencia es .9. Podemos interpretar esta probabilidad subjetiva como una apuesta: el director sanitario está dispuesto a apostar 9 frente a 1 su afirmación. Para él hay 9 posibilidades de que el índice sea menor o igual a 25 a que supere este valor. De hecho, en la inferencia bayesiana podemos considerar dos probabilidades diferentes para una hipótesis:

- *Probabilidad inicial,* grado de creencia inicial en la hipótesis antes de recoger datos de experimentos donde se trate de poner la hipótesis a prueba (grado de creencia en la hipótesis antes de hacer el experimento; supongamos sigue siendo .9).
- *Probabilidad final,* grado de creencia en la hipótesis una vez se han recogido los datos. El teorema de Bayes servirá para combinar la probabilidad inicial con los datos y llegar a la probabilidad final de la hipótesis. Si el experimento tiene éxito, puede que cambie mi grado de creencia a .95. Si, como en el caso del problema, fracasa, el grado de creencia disminuye. No explicaremos como se llega a la probabilidad final, pero el lector interesado puede consultar el material de Díaz (2005).

Como la probabilidad subjetiva expresa un grado de creencia personal, otras personas, según su conocimiento podrían asignar inicialmente diferente probabilidad subjetiva a una hipótesis. En el ejemplo dado, se podría dar una probabilidad inicial .5 si no se tienen motivos para aceptar o rechazar la afirmación del director sanitario. El teorema de Bayes corrige poco a poco las diferentes asignaciones iniciales cuando aumentamos el tamaño de la muestra, de forma que se tiende a una probabilidad final no muy diferente, si la muestra es grande, aunque las probabilidades iniciales varíen.

2.2. El test de significación: refutación empírica de una hipótesis

Dentro de la inferencia frecuencial hay dos concepciones sobre los contrastes estadísticos: (a) las pruebas de significación, que fueron introducidas por Fisher y (b) los contrastes como reglas de decisión entre dos hipótesis, que fue la concepción de Neyman y Pearson. Estas aproximaciones no se diferencian en lo que concierne a los cálculos, pero si en sus objetivos.

El *test de significación* fue propuesto por Fisher en su libro "The design of experiments", publicado en 1935, es un procedimiento que permite rechazar una hipótesis, con un cierto *nivel de significación.* Fisher introduce su teoría de las pruebas de significación, que resumimos en lo que sigue.

Supongamos que se quiere comprobar si una cierta hipótesis H_0 (hipótesis nula) es cierta. Se suele tomar como hipótesis nula o de no efecto la contraria de la que se pretende probar. (En nuestro ejemplo, la hipótesis nula sería que el IMC medio no supera el valor 25). Generalmente la hipótesis se refiere a al valor supuesto de un parámetro, pero no se tiene acceso a toda la población, sino sólo a una muestra de la misma. En el ejemplo, estamos interesados en el IMC medio μ en toda la población de adolescentes, pero solo podemos tomar una muestra; calcularemos la media $\bar{x}$ en la muestra y lo compararemos con el supuesto en la población.

Para poner la hipótesis a prueba se organiza un experimento aleatorio asociado a H_0 y se considera un cierto suceso *S* que puede darse o no en este experimento (obtener un valor de la media en la muestra muy improbable de ser cierta la hipótesis). El experimento en el ejemplo sería recoger la muestra aleatoria de 225 adolescentes y calcular la media de su IMC.

Se sabe que si H_0 fuese cierta (si el IMC medio en la población no supera el valor 25), hay muy poca probabilidad de que ocurra *S* (obtener un valor medio en la muestra muy alejado de 25). Realizado el experimento ocurre precisamente *S,* pues al tipificar el valor $\bar{x} = 26$ se ve que es muy improbable. Hay dos posibles conclusiones:

- Bien la hipótesis H_0 era cierta y ha ocurrido *S*, a pesar de su baja probabilidad (pues un suceso improbable no es imposible).
- Bien la hipótesis *Ho* era falsa.

Al igual que en el ejemplo, generalmente el experimento consiste en tomar una muestra de la población sobre la que se realiza el estudio y calcular un estadístico, que establece una medida de discrepancia entre los datos y la hipótesis. Al comparar la media en la muestra en nuestro ejemplo con la media supuesta de medias en la población podemos medir la discrepancia entre datos e hipótesis.

El razonamiento que apoya un test de significación parte de la suposición de que la hipótesis nula es cierta. En dicho caso, el estadístico define una distribución muestral, al variar los datos aleatoriamente (Cabriá, 1994; Batanero, 2000). En nuestro caso, al tipificar la media muestral podemos usar la distribución normal N (0,1) para calcular la probabilidad de obtener un valor igual o mayor que 3 (valor obtenido en la tipificación). Trabajamos con $P(Z \geq 3)$ en vez de con $P(Z = 3)$ porque este último valor es siempre igual a cero y para tener en cuenta también los casos más extremos que el observado.

En resumen, un test de significación efectúa una división entre los posibles valores del estadístico en dos clases: resultados estadísticamente significativos (para los cuales se rechaza la hipótesis) y no estadísticamente significativos para los cuáles no se puede rechazar la hipótesis (Ridavulla, 1991). En el enfoque de Fisher el interés es rechazar la hipótesis nula; pero no se identifica una hipótesis alternativa concreta (Batanero y Díaz, 2006). Tampoco hay un criterio estándar sobre qué es un "suceso improbable". El valor de la probabilidad por debajo de la cuál rechazamos la hipótesis (nivel de significación) lo fija el investigador según su juicio subjetivo y su experiencia. Suele ser común tomar un nivel de significación α=.05.

2.3. El contrastes de hipótesis de Neyman y Pearson: regla de decisión entre dos hipótesis

Neyman y Pearson por su parte estaban interesados en el contraste de hipótesis como un proceso de decisión que permite elegir entre una hipótesis dada H_0 y otra hipótesis alternativa H_1 (Rivadulla, 1991). Este enfoque tiene más sentido cuando se trata de una prueba que se repite muchas veces en las mismas condiciones. Supongamos, por ejemplo, un contexto de control de calidad: Estamos en un proceso de llenado de paquetes de azúcar de 1 kg. Suponemos una distribución normal N (0,1). Estamos interesados en diferenciar entre dos hipótesis:

H_0: El proceso está controlado. Los paquetes tienen un peso medio de 1kg

H_1; Se ha descontrolado el proceso. Los paquetes tienen un peso medio mayor o menor de 1 kg.

Por ello contemplan dos posibles decisiones respecto a H_0: rechazar esta hipótesis, asumiendo que es falsa y aceptando la alternativa, o abstenerse de esa acción. Las dos situaciones implican un coste: Si el proceso está descontrolado y supongo que es correcto, puedo estar vendiendo más o menos peso del que cobro; aunque vender un menor peso podría parecer no grave, puedo perder mi calidad o mi imagen. Si el proceso funciona bien, entonces si supongo que se ha descontrolado y paro la producción para arreglar la maquinaria, tengo un coste innecesario. Todos los días, para control de calidad tomo una muestra de 30 paquetes y los peso; cada día repito el contraste de hipótesis para ver si paro o no la producción. Solo peso los 30 paquetes (uso una muestra), pues sería muy caro pesarlos todos.

Al tomar una de estas decisiones sobre las hipótesis (decidir si el proceso está controlado o no) a partir de los resultados del contraste (del peso medio de los paquetes en la muestra) se consideran dos tipos de error:

- *Error tipo I:* Rechazar una hipótesis nula cuando es cierta (Parar el proceso de producción, cuando el proceso está controlado). Se suele establecer un nivel de significación α que asegura que la probabilidad de cometer este tipo de error sea menor que un número preestablecido. Generalmente se trabaja con α=.05.
- *Error tipo II*: Aceptar una hipótesis nula que de hecho es falsa (considerar que el proceso está controlado, cuando no lo está). Beta (β) es la probabilidad de cometer este tipo de error y su complemento ($1 - \beta$) la *potencia* del contraste. Mientras que α es un número preestablecido, β es variable, porque su valor depende del valor del parámetro (generalmente desconocido). En el ejemplo, dependerá del verdadero valor del peso medio del paquete. Por ejemplo, si en vez de envasar 1 kg. el proceso fabrica paquetes de 999 gramos, la probabilidad de error tipo II es alta, porque hay poca diferencia entre el peso medio real del paquete y el supuesto. La media de la muestra será muy cercana a 1kg. Pero si estamos fabricando paquetes de 1200 gramos, el peso medio de 30 paquetes será muy cercano a 1200 gramos y será difícil suponer el proceso controlado (hacer errores tipo II).

Una vez definidas las hipótesis nula y alternativa y fijada la probabilidad de cometer error tipo I, se toma una muestra (30 paquetes). Calculado el estadístico (peso medio en la muestra), se toma la decisión de rechazar o no rechazar la hipótesis nula, comparando la probabilidad de obtener un valor igual o más extremo que el valor del estadístico (valor p) con el nivel de significación.

3. Errores frecuentes en la interpretación del contraste de hipótesis

Son muchos los errores e interpretaciones incorrectas del contraste de hipótesis, incluso en los trabajos de investigación, situación que ha sido observada desde hace tiempo (Falk & Greenbaum, 1995; Batanero, 2000; Harradine, Batanero y Rossman, 2011).

Un concepto que se suele comprender erróneamente es el nivel de significación α. Como se ha indicado, es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula, supuesta cierta. En forma simbólica: $\alpha = P(\text{Rechazar H}_0 \mid \text{H}_0 \text{ es cierta})$. Supongamos que trabajamos con un valor α=.05 o del 5 %. Esto quiere decir que si H_0 es cierta, la rechazamos 5 de cada 100 veces, o lo que es lo mismo en 100 días que hagamos el control de calidad y en los cuáles el proceso esté controlado, pararemos el proceso innecesariamente 5 días.

La interpretación errónea más común del nivel de significación consiste en cambiar los dos términos de la probabilidad condicionada en la expresión anterior, es decir, interpretar α como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, una vez que la decisión de rechazarla se ha tomado, esto es, suponer que $\alpha = P(\text{H}_0 \text{es cierta} \mid \text{se ha rehazado H}_0)$

Por ejemplo, Birnbaum (1982) pidió a sus estudiantes que definiesen el nivel de significación. La respuesta más frecuente fue: "*Un nivel de significación del 5% significa que, en promedio, 5 de cada 100 veces que rechacemos la hipótesis nula estaremos equivocados*". En la investigación de Falk (1986) la mayoría de sus estudiantes creían que α era la probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis nula. Vallecillos (1994) también encontró este error en una investigación con más de 400 estudiantes en la Universidad de Granada; y el error se repetía en diferentes tipos de estudiantes (por ejemplo, de medicina, ingeniería o psicología). Resultados similares fueron encontrados por Krauss y Wassner (2002) en profesores de universidad responsables de la enseñanza de métodos de investigación.

En los contrastes de hipótesis también se confunden las funciones las hipótesis nula y alternativa. Es decir, algunos estudiantes piensan que la hipótesis nula es la que queremos demostrar (no la que queremos rechazar). Posiblemente se deba esta creencia a que en matemáticas casi siempre se trata de probar una hipótesis (aunque en el método de reducción al absurdo se trata de rechazarla).

Vallecillos (1999) describió cuatro creencias distintas en sus estudiantes sobre el tipo de prueba de que proporciona el contraste de hipótesis:

a. El contraste de hipótesis es una regla que te ayuda en la toma de decisiones; esta creencia sería correcta y refleja el método de Neyman y Pearson, donde queremos decidir entre dos hipótesis.

b. El contraste procedimiento para la obtención de apoyo empírico a la hipótesis de investigación. Esta visión también es correcta y refleja la propuesta de Fisher, donde sólo se repite el contraste una vez (se hace un experimento).

c. El contraste de hipótesis es una prueba probabilística de la hipótesis. Permite calcular la probabilidad de que una hipótesis sea cierta. Esta creencia sería cierta sólo cuando aplicamos inferencia bayesiana y además se trataría de una probabilidad subjetiva (personal) o grado de creencia. Cuando trabajamos el método de Fisher o de Neyman y Pearson esta creencia es falsa pues, como hemos dicho, la probabilidad de una hipótesis no tiene sentido en inferencia frecuencial.

d. El contraste estadístico es un método matemático; como tal, y al ser la matemática una ciencia exacta, al finalizar hemos probado la verdad o falsedad de una hipótesis. Esta creencia es siempre errónea; la tienen algunos alumnos que tienen poca base matemática y una fe ciega en las matemáticas. Suelen tener dificultades de comprensión, aprenden el cálculo de memoria y piensan que el resultado debe ser cierto o falso. Falk y Greenbaum (1995) sugieren que esta creencia se debe a la existencia de mecanismos psicológicos; algunas personas desean minimizar la incertidumbre en la decisión y suponen que la obtención de un resultado estadísticamente significativo les ayuda a ello.

La creencia de que rechazar la hipótesis nula supone demostrar que es errónea, también se encontró en la investigación por Liu y Thompson (2009) al entrevistar a ocho profesores de secundaria, que parecían no comprender la lógica de la inferencia estadística. Liu y Thompson observan que las ideas de probabilidad y atipicidad son fundamentales para comprender la lógica de la prueba de hipótesis, donde se rechaza una hipótesis nula cuando una muestra de esta población se considera lo suficientemente atípica si la hipótesis nula es cierta. También hay que comprender el muestreo como un sistema de ideas interrelacionadas; selección al azar, replicación, variabilidad y distribución. Mientras que comprender la idea de muestra aleatoria simple es fundamental, probablemente es más importante entender que cada muestra es sólo una de las posibles entre las que podrían haberse elegido (Saldahna & Thompson, 2002).

4. Una aproximación informal al contraste de hipótesis

La complejidad del razonamiento sobre el contraste de hipótesis es evidente, dada la diversidad de conceptos implicados que el alumno ha de comprender y discriminar: Población y muestra, estadístico y parámetro, hipótesis (nula y alternativa para el contraste de Neymann y Pearson), nivel de significación, valor-p, potencia, región crítica y de aceptación.

No es extraño que actualmente observemos algunas propuestas de acercarse de manera informal al contraste de hipótesis. Estas propuestas tratan de introducir algunas de las ideas principales y el razonamiento del contraste y, a la vez, liberar al alumno de los cálculos asociados, recurriendo a la simulación. De acuerdo a Rossman (2008) una inferencia estadística es una conclusión que extiende un resultado observado en unos datos a un contexto más amplio (población) y debe estar justificado por un modelo de probabilidad que ligue los datos a este contexto más amplio. A continuación resolveremos el problema 1 utilizando la simulación, en vez de las tablas de la distribución normal. Seguiremos el método de Fisher, es decir, no nos preocupamos de la hipótesis alternativa o el error tipo II y además suponemos que únicamente nos interesa hacer una vez el contraste. Utilizaremos el simulador de la distribución muestral de la media disponible en: www.rossmanchance.com/applets/SampleMeans/SampleMeans.html (colección de Rossman y Chance). Otro simulador semejante puede descargarse de http://www.tc.umn.edu/~delma001/stat_tools/software.htm y es también sencillo construir un simulador de medias muestras con Excel.

Para resolver el problema con ayuda del simulador, el alumno también debe recordar que, para realizar un contraste de hipótesis sobre la media de la población μ, ha de utilizar la media de la muestra; en este caso $\bar{x} = 26$. Pero no ha de realizar cálculo formal de probabilidad; por tanto no necesita recordad la fórmula de la desviación típica de la media, la fórmula de tipificación o la lectura de la tabla de la distribución normal y el problema se simplifica bastante.

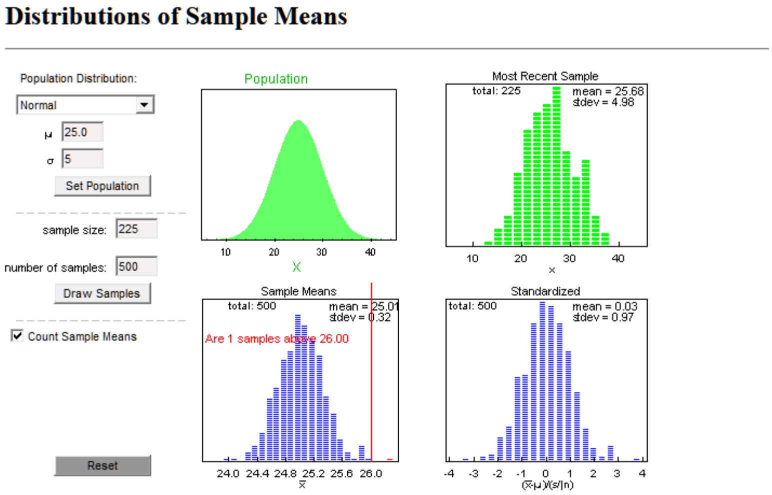


Figura 1. Simulación de la distribución muestral en el problema 1 (500 muestras)

En el simulador únicamente tiene que introducir el dato supuesto de la media de la población, μ=26 y de la desviación típica σ=5. El programa representa la gráfica de la distribución supuesta en la población (ventana izquierda superior). A continuación se pide extraer muestras; hay que dar el tamaño de la muestra n=225. En la ventana superior derecha aparece la última muestra extraída y la distribución tipificada debajo de ella. En la ventana inferior izquierda aparece la distribución empírica de la media muestral que se va completando según se repite la simulación de extracción de muestras (nosotros hemos pedido simular 500 muestras, cada una de 226 elementos). Podemos también pedir al simulador que cuente el número de muestras con valor igual o superior al dado para nuestra muestra en el supuesto dado por enunciado del problema (media superior a 26). De hecho, en nuestra simulación sólo hemos obtenido 1 entre 500 con media igual o superior a 26. La simulación nos proporciona una estimación de la probabilidad de obtener este suceso, si la hipótesis nula fuese cierta. Dicha probabilidad (valor p) será:

$$\text{Valor p=} P(\bar{x} \geq 26) \mid H_0 \text{ cierta}) \cong \frac{1}{500} = .002$$

Observamos una ligera diferencia de esta estimación de la probabilidad con la probabilidad exacta, calculada en el apartado 1. Ello es debido a que, en vez de utilizar la distribución exacta de la media muestral, estamos simulándola; por tanto, introducimos un pequeño error en el cálculo. Sin embargo, si el número de simulaciones, como en el ejemplo, es alto, los valores exactos y estimados de la probabilidad son muy parecidos.

En consecuencia, la simulación (en vez del cálculo formal) puede utilizarse al comenzar la enseñanza del contraste de hipótesis para poder concentrar al alumno en el aprendizaje de la lógica del proceso y en los conceptos que, todavía necesita: muestra y población, media muestral y poblacional, distribución de la media muestral, hipótesis nula, valor p. Es importante hacer ver al alumno que el valor p viene dado por una probabilidad condicional, porque para estimarlo estamos suponiendo que la hipótesis nula es cierta. Esto es sencillo, pues utilizando el mismo simulador podemos cambiar la hipótesis de partida; por ejemplo, suponer que la media de la población μ=25.5. En este caso, repitiendo la simulación obtenemos 28 muestras con IMC medio igual o superior a 26.

$$\text{Valor p=} P(\bar{x} \geq 26) \mid \mu = 25{,}5) \cong \frac{28}{500} = .056$$

Esta probabilidad sigue siendo pequeña, pero no tanto como antes. Si se hubiera fijado como límte α=.05 para rechazar la hipótesis nula, en este caso no se podría rechazar la hipótesis; si la media de la población fuese 25.5, no sería ya tan raro obtener un IMC en la muestra igual a 26.

5. Algunas reflexiones

La gran cantidad de errores identificados en la práctica del contraste de hipótesis sugiere que no es suficiente enseñar a los estudiantes sobre las reglas y conceptos con el fin de llegar a una comprensión suficiente de este tema. Es claro que la enseñanza actual de la estadística no mejora las intuiciones y que contamos con recursos para mejorar la situación. Numerosos applets interactivos, como el utilizado en este trabajo proporcionan hoy un entorno dinámico y visual en el que los estudiantes pueden concretizar y visualizar el muestreo aleatorio, el concepto de distribución muestral y su estimación empírica. Dada la dificultad de integrar los conceptos involucrados en la inferencia estadística, tiene sentido sugerir que estas ideas deben ser desarrollados progresivamente en la mente de los alumnos, comenzando ya desde la educación secundaria, con actividades de simulación de muestras aleatorias. Los conceptos de estimación puntual y de intervalos de confianza también pueden ser introducidos con una metodología similar.

Es importante también que el profesor comprenda los límites y no sólo las posibilidades de la simulación. La simulación introduce un error de estimación añadido a los errores tradicionales en el estudio del contraste de hipótesis (errores tipo I y II) o en los intervalos de confianza (complementario del coeficiente de confianza). Simultáneamente, es importante que el profesor enfatice los pasos requeridos en el procedimiento de contraste, discuta con los estudiantes la naturaleza de las probabilidades que calcula (condicionales), así como la interpretación correcta de las probabilidades de error. Desafortunadamente, algunas propuestas didácticas sobre inferencia informal, no enfatizan suficientemente estos puntos y se limitan a enseñar la inferencia (informal) nuevamente como un conjunto de recetas: a) simular la extracción de muestras; b) formar una distribución muestral empírica; c) calcular la probabilidad de obtener el valor observado del estadístico usando esta distribución muestral empírica; d) tomar una decisión.

Al no resaltar la naturaleza condicional del valor *p*, no se relaciona la probabilidad adecuadamente con la hipótesis supuesta y se inducen nuevamente los errores consistentes en el cambio de términos en la probabilidad condicional que define el valor *p* y el nivel de significación. Al no explicitar los conceptos subyacentes, estos quedan sin fijarse en la mente de los alumnos. En otras propuestas de "inferencia informal", simplemente se pide tomar una decisión subjetiva sobre el rechazo de una hipótesis utilizando sólo procedimientos descriptivos; lo cual no sería una verdadera inferencia estadística. Finalmente en muchos casos, se trata de sustituir todo el razonamiento probabilístico mediante la tecnología, sin enfatizar los procesos aleatorios involucrados en la simulación. Tampoco esto sería una inferencia estadística, pues esta debe estar justificada por un modelo de probabilidad que ligue los datos a la población (Rossman, 2008)

Agradecimiento: Proyecto EDU2013-41141-P y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Mathematical Thinking and Learning,* 2(1-2), 75-98.

Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 277-291.

Batanero, C. y Díaz, C. (2006). Methodological and didactical controversies around statistical inference. *Actes du 36iémes Journées de la Societé Française de Statistique.* CD ROM. Paris: Societé Française de Statistique.

Birnbaum, I. (1982). Interpreting statistical significance. *Teaching Statistics, 4*, 24–27.

Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística.* Valencia: Servicio de Publicaciones de la Universidad.

Díaz, C. (2005). *Apuntes sobre inferencia bayesiana*. Granada: La autora.

Falk, R. (1986) Misconceptions of statistical significance, *Journal of Structural Learning,* 9, 83–96.

Falk, R., & Greenbaum, C. W. (1995) Significance tests die hard: The amazing persistence ofa probabilistic misconception, *Theory and Psychology,* 5 (1), 75-98.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 235-246). Springer Netherlands.

MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Popper, K. R. (1967). *La lógica de la investigación científica.* Madrid: Tecnos.

Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e inferencia científica*. Barcelona: Anthropos.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

Rubin, A., Hammerman, J. K. L & Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Saldanha. L., & Thompson, P. (2002) Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 257-270.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Proceedings of the 52 session of the International Statistical Institute* (Vol.2, pp. 201–204). Helsinki: International Statistical Institute.

Zieffler, A., Garfield, J. B., delMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 5-19. Online: www.stat.auckland.ac.nz/serj/.

Atando cabos, contando circunferencias

Aitzol Lasa[1] *y Miguel R. Wilhelmi*[2]

[1]aitzol.lasa@unavarra.es, Universidad Pública de Navarra
[2]miguelr.wilhelmi@unavarra.es, Universidad Pública de Navarra

Resumen

Se presenta el análisis de los comportamientos en una cuestión de combinatoria en la Olimpiada Matemática de 2º ESO. El Enfoque ontosemiótico y la Teoría de situaciones didácticas en matemáticas constituyen el marco teórico para la discusión de los resultados. Los datos se han tratado estadísticamente a partir del análisis implicativo. Los resultados indican que los participantes disponen de estrategias aritméticas suficientes sin necesidad de recurrir al algebra combinatoria. No obstante, el nivel de algebrización mostrado por los participantes en otras preguntas de la Olimpiada muestra una correlación fuerte con los comportamientos observados. Es pues la capacidad de adaptación un elemento clave para el análisis de las estrategias observadas y su tasa de éxito.

Palabras clave: combinatoria, nivel de algebraización, adaptación a un contexto matemático, análisis implicativo.

1. Introducción

La organización de la Olimpiada Matemática de 2º ESO resulta problemática desde el punto de vista de los contenidos matemáticos susceptibles de aparecer en la prueba. La geometría, junto con la aritmética y la medida, son tópicos que se incluyen de forma natural, dado que el currículo contempla estos tópicos en bloques de contenidos específicos. No ocurre lo mismo con la lógica (problemas *de pensar*) y el azar (combinatoria y probabilidad). Además, la resolución de este tipo de problemas tiene un alto grado de dificultad, incluso para estudiantes de niveles superiores.

Este trabajo muestra las respuestas de los participantes de la Olimpiada a una tarea de combinatoria. El repertorio de estrategias movilizado se basa en el conteo y la representación analógica; asimismo, los participantes utilizan representaciones algebraicas en distintos *niveles de algebrización* (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). El tratamiento de los datos y la obtención de los resultados se basan en una estadística descriptiva y en el análisis implicativo. La discusión de los resultados se apoya en el Enfoque onstosemiótico (EOS) y en la Teoría de situaciones didácticas en matemáticas (TSDM). Los procedimientos de recuento observados y la tasa de éxito en la ejecución de la tarea justifican la introducción de problemas de combinatoria en el primer ciclo de Educación Secundaria. Por último, se deducen implicaciones para la progresión en la adquisición de los niveles de algebrización por los estudiantes.

2. Marco Teórico

El Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y de la instrucción matemáticos sitúa las prácticas operativas y discursivas en el centro de la actividad matemática y de su análisis (Font, Godino y D'Amore, 2007; Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010). En las primeras etapas, en tareas de recuento, la materialización resulta esencial, ya que los estudiantes cuentan los objetos particulares o sus representaciones ostensivas. Asignan de esta forma significado personal a la combinatoria a partir de tareas de recuento sistemático, donde la eficacia supone la aplicación correcta de principios básicos del conteo (ningún elemento sin contar, ningún elemento se cuenta por más de una vez).

Más adelante, cuando las tareas implican un alto número de casos, la representación ostensiva es inadecuada o resulta demasiado costosa. Se produce una ruptura de contrato, ya que los objetos dejan de ser accesibles al conteo, siendo necesarios procedimientos básicos no-ostensivos de conteo, donde la generalización y la utilización de intensivos son necesarios. Estas necesidades no son evidentes, ni están exentas de conflictos. “Cada método [de resolución] se vuelve rápidamente complejo e incierto cuando aumenta el tamaño de la colección, mientras que el método siguiente no presenta todavía una eficacia evidente” (Brousseau, 2007, 42). Así, el paso de una estrategia a otra no se realiza de manera lineal (figura 1).

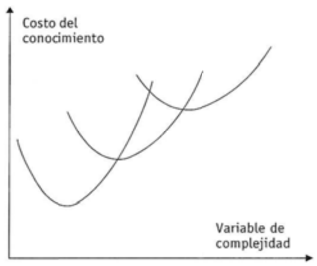


Figura 1. Progresión regular de la enseñanza sin saltos informacionales (Brousseau, 2007, 43)

En el caso de la combinatoria, la progresión regular se concreta en el paso de la utilización de *técnicas explícitas* (contar todos los casos) a *técnicas implícitas* (uso de reglas, cálculos y argumentos). Así, la práctica matemática desemboca en fórmulas y algoritmos. Es entonces cuando la institucionalización de las nociones de *permutación*, *variación* y *combinación*, como instrumentos eficaces de recuento de clases de problemas, es pertinente (Wilhelmi, 2004).

En la figura 2 se representa de manera sintética este proceso, que involucra las dualidades:

- *Ostensivo / no-ostensivo*. De los recuentos de objetos físicos o de sus representaciones, (por una *materialización* exhaustiva de todos los casos) se pasa al recuento de situaciones sin el conteo constructivo de todos los casos (por un proceso de *idealización* mediante esquemas, metáforas o agrupaciones).
- *Extensivo / intensivo*. De los recuentos particulares, normalmente poco numerosos, se pasa a la identificación de reglas de formación de familias de casos, que involucran procesos de particularización (concreción de la regla en un caso particular) y de *generalización* (identificación del patrón común de varios recuentos concretos).
- *Personal / Institucional*. Los significados personales sirven de base para la motivación de los significados institucionales, que en muchos casos involucran la determinación de fórmulas que modelizan clases de situaciones.

El proceso de generalización está íntimamente ligado a la utilización de intensivos propio de las prácticas con un componente algebraico esencial. El EOS distingue distintos *niveles de algebrización* (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014), desde un *nivel 0* (procedimientos exclusivamente aritméticos en ausencia del álgebra) hasta un *nivel 3* (consolidación del álgebra), pasando por el *nivel 1* (incipiente, se emplean intensivos en tareas estructurales) y *nivel 2* (intermedio, aparecen variables pero no se opera con ellas). Así, la identificación del nivel de algebrización mostrado por los estudiantes es una variable que tendrá que ser tenida en cuenta en el análisis de las realizaciones de los participantes.

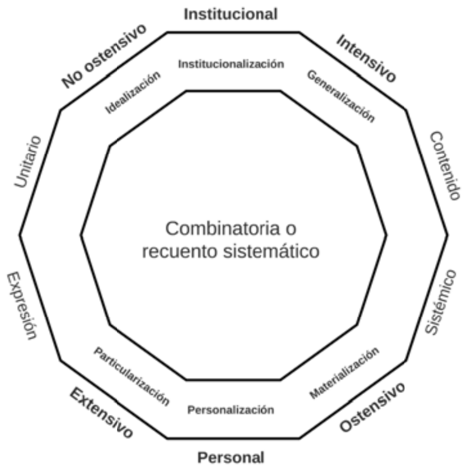


Figura 2. Combinatoria o recuento sistemático como práctica operativa y discursiva

3. Análisis a priori

La introducción de un problema de combinatoria o probabilidad en la Olimpiada Matemática está justificada por los objetivos generales de la etapa. En efecto, en primer y segundo curso de ESO se debe promover, entre otros, la *formulación de conjeturas*, la *recogida y organización de la información en tablas y diagramas* y el *recuento de frecuencias absolutas y relativas*, en relación a *fenómenos aleatorios sencillos* (MEC, 2007). Asimismo, se fomenta la resolución de problemas de la vida cotidiana "de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas" (p. 752), manifestando una actitud positiva que permita al estudiante "disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas" (p. 752).

Así, aunque en el currículo oficial de 2º ESO no se propone un apartado específico de contenidos de combinatoria, no se establece la limitación para promover problemas cuya resolución precise de un recuento de casos. De hecho, la *combinatoria* como el conjunto de estrategias para el recuento implícito de casos sin contar por exceso ni por defecto (Wilhelmi, 2004), es un contexto adecuado para la exploración sistemática de alternativas, la formulación de conjeturas, la puesta en marcha de métodos de resolución diversos y el análisis de su eficacia.

Las tareas combinatorias son complejas en todas las etapas educativas. Prueba de ello es que estudiantes universitarios con alta preparación matemática encuentran las dificultades equiparables que estudiantes de bachillerato sin instrucción específica en la materia, en la resolución de algunos problemas para los que no se precisan, a primera vista, conocimientos matemáticos sofisticados (Roa, Batanero y Godino, 2001). Es más, los libros de texto no presentan tareas que promuevan realmente la adquisición de contenidos combinatorios, quedando el estudio del tema de combinatoria aislado (Espinoza y Roa, 2013). Así, la enseñanza se centra en la mostración de una clase de situaciones estereotipadas que precisan dos únicos pasos: a) determinación del tipo de problemas (permutación, variación o combinación, con o sin repetición); b) cálculo mediante una fórmula.

En efecto, una institucionalización precoz del álgebra de la combinatoria, es decir, el uso de intensivos (algoritmos para el recuento de casos ideales) en ausencia de un significado personal asignado al proceso de recuento, parecen ser los responsables de este fracaso. Se deben potenciar, por tanto, las estrategias de resolución de problemas, la enumeración sistemática y el uso de diagramas de árbol, sin el corsé de las fórmulas combinatorias, y libre de ataduras formalistas.

Por todo ello, en el análisis de las respuestas de los participantes de la Olimpiada Matemática, cabe formular las siguientes preguntas según la competencia mostrada:

- Si un participante realiza el recuento de todos los casos, ¿qué reglas básicas de la numeración, la suma y el producto se observan en la resolución?
- Si un participante no realiza el recuento de todos los casos, ¿en qué tipo de intensivos se apoya para afrontar la tarea?

Además, se indaga sobre la posible relación entre las variables “resolución del problema de combinatoria” y “nivel de algebrización mostrado en la prueba”, estableciéndose la siguiente conjetura: *Existe una correlación alta entre el nivel de algebrización mostrado por los participantes y la eficacia en las tareas de recuento de casos*.

4. El problema

Los participantes disponen de cuatro cordones indistinguibles con los que experimentar, que pueden ser anudados de múltiples formas, antes de pasar al análisis simbólico de la situación. Se potencia así la dimensión ostensiva a partir de material manipulativo (Arimatéa y Souza, 2013):

“Abel y Belén inventan un juego. Disponen de cuatro cordones, y Abel los toma en su puño (figura 3). Los extremos de los cordones son visibles, tanto en la parte superior como en la parte inferior. Sin embargo, no hay forma de saber qué extremo inferior corresponde a cada extremo superior. A continuación, Belén ata los extremos, los anuda de dos en dos: dos nudos en la parte de arriba, otros dos en la parte de abajo. Por último, Abel suelta los cordones:

- Si los cordones aparecen en ataduras separadas, Abel gana el juego.
- Si los cordones aparecen en una única atadura, Belén gana el juego.

¿Cuál de los dos tiene más probabilidades de ganar? ¿Abel o Belén?”

Figura 3. Disposición de los cordones

La forma en la que se atan los cordones A, B, C y D en la parte superior no influye en la resolución. Se considera pues una atadura particular, AB (que implica necesariamente la atadura

CD). Abel solo gana en caso de que ate los cabos de los mismos cordones en la parte inferior, A'B'(C'D'), mientras que Belén dispone de dos casos a favor: A'C'(B'D') y A'D'(B'C'). Por lo tanto, Abel gana con una probabilidad de 1/3, mientras que Belén dispone de probabilidad doble, 2/3. El estudio de todas las ataduras posibles superiores "AB(CD), AC(BD) y AD(BC)", no afecta a la probabilidad final: la probabilidad de ganar de Abel es ahora 3/9 y la de Belén 6/9.

5. Resultados

Solo una décima parte de los participantes malinterpreta el enunciado, dando a entender que el propósito del problema se ajusta al grado de dificultad de la etapa. La tabla 1 resume los comportamientos y los tipos de resolución observados.

Tabla 1. Tipos de resolución observados

RES1	Interpreta correctamente el enunciado	90%
RES2	Explica el razonamiento en un discurso escrito	54%
RES3	Utiliza una tabla para el recuento de casos	18%
RES4	Utiliza representaciones analógicas de las cuerdas	41%
RES5	Juega las partidas (estudio empírico)	5%
RES6	Contesta por intuición global sobre el enunciado	50%
RES7	Explicita el conteo de todos los casos	51%
RES8	Realiza algún tipo de conteo implícito (argumentos, cálculos para obtener los casos favorables)	20%

El tipo de resolución más extendido contiene representaciones analógicas en dos dimensiones de los cordones, una descripción del proceso de conteo y una explicación escrita del razonamiento. Los participantes explicitan todos los casos y dan una respuesta al problema en función del número de casos de uno u otro tipo que han encontrado (figura 4).

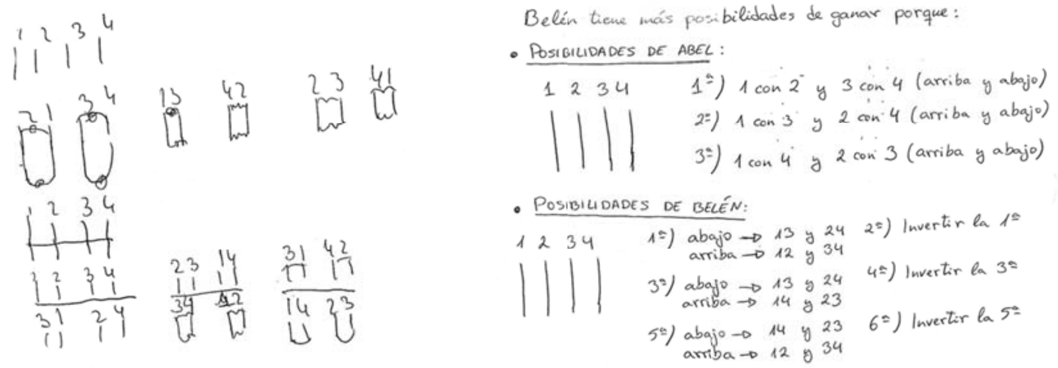
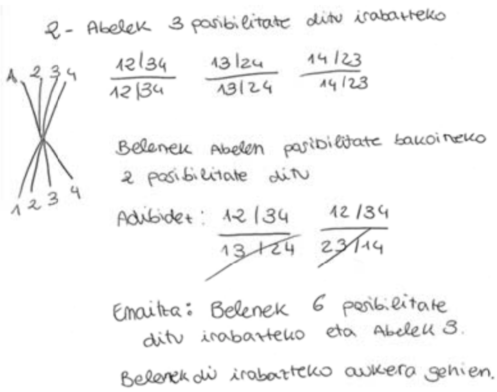


Figura 4. Representaciones analógicas y conteo de todos los casos

En menor grado, se realiza algún tipo de conteo implícito a partir de argumentos razonados para justificar la existencia de más casos favorables a Abel o a Belén. Este tipo de resolución permite encontrar al jugador con más probabilidad de ganar, pero en algunos casos no permite determinar la probabilidad asociada (figura 5).



"Abel tiene 3 posibilidades de ganar.

Por cada posibilidad de Abel, Belén tiene dos posibilidades de ganar.

–Ejemplo–

Solución: Belén tiene 6 posibilidades de ganar y Abel tiene 3. Belén tiene más posibilidades de ganar."

Figura 5. Tabla de casos y regla de casos favorables.

Otro tipo de resoluciones, aunque no muy extendidas, se basan en la realización de un conjunto amplio de partidas para asociar una probabilidad frecuencial "en acto" (Vergnaud, 1981) (figura 6).

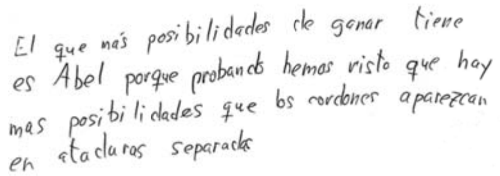


Figura 6. Resolución empírica.

El problema no se presta a ser resuelto a partir de cálculos algebraicos consolidados. Prueba de ello es que el 44% de los participantes muestran un *nivel 3 de algebrización* a lo largo de la Olimpiada, mientras que en este problema en particular el 26% muestra un *nivel 1*; y el 22% un *nivel 2* (tabla 2).

Tabla 2. Niveles de algebrización

Problema	ALG1	Uso de flechas, códigos y símbolos (nivel 1)	26%
	ALG2	Uso de variables e indeterminadas (nivel 2)	22%
Olimpiada	ALG3	Muestra nivel 3 a lo largo de la Olimpiada	44%

En cuanto al campo numérico empleado, los participantes parecen tener una ligera preferencia sobre los números naturales (NUM1, 37%) antes que los números racionales (NUM2, 30%), pero no hay pruebas de que estas diferencias sean significativas.

El 43% de los participantes establece que es más probable el suceso "Belén gana", que el suceso "Abel gana" (COR1). De estos participantes, únicamente el 13% determina la probabilidad asociada a estos sucesos (COR2).

El análisis implicativo de los resultados genera un diagrama en el cual se pueden observar relaciones entre las variables. En particular, cabe destacar que las variables COR1 y COR2 guardan una fuerte relación con el *nivel 3 de algebrización* (ALG3) y la utilización del campo numérico racional (NUM2).

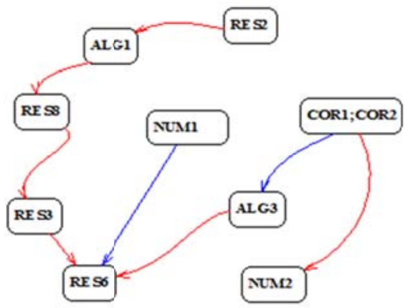


Figura 6. Análisis implicativo

Existe una cadena de comportamientos que guardan una fuerte relación: los participantes que priman la argumentación escrita del problema (RES2) muestran un *nivel 1 de algebrización* (ALG1). A su vez, el *nivel 1* guarda relación con las estrategias de conteo implícito (RES8), el conteo implícito con la utilización de tablas (RES3), y esta última con la interpretación global del problema (RES6). Sin embargo, estas relaciones no son transitivas, hecho que refuerza que las relaciones ni son causales ni determinan *per se* un criterio para anteponer la enseñanza de un tópico con relación a otro. Por último, el empleo del campo numérico natural (NUM1) guarda relación directa con la interpretación global del problema (RES6).

6. Discusión de los resultados y orientaciones para la enseñanza

Los participantes que tienen éxito en la resolución de la tarea muestran un dominio claro del campo numérico racional y del álgebra (demuestran un *nivel 3 de algebrización* en el resto de problemas de la Olimpiada). Sin embargo, en el problema combinatorio tratado, emplean estrategias aritméticas y de conteo de todos los casos, junto con representaciones analógicas y en ausencia de codificaciones complejas. Es decir, los participantes que dominan el álgebra son asimismo conscientes de las limitaciones de su uso. El *costo* de la vieja técnica (aritmética) es inferior al de la nueva (algebraica), en relación a la *complejidad* de la tarea (figura 1).

Por otro lado, los participantes que utilizan un lenguaje ordinario y demuestran un nivel inferior de uso del algebra (*nivel 1 de algebraización* en este problema de combinatoria) emplean, de forma errónea, estrategias implícitas de conteo que no han posibilitado la obtención de una respuesta correcta. Este conjunto de participantes trata de resolver el problema con una técnica no consolidada. A pesar de no tener un dominio claro del álgebra, intentan calcular el número de casos favorables a partir de intensivos (operaciones, reglas y argumentos).

Tampoco dan buenos resultados ni el uso de tablas, ni una interpretación global e intuitiva del problema (estos participantes no dividen el problema principal en problemas más pequeños). En contraposición al campo numérico racional, que aparece ligado a las variables que miden la tasa de éxito, el campo numérico natural guarda relación con esta comprensión intuitiva y simplista del problema.

De esta forma, el estudio sugiere que en la enseñanza del álgebra se debe atender a: a) el análisis de su campo de uso, b) la valoración de la eficacia y coste de sus técnicas asociadas, c) la adquisición de estrategias de control, en muchos casos basadas en métodos aritméticos, y, por último, d) la articulación de los distintos campos numéricos.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-31869, MINECO.

Referencias

Arimatéa, C. de, Souza, E. de. (2013). Reflexôes de docentes sobre o ensino de combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo. En J. M. Contreras, G. Cañadas, M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las 1as Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 555-562). Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Arires: Zorzal.

Contreras, A., Ordoñez, L., Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 367–384.

Espinoza, J. y Roa, R. (2013). Desarrollo del tema de combinatoria presente en algunos libros de texto de matemática de educación secundaria en España. En J.M. Contreras, G. Cañadas, M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las 1as Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 181-188). Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Font, V., Godino, J.D., D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2–7.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Real Decreto 1631/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO. *BOE* 5, de 5 enero, 677-773.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J.D. (2001). Dificultad de los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada. *Números*, 47, 33–47.

Vergnaud, G. (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en Didactique des mathématiques. *RDM* 2 (2), 215-232.

Wilhelmi, M. R. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Avaliação de probabilidades condicionadas em contextos sociais

José António Fernandes[1], Maria Helena Martinho[2] y Floriano Viseu[3]

[1]jfernandes@ie.uminho.pt, Universidade do Minho
[2]mhm@ie.uminho.pt, Universidade do Minho
[3]fviseu@ie.uminho.pt, Universidade do Minho

Resumo

Neste texto estuda-se como alunos, futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade, avaliam probabilidades condicionadas formuladas em contextos sociais, e como essa avaliação é influenciada pela representação simbólica dessas probabilidades. Para tal, os alunos foram confrontados com duas questões, cada uma com dois itens, uma sobre probabilidades condicionadas e outra sobre a representação simbólica dos respetivos acontecimentos. Em termos de resultados, verificou-se que os alunos revelaram dificuldades na avaliação das probabilidades e, mais ainda, na sua representação simbólica, não se observando uma clara relação entre o sucesso na avaliação das probabilidades e na sua representação simbólica.

Palavras-chave: probabilidade condicionada; contextos sociais; futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade.

1. Introdução

Cada vez mais a visão probabilística do mundo se tem afirmado na atualidade, recorrendo-se aos métodos probabilísticos para resolver problemas dos mais variados domínios da sociedade. Fischbein (1975) atribui mesmo à visão determinista do mundo, que tem sido largamente dominante na escola desde a época do Renascimento, a origem das dificuldades que as pessoas enfrentam em probabilidades. Assim, para contrabalançar tal visão determinista, advoga-se que as crianças, desde o início da sua escolarização, sejam confrontadas com situações probabilísticas (Batanero, 2013), o que contribuirá, certamente, para a não consolidação de ideias intuitivas erradas.

Borovcnik e Kapadia (2010) destacam a importância das probabilidades em variadas situações, como na tomada de decisões, na compreensão de procedimentos inferenciais de estatística, como ferramenta para modelar realidades e enquanto assunto interessante e merecedor de estudo por si mesmo.

Em consequência, ao longo das duas últimas décadas, tem-se assistido à inclusão de temas de estatística e probabilidades nos programas escolares de matemática de muitos países desde os primeiros anos de escolaridade, o que também acontece em Portugal (Ministério da Educação e Ciência, 2013). Por sua vez, esta orientação requer que os futuros professores e os professores em exercício, incluindo os dos primeiros anos de escolaridade, tenham uma adequada formação.

Assim, tendo em vista verificar a adequação da formação dos futuros profissionais de ensino às exigências colocadas pelas novas orientações curriculares, no presente trabalho estuda-se a avaliação de probabilidades condicionadas, formuladas em contextos sociais, por futuros educadores e professores dos primeiros anos do ensino básico e se essa avaliação é influenciada pela representação simbólica dos respetivos acontecimentos condicionais.

2. Investigação prévia

Na opinião de Watson (2005), tradicionalmente, o currículo escolar sugere o ensino de probabilidades numa vertente de matemática pura, com situações circunscritas a espaços amostrais finitos em que é possível listar, contar e comparar resultados de forma explícita. Reconhecendo a importância desta abordagem, a autora advoga também a exploração de situações inseridas em contextos sociais, em que os espaços amostrais são de natureza mais difusa, não explicitamente referidos, não envolvendo necessariamente números e onde estão presentes questões de linguagem e interpretação probabilística. Os dois tipos de compreensão proporcionados pelas duas vertentes, segundo esta autora, contribuem para o aumento da literacia estatística.

A exploração de situações que surgem em contextos públicos, incluindo os meios de comunicação social, teve origem em estudos conduzidos por psicólogos, em que se destacam os trabalhos de Tversky e Kahneman, com estudantes universitários, envolvendo o uso de *heurísticas* (1982a), a adesão a *raciocínios causais* (1982b) e à *falacia da conjunção* (1983) na avaliação de probabilidades. No caso da falácia da conjunção, estes autores observaram que os sujeitos tendem a considerar a conjunção de dois acontecimentos como sendo mais provável do que qualquer um desses acontecimentos, violando, assim, a lei da extensão que estabelece que $P(A \cap B)$ não pode ser superior a $P(A)$ nem a $P(B)$. Este enviesamento na avaliação de probabilidade surge, sobretudo, quando um dos acontecimentos é altamente representativo do outro, como acontece no caso: o acontecimento "Um ser humano nasceu em África" é altamente representativo do acontecimento "Um ser humano é de cor negra".

Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem os significados das probabilidades condicionada e conjunta, confusão que se tornou particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que implicavam a distinção entres estas probabilidades.

Falk (1986) verificou que muitos alunos aderem à *falácia da inversão do eixo temporal*, afirmando uma visão determinista, em que a probabilidade de algo que ocorre depois não pode afetar algo que ocorreu antes, e também não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as probabilidades $P(A|B)$ e $P(B|A)$, erro designado por *falácia da condicional transposta*.

Nos estudos de Contreras, Batanero, Díaz e Arteaga (2013) e Díaz, Contreras, Batanero e Roa (2012) verificou-se que futuros professores de matemática do ensino secundário aderiram aos erros antes referidos, salientando-se as falácias do eixo temporal (em quatro itens, com uma adesão entre 32,7% e 68,4%), da condicional transposta (em um item, com a adesão de 56,1%) e da conjunção (em um item, com a adesão de 11,7%) e a confusão entre probabilidades condicionada e conjunta (em cinco itens, com uma adesão entre 20,9% e 51,0%).

Esta abordagem às probabilidades foi também estudada com alunos do ensino básico e secundário, verificando-se que, em geral, as intuições a que os alunos universitários recorriam nas suas resoluções também eram exibidas pelos alunos mais novos (Fischbein y Schnarch, 1997; Watson, 2005).

Em geral, a investigação realizada mostra que os alunos sentem muitas dificuldades quando lhes é requerida a determinação de probabilidades condicionadas e de probabilidades de acontecimentos compostos (e.g., Fernandes, 1999; Polaki, 2005; Watson y Moritz, 2002). No estudo de Fernandes (1999), as grandes dificuldades exibidas por alunos do 8.º e 11.º ano deveram-se ao recurso a probabilidades das experiências simples implicadas na experiência composta, a uma descrição incompleta do espaço amostral, a fatores causais e ao *enviesamento* *de equiprobabilidade*. Neste último caso, os alunos avaliam os acontecimentos de caráter aleatório como sendo, por natureza, equiprováveis (Lecoutre y Duran, 1988). Embora com reduzida incidência (7,7%), este erro também foi observado por Contreras et al. (2013) em futuros professores de matemática do ensino secundário.

Watson (1995) defende que a probabilidade condicionada tem lugar no currículo de matemática do ensino básico, perspetivando o adiamento do seu estudo até finais do ensino secundário como um prejuízo para os alunos ao não lhes permitir o contacto com as suas inúmeras aplicações. Segundo a autora, a análise de afirmações do tipo "se … então", antes do estudo formal da probabilidade condicionada e a partir da lógica, é uma forma natural de introduzir o tópico pedindo aos alunos para extraírem afirmações condicionais de notícias de jornais e revistas. Além das "afirmações condicionais", a exploração dos tópicos "estatística do desporto", "independência" e "tabelas de dupla entrada" constituem oportunidades para aprofundar e consolidar o estudo da probabilidade condicionada.

Segundo Watson (2005), usualmente, os exemplos usados na investigação da compreensão de acontecimentos condicionais em alunos do ensino básico são de dois tipos: situações de extração sucessiva, sem reposição, de bolas de um saco; e descrições de condições em situações sociais para determinar como os alunos relacionam essas condições com frequências relativas e probabilidades.

No caso da extração de bolas de um saco e da seleção de pessoas de um grupo, Fernandes, Batanero, Correia e Gea (2014) verificaram que alunos da mesma unidade curricular e curso dos que participaram no presente estudo apresentaram percentagens elevadas de respostas corretas (entre 63% e 81%) em três itens, e apresentaram muitas dificuldades num outro item em que se condicionava um acontecimento que ocorreu antes a um outro que ocorreu depois, fenómeno antes designado por falácia do eixo temporal.

No caso das situações envolvendo descrições sociais, Watson e Moritz (2002) constataram que alunos do 6.º ao 9.º ano apresentaram muitas dificuldades, aumentando a percentagem de respostas corretas com o ano de escolaridade (do mínimo de 13% até ao máximo de 27%). São exemplos deste tipo que são explorados neste estudo, agora com futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade.

3. Metodologia

Neste estudo investiga-se a avaliação por futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade de probabilidades condicionadas em contextos sociais e se essa avaliação é influenciada pela capacidade de representação simbólica dessas probabilidades. Participaram no estudo 51 alunos que se encontravam a frequentar a unidade curricular de Números de Probabilidades, que se integrava no 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal, e tinham já estudado os conteúdos de probabilidade condicionada e independência. A conclusão da Licenciatura dá acesso a cursos de mestrado em Educação Pré-Escolar e/ou Ensino dos primeiros anos de escolaridade (1.º e 2.º ciclos do ensino básico).

À entrada na universidade, a formação matemática dos alunos era muito variada, tendo estudado pela última vez matemática em cursos muito distintos, de que se salientam: Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas (41,2%); Cursos de Científico-Humanístico de Ciências Sociais e Humanas e Tecnológico de Ordenamento do Território e Ambiente (33,3%); e Matemática do 9.º ano do ensino básico (15,7%). Em geral, os alunos percecionavam dificuldades na aprendizagem das disciplinas do âmbito da matemática na universidade, afirmando a maioria ter muita dificuldade (27,5%) ou ter dificuldade (43,1%), enquanto muito menos afirmaram ter pouca dificuldade (29,4%).

Os alunos responderam a um questionário de avaliação, integrado na avaliação formal dos alunos na unidade curricular, do qual são estudadas neste texto duas questões: a questão 1, que inclui dois itens sobre a avaliação de probabilidades condicionadas em contextos sociais, e a questão 2, também com dois itens relativos à tradução simbólica dos acontecimentos condicionais anteriores.

Finalmente, em termos de análise de dados, nos dois itens da questão 1 estudaram-se as escolhas dos alunos segundo as opções de resposta e as justificações por eles apresentadas para a seleção das respetivas opções, enquanto nos dois itens da questão 2 se estudaram as respostas corretas dos alunos, isto é, as traduções simbólicas corretas dos acontecimentos condicionais. As justificações foram agrupadas em categorias definidas *a posteriori* com base nas ideias subjacentes e na literatura revista e são especificadas na próxima secção.

4. Apresentação de resultados

Nesta secção apresenta-se a avaliação feita pelos alunos das probabilidades nos dois itens bem como a tradução simbólica dos acontecimentos condicionais implicados.

4.1. Avaliação de probabilidades

Os dois itens aqui incluídos, que constam da Figura 1, envolvem a comparação de probabilidades condicionadas: no item 1.1, adaptado de Watson e Moritz (2002), comparam-se duas probabilidades condicionadas e no item 1.2 comparam-se uma probabilidade condicionada com uma probabilidade conjunta.

1. Considerando o universo dos **portugueses**, em cada alínea seguinte, alguma das duas afirmações é mais provável? Assinala a tua resposta com X e justifica-a.

1.1. ☐ **a)** Que uma mulher seja professora.

☐ **b)** Que um professor seja mulher.

☐ **c)** Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Justificação:

1.2. ☐ **a)** Que um homem pratique futebol.

☐ **b)** Que uma pessoa pratique futebol e seja homem.

☐ **c)** Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.

Justificação:

Figura 1. Itens formulados em contexto social

Pela Tabela 1 podemos verificar que a maioria dos alunos selecionou a resposta correta no item 1.1 (56,9%), enquanto muito menos o fizeram no item 1.2 (13,7%).

Tabela 1 — Frequências (percentagens) nas diferentes opções de resposta dos itens da questão 1

	Frequência (%)			
Item	a)	b)	c)	NR
1.1	12 (23,5)	29 (56,9)*	9 (17,6)	1 (2,0)
1.2	7 (13,7)*	10 (19,6)	33 (64,7)	1 (2,0)

Nota: A opção assinalada com o asterisco (*) é a correta; NR — Não Respostas.

Em termos de justificações, no item 1.1, à exceção de um, todos os outros alunos que selecionaram a resposta correta (54,9%), opção b, referem-se, explicitamente ou implicitamente, às restrições dos espaços amostrais implicados (Figura 2).

Justifica a resposta:
O segundo acontecimento é o mais provável pois a maior parte dos professores são mulheres e não a maioria das mulheres ser professoras.

Figura 2. Justificação apresentada pelo aluno A_4 no item 1.1, opção b

Na seleção da opção a destaca-se que alguns alunos (13,7%) avaliaram a probabilidade da condicional transposta, e não da condicional estabelecida (Figura 3).

Uma vez que, existem mais mulheres do que professores, logo há mais probabilidade que entre as mulheres, uma seja professora, do que entre os professores um certo seja mulher.

Figura 3. Justificação apresentada pelo aluno A_{35} no item 1.1, opção a

Já na opção c, alguns alunos (13,7%) identificam as duas primeiras afirmações como definindo o mesmo acontecimento e, destes, alguns baseiam essa identidade na confusão da conjunção com a condicional (Figura 4).

Justifica a resposta:
A probabilidade de ser mulher e professora e um professor seja mulher é exatamente a mesma, visto que são ambos iguais, ou seja, são ambos mulheres e professoras, ao mesmo tempo. Assim, são igualmente prováveis.

Figura 4. Justificação apresentada pelo aluno A_{33} no item 1.1, opção c

Ainda nesta opção, dois alunos (3,9%) não distinguiram entre probabilidade condicional e probabilidade condicional transposta (Figura 5).

Ambas definem que o professor é uma mulher por isso têm ambas a mesma probabilidade.

Figura 5. Justificação apresentada pelo aluno A_{28} no item 1.1, opção c

Por fim, ao longo das várias opções, alguns alunos apresentaram justificações irrelevantes (9,8%) ou repetiram parte do enunciado (2,0%).

No item 1.2, os alunos (13,7%) justificaram a seleção da resposta correta, opção a, aludindo à restrição dos espaços amostrais implicados, como se ilustra na justificação da Figura 6.

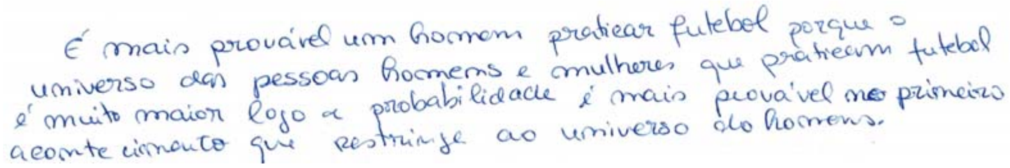


Figura 6. Justificação apresentada pelo aluno A_{23} no item 1.2, opção a

Na seleção da opção b, todos os alunos (19,6%) nas suas justificações não distinguiram claramente entre a probabilidade conjunta e a probabilidade condicionada (Figura 7).

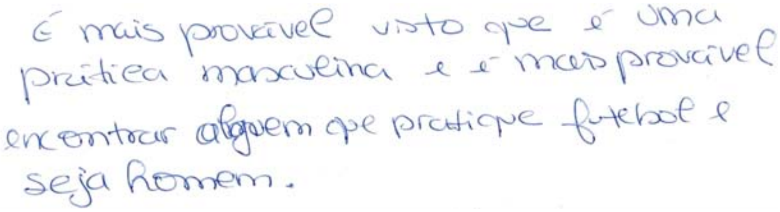


Figura 7. Justificação apresentada pelo aluno A_{45} no item 1.2, opção b

Na opção c, quase todos os alunos (51,0%) identificam as duas primeiras afirmações como definindo o mesmo acontecimento e, deles, alguns (9,8%) interpretaram a condicional como conjunção (Figura 8).

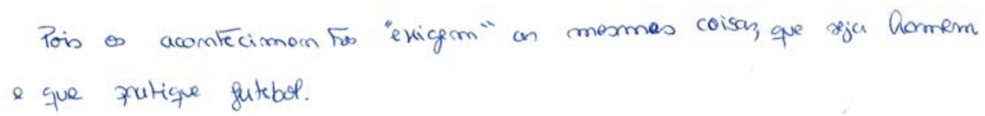


Figura 8. Justificação apresentada pelo aluno A_{29} no item 1.2, opção c

Ainda nesta opção, dois alunos (3,9%) parecem ter sido influenciados nas suas respostas pelo enviesamento de equiprobabilidade (Figura 18).

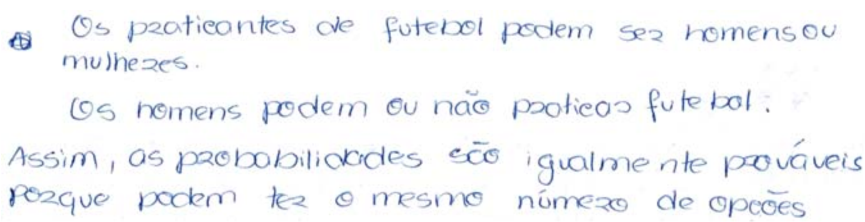


Figura 9. Justificação apresentada pelo aluno A_{12} no item 1.2, opção c

Finalmente, também na opção c, alguns alunos repetiram parte do enunciado (7,8%) ou não justificaram a sua resposta (2,0%).

4.2. Tradução simbólica do acontecimento condicional

2. Os acontecimentos seguintes estão definidos no universo dos **portugueses**.

2.1. A partir dos acontecimentos $\boldsymbol{M}$: *Ser mulher* e $\boldsymbol{P}$: *Ser professor*, define o acontecimento: *Que uma mulher seja professora*.

2.2. A partir dos acontecimentos $\boldsymbol{F}$: *Praticar futebol* e $\boldsymbol{H}$: *Ser homem*, define o acontecimento: *Que um homem pratique futebol*.

Na Tabela 2 podem-se observar as frequências (percentagens) de respostas corretas nos dois itens envolvendo a representação simbólica de acontecimentos.

Tabela 2 ─ Frequências (percentagens) de respostas corretas nos itens da questão 2

Item	Frequência (%) de respostas corretas	NR
2.1	4 (7,8)	─
2.2	1 (2,0)	─

Nota: NR ─ Não Respostas.

Em ambos os itens muito poucos alunos se revelaram capazes de apresentar a representação simbólica correta dos respetivos acontecimentos. Estando em causa a condicional em ambos os itens, em 2.1, cuja resposta correta é $P \mid M$, quase todos os alunos (90,2%) representaram erradamente o acontecimento por $M \cap P$ ou $P \cap M$ e um aluno representou o acontecimento condicional transposto $M \mid P$.

De modo semelhante, no item 2.2, cuja resposta correta é $F \mid H$, quase todos os alunos (88,2%) representaram erradamente o acontecimento conjunto, $F \cap H$ ou $H \cap F$, e cinco alunos o acontecimento condicional transposto $H \mid F$.

Em ambos os itens, muito poucos alunos representaram os acontecimentos condicionais de forma adequada, tendo quase todos os alunos confundido o acontecimento condicional com o acontecimento conjunto.

5. Discussão e conclusão

A avaliação de probabilidades condicionadas, formuladas em contextos sociais, não se revelou uma tarefa acessível para estes alunos, futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade, o que confirma os resultados obtidos por Watson e Moritz (2002) com alunos da escolaridade obrigatória. Além disso, entre os dois itens, observa-se uma considerável diferença de desempenho dos alunos, o que pode dever-se ao facto de se comparar, no primeiro, duas probabilidades condicionadas e, no segundo, uma probabilidade condicionada com uma probabilidade conjunta. Neste último caso, a considerável percentagem de alunos que confundiram o acontecimento condicional com o acontecimento conjunto parece suportar o pior desempenho dos alunos.

Em termos de dificuldades e erros na avaliação das probabilidades, salienta-se a confusão entre probabilidade condicional e probabilidade conjunta (Pollatsek et al., 1987), entre a probabilidade condicional e a sua transposta (Falk,1986) e, com menor expressão, a adesão ao enviesamento de equiprobabilidade (Lecoutre y Duran, 1988). Estes erros foram também observados por Contreras et al. (2013) e Díaz et al. (2012) em futuros professores do ensino secundário.

Na tradução simbólica dos acontecimentos condicionais as dificuldades dos alunos foram ainda maiores, destacando-se, novamente, a confusão entre acontecimentos condicionais e acontecimentos conjuntos. Por outro lado, a discrepância entre as percentagens de alunos que avaliaram corretamente as probabilidades e daqueles que foram capazes de representar simbolicamente os acontecimentos leva-nos a concluir que a capacidade de tradução simbólica dos acontecimentos não constitui uma boa explicação para o desempenho dos alunos na avaliação de probabilidades.

Assim, as dificuldades dos alunos na avaliação de probabilidades, mais agravadas no caso dos itens formulados em contextos sociais (como foram aqui estudadas) do que em contextos de extração de bolas de um saco (Fernandes et al. 2014) aconselham um reforço de formação dos educadores e professores implicados no seu ensino, como advogam Batanero e Díaz (2010).

Agradecimento: Fundos Nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto PEst-OE/CED/UI1661/2014 do CIEd-UM e Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referências

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho y P. F. Correia (Orgs.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C., y Díaz, C. (2010). Training teachers to teach statistics: What can we learn from research? *Statistique et Enseignement*, 1(1), 5-20.

Borovcnik, M. G., y Kapadia, R. (2010). Research and developments in probability education internationally. In M. Joubert y P. Andrews (Eds.), *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education* (pp. 41-48). On line: www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf4.

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., y Arteaga, P. (2013). Evaluación de la falacia del eje temporal en futuros profesores de educación secundaria. *Acta Scientiae,* 14(3) 346-362.

Díaz, C., Contreras, J. M. Batanero, C., y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Bolema* 26(44), 1207-1225.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.

Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Correia, P. F., y Gea, M. M. (2014). Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. *Quadrante*, v. XXIII, n. 1, 43-61.

Fischbein, E. (1975). The *intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.

Fischbein, E., y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96-105.

Lecoutre, M., y Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d’une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 357-368.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Autor.

Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 191-214). New York, NY: Springer.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes*, 40(2), 255-269.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1982a). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). Cambridge: Cambridge University Press.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1982b). Causal schemas in judgment under uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty:* Heuristics *and biases* (pp. 117-128). Cambridge: Cambridge University Press.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293-315.

Watson, J. M. (1995). Conditional probability: its place in the mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, v. 88, n. 1, 12-17.

Watson, J. M. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 145-169). New York, NY: Springer.

Watson, J. M., y Moritz, J. B. (2002). School students’ reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(1), 59-84.

Caracterización de los campos de problemas asociados a la noción de media en 3º de eso. Un estudio a través de libros de texto

Ignacio González-Ruiz[1] *y María TeresaGonzález Astudillo*[2]

[1]ignaciogr@usal.es, Universidad de Salamanca
[2]maite@usal.es, Universidad de Salamanca

Resumen

En este trabajo identificamos, diferenciamos y caracterizamos los campos de problemas asociados al concepto de media, a partir de una muestra de cuatro libros de texto de 3º de ESO. Destacamos la distribución irregular de los doce campos de problemas que determinamos en los textos, advirtiendo de sus consecuencias didácticas, y presentamos un análisis de los resultados útil a la hora de relacionar entre sí campos de problemas, libros de texto y las actividades relativas al concepto de media que en estos se proponen.

Palabras clave: Campos de problemas, educación secundaria, libros de texto, media.

.

1. Introducción

Las medidas de tendencia central son fundamentales para comprender muchos conceptos estadísticos. Batanero (2000) destaca, entre otros, el de variable estadística y sus distribuciones, ya que las últimas pueden caracterizarse por medio de las medidas de posición central. Centrándonos en la media, podemos encontrarla al introducir las familias de distribuciones de probabilidad, como uno de los parámetros en las distribuciones de Poisson, exponencial o normal. Por ello, la comprensión de la media y sus propiedades resulta un requisito para seleccionar una distribución específica dentro de una de estas familias de distribuciones.

En otros ámbitos de la estadística, como en el muestreo, se recurre a la idea de media, debido, fundamentalmente, a sus propiedades como estimador insesgado, eficiente, consistente y suficiente de la media poblacional. Contribuyendo a la justificación de la importancia de la media, Alvarado (2007) apunta a que los teoremas límite confieren una gran relevancia a la estimación de ésta en muchas situaciones propias de la inferencia, debido a que la distribución normal queda determinada por la media y desviación típica. Por otro lado, Batanero y Díaz (2008) destacan que tanto el análisis de la varianza como el diseño de experimentos se fundamentan en la comparación de la media global de una muestra con las medias parciales de grupos definidos en ellas. Asimismo, sobre la idea de media se organizan nociones que conviven en el día a día de las sociedades modernas. Nociones como "esperanza de vida" o expresiones como "renta media por habitante" dan cuenta de que la comprensión de la media resulta imprescindible.

La Educación Secundaria Obligatoria no es ajena a la importancia que supone la familiarización con las medidas de tendencia central, siendo un periodo educativo de aproximación a su estudio. Así se establece en el correspondiente Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006), donde destacan los cursos de segundo y tercero por ser en los que culmina, desde una óptica descriptiva, el estudio de estos conceptos. Así, para el estudio específico de la media se precisa lo siguiente (ver Tabla 1)

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 163-169). Granada, 2015.

Tabla 1. El estudio de la media en 2º y 3º de la ESO.

Segundo curso	Significado, estimación y cálculo. Utilización de sus propiedades para resolver problemas. Utilización de la media para realizar comparaciones y valoraciones.
Tercer curso	Cálculo y aplicaciones. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de la media para realizar comparaciones y valoraciones.

Por ello, contextualizaremos nuestro trabajo en el último de estos niveles analizando los campos de problemas que aparecen en los libros de texto en los que interviene el concepto de media.

2. Fundamento teóricos

Dedicamos este apartado a los referentes teóricos sobre los que se fundamenta este trabajo, los libros de texto y los campos de problemas. En relación a los primeros, destacamos su importancia como recurso didáctico, señalando algunos de los aspectos más significativos que, en este sentido, defienden algunos autores. En relación a los segundos, destacamos la noción de situaciones problemas, siguiendo las ideas del enfoque onto-semiótico sobre el significado de los conceptos matemáticos, a partir de las cuales emergen los campos de problemas.

2.1. Importancia de los libros de texto

La implantación de la ESO trajo consigo la publicación de un buen número de libros de texto. Su análisis resulta de interés para clarificar el significado que confieren a los conceptos estadísticos, verificando que se adecúan a los propósitos para los que fueron diseñados. Nuestra investigación viene avalada por la importancia que el libro de texto tiene como recurso didáctico, tal y como se recoge en el informe Cockroft (1985).

Algunos autores, como Chevallard (1991) destacan que los libros de texto presentan una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionalizan una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes. Cordero y Flores (2007) indican que el discurso matemático escolar está determinado, con frecuencia, por el libro de texto, que regula las acciones de enseñanza y aprendizaje, junto con las creencias de los profesores. Más aún, Robert y Robinet (1989) subrayan que su estudio nos confiere información acerca de las concepciones del profesorado sobre un contenido específico, puesto que la selección de un texto u otro le aproxima al tratamiento que de éste se hace en el texto.

Por otro lado, Reys, Reys y Chavez (2004) destacan la capacidad de los libros de texto para presentar las ideas matemáticas en diferentes contextos, a la vez que permiten a los estudiantes explorar diferentes ideas y facilitar el aprendizaje

2.2. Significado de un concepto matemático: el caso de la media aritmética. Campos de problemas

Las posibles dificultades que los alumnos encuentren en el estudio de la media tendrán relación con la enseñanza recibida. Reflexionar acerca de la dificultad que el aprendizaje de este concepto tiene en los alumnos, requiere de un análisis epistemológico de su significado (Godino (1996)). Centrándonos en la media y siguiendo a Godino y Batanero (1994, 1997) y Batanero y Godino (2001), consideramos las siguientes entidades primarias como constituyentes de su significado: problemas y situaciones; procedimientos, algoritmos, operaciones; representaciones; abstracciones (conceptos y proposiciones); y demostraciones. En este trabajo nos aproximamos a la primera de ellas. Así, entendemos por situaciones problemas las aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios o problemas que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas de donde surge la idea de media. Cobo (2003) propone como ejemplo de una situación problema, asociado al concepto de media, encontrar la mejor estimación de una cantidad desconocida.

Este planteamiento teórico defiende que los objetos matemáticos son fruto de la construcción humana, cambian a lo largo del tiempo y pueden dotarse de significados diversos por personas o instituciones diferentes. En consecuencia, se considera a los objetos matemáticos como entidades culturales socialmente compartidas. Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de ciertas clases problemas. En algunos casos estas instituciones pueden ser extra matemáticas, aunque posteriormente la comunidad matemática se interesa por su solución y la aplica a otros problemas o contextos. De esta manera se configuran los llamados campos de problemas, a cuyo estudio nos dedicamos en este trabajo.

3. Metodología

Hemos seleccionado cuatro libros de texto de uso vigente en España (ver Tabla 2), correspondientes al tercer curso de la ESO, que cuentan entre sus temas con uno dedicado a las medidas de tendencia central en el que se aborda el estudio de la media. Entre todos ellos se han recogido un total de 55 actividades relacionadas con el concepto de media. Además presentan una característica común: proponen el mismo tipo de definición para la media, basada en la frecuencia (f_i) asociada a cada valor numérico (x_i) perteneciente a un conjunto dado de cardinal N:

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i f_i}{N} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 \dots + x_N f_N}{N}$$

Tabla 2. Descripción de los libros de texto analizados.

Identificador	Caracterización del libro de texto/ Localización de la media en el texto	Nº de actividades sobre la media
L1	*Matemáticas 3 ESO*. Proyecto “La casa del saber”. Ed. Santillana. 2007. /Tema13. Estadística; 13.4. Medidas de centralización.	12
L2	*Matemáticas 3*. Editorial Edelvives. 2007. /Tema 12. Estadística descriptiva; 12.5. Parámetros de centralización.	5
L3	*Matemáticas (Múltiplo) 3º ESO*. Proyecto “Conectados 2.0”. Ed. SM. 2010. /Tema 15. Parámetros estadísticos; 15.1. Media aritmética y moda.	30
L4	*Matemáticas (Pitágoras) 3º ESO*. Proyecto “Conectados 2.0”. Ed. SM. 2010. /Tema 13: Estadística; 13.5. Medidas de posición central: media, mediana y moda	8

Para llevar a cabo la caracterización de los campos de problemas, hemos examinado, de acuerdo con los referentes teóricos considerados, el conjunto de las 55 actividades que disponemos con el fin de de identificar las distintas situaciones problema que en ellas se plantean; ya que de éstas emergen los campos de problemas. Nos hemos centrado en actividades cuya solución requiere de matematización (Freudenthal, 1991); esto es, en ellos se contemplan, al menos, alguno de los siguientes aspectos:

- Encontrar la solución de un problema que no es inmediatamente accesible.

- Adoptar una simbolización adecuada para representar la situación problemática y/o la solución encontrada, y para comunicar estas soluciones a otras personas.
- Justificar la solución obtenida.
- Generalizar la solución a otros contextos, situaciones problema y procedimientos.

Los resultados se han organizado considerando la distribución de campos de problemas asociada a cada libro de texto y la cuantificación explícita de las actividades asociadas a esa distribución. Todo ello, dará muestra del énfasis que cada uno de los textos confiere a los distintos campos de problemas.

4. Resultados

El análisis de los libros de texto nos ha permitido determinar los siguientes tipos diferenciados de problemas, que en su conjunto definen el campo de problemas asociado a la media y nos permiten acotar el significado institucional local de nuestro trabajo. A continuación describimos estos campos de problemas.

CP1. Obtener el promedio, como valor representativo, de los valores que toma una variable estadística o un conjunto de datos dado. Bajo esta denominación se agrupan las actividades centradas en el cálculo de la media aritmética. Distinguimos los siguientes subcampos:

- *CP1.1. Obtener el promedio de los valores que toma una variable estadística discreta.* Si los datos provienen de una variables estadística discreta con su distribución asociada
- *CP1.2. Obtener el promedio de los valores que toma una variable estadística presentados de forma agrupada.* En caso de que el rango de valores que toma la variable se presenta en forma de intervalos.

CP2. Obtener uno o más valores desconocidos de un conjunto dado, conocida la media y/o otras medidas de tendencia central. Se trata de usar la media u otros estadísticos de tendencia central, para plantear una ecuación (o ecuaciones) de primer grado, conducentes a la obtención del valor (o valores desconocidos). Se distinguen dos subcampos.

- *CP2.1. Obtener uno o dos valores desconocidos de un conjunto dado, conocidas la media, la moda y la mediana.* Si requiere del planteamiento de más de una ecuación, habida cuenta que se considera un mayor número de variables (media, moda y mediana) para obtener los valores desconocidos.
- *CP2.2. Obtener un valor desconocido de un conjunto dato, conocida la media muestral.* Si se plantea una única ecuación de primer grado, donde la incógnita es el valor del conjunto dado que desconocemos.

CP3. Obtener la media de un conjunto de valores construidos a partir de otro conjunto. Las actividades que aquí se incluyen requieren de la construcción de un nuevo conjunto de valores con respecto a los de partida, para calcular la media de este nuevo conjunto. Encontramos dos subcampos de problemas:

- *CP3.1. Obtener la media de un conjunto de valores construidos a partir de los valores de un conjunto de partida, de forma que las medias de los dos conjuntos coincidan.* En este caso, hay que modificar los valores de partida, para que el valor media coincida con el valor de los media de partida.

- *CP3.2. Obtener la media de un conjuto de valores construidos a partir de la modificación de los valores de un conjunto de partida.* Si basta con modificar por medio de algún tipo de operación aritmética, uno a uno, los valores del conjunto de partida

CP4. Obtener un valor representativo de dos o más realizaciones muestrales que favorezca su comparación. Se trata de evidenciar el papel de la media como representante, de utilidad para comparar los diversos valores que puedan tomar distintas realizaciones una muestra.

CP5. Obtener la media aritmética de un conjunto de datos conocidas las medias de una partición del mismo. Considerando una partición de un conjunto de valores y las medias asignadas a ella, se trata de calcular el valor de la media para el total de datos del conjunto.

CP6. Obtener la suma de los elementos de un conjunto de números o el cardinal de dicho conjunto, conocidas algunas relaciones establecidas entre los elementos del conjunto y el valor de su media aritmética. Las actividades que se incluyen en este campo, cuentan con un buen número de hipótesis acerca de las relaciones establecidas entre los elementos del conjunto y el valor de su media.

CP7. Estimar el valor de la media de una variable estadística a partir de su representación gráfica. Se trata de aportar un valor razonable, como media de variable estadística, a partir de la lectura e interpretación de gráfica de sus valores. Dichas representaciones son histogramas, gráficos poligonales o pirámides de población.

CP8. Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores. Cobo (2003) estudia este campo de problemas, caracterizado porque las actividades destacan las propiedades de la media como estimador, tales como ser insesgado o tener mínima varianza.

CP9. Valorar la significatividad de la media como representante de un conjunto de datos e indagar en su comportamiento, atendiendo a sus propiedades. Las actividades propias de este campo se centran en el estudio de la media a partir de algunas de sus propiedades básicas.

Tabla 3. Distribución de problemas por campos y libros de texto.

	Libros de texto				
Campos de problemas	L1	L2	L3	L4	Total de problemas
CP1.1	6	1	14	3	24
CP1.2	1	1	3	2	7
CP2.1	2				2
CP2.2		1	4		5
CP3.1	1				1
CP3.2	1	1			2
CP4			1		1
CP5			3	1	4
CP6			3		3
CP7	1		2	1	4
CP8				1	1
CP9		1			1
Total de problemas	12	5	30	8	55

Para establecer la correspondencia entre los campos de problemas y los libros de texto considerados recurrimos a la construcción de la Tabla 3. Se observa que en todos los libros se localiza el campo de problema CP1, centrado en la obtención del valor de la media; en particular, L1 y L3 cuentan problemas propios de los tres subcampos distinguidos. Por otro lado, se observa que estos dos textos son los que diferencian un mayor número de campos de problemas, siete y ocho, respectivamente. Destaca también el CP7, relativo a la estimación de la media de una variable a partir de la representación gráfica, como uno de los que cuenta con una mayor presencia en los textos, en concreto en tres de ellos. El resto de campos y subcampos de problemas aparecen de forma más restrictiva; siendo, en algunos casos, exclusivos de un único texto (CP2.1, CP3.1, CP4, C6, CP8 y CP9).

Atendiendo al desglose del número de actividades que cada libro de texto vincula a los campos de problemas se puede hacer una lectura de la tabla anterior poniendo el centro de atención en los libros o en los campos de problemas.

En cuanto a los libros, L3 es el texto que incluye un mayor número de actividades, un total de treinta, concentrándose la mayor parte de ellas, en el subcampo de problemas CP1.1 (obtención de la media de una variable estadística discreta). A este mismo subcampo corresponden también la mayor parte de las actividades propuestas en L1 y L4 (seis y tres respectivamente). Resulta significativo que en L2 se distribuyen uniformemente el número de actividades entre sus campos de problemas (uno para cada campo).

Respecto a la segunda, hemos de notar que de las cincuenta y cinco actividades, un total de veinte se agrupan en el subcampo de problemas CP1.1, anteriormente aludido. El subcampo CP1.2, centrado en obtener la media una variable estadística cuyos datos se presentan agrupados, cuenta también con una presencia destacable; siete actividades del total. Puede vislumbrarse, además, que CP6 (obtener la suma de los elementos o su cardinal, conocidas las relaciones con su media), pese a presentarse únicamente en L3, responde a tres de las cincuenta y cinco actividades. Algo similar ocurre para los campos CP2.2 y CP5, que suponen cinco y cuatro del total, respectivamente.

5. Conclusiones

A la luz de los resultados obtenidos, nuestro trabajo pone de manifiesto que en los cuatro libros de texto de 3º de ESO seleccionados, se diferencian un buen número de campos de problemas; un total de nueve. Si bien, nuestro análisis da muestra de una cierta irregularidad en la distribución de los campos de problemas en los textos, siendo L1 en el que se muestra un mayor número de campos, siete del total. De esta forma, se advierte a los usuarios de los textos, especialmente a los profesores, un uso responsable de los mismos, según cuáles sean las pretensiones formativas a las que se ambicione satisfacer con su uso.

Del total de campos de problemas que hemos diferenciado destaca CP1, centrado en obtener la media de los valores que toma una variable estadística o un conjunto de datos dado, tanto por su presencia en la totalidad de los textos, como por la cantidad de actividades asociadas al mismo. En este sentido, los subcampos CP1.1 (variable estadística discreta) y CP1.2 (datos agrupados) son los más notables.

Entendemos que la presentación de los resultados que incluye nuestro trabajo resulta significativa a la hora de identificar los campos de problemas y su vinculación a los libros de texto y las actividades que en ellos se recogen.

Referencias

Alvarado, H. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *25*, 41-58.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). Developing new tools in statistics education research. *Proceedings of the 53rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI* tome LIX (book 2, pp. 137-142). Seul: International Statistical Institute.

Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Chevallard (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage.

Cobo, B. y Batanero, C. (2003). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(1), 5–18.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.*), Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, 417-424). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J .D. y Batanero, C. (1997). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

M.E.C. (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Reys, B. J., Reys, R. E. y Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. Educational *Leadership, 61*(5), 61–66.

Robert, A. y Robinet, J. (1989). *Enoncés d’exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels (IREM)*. París: Universidad de París.

Compreensão dos testes de hipóteses por alunos do curso de Engenharia Informática

Gonçalves Gabriela [1], *José António Fernandes* [2] *y Maria Manuel Nascimento* [3]

[1]gmc@isep.ipp.pt, Instituto Superior de Engenharia do Porto
[2] jfernandes@ie.uminho.pt, Universidade do Minho
[3]mmsn@utad.pt, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, LabDCT-UTAD/CIDTFF

Resumo

Neste trabalho avalia-se a compreensão em testes de hipóteses de alunos do curso de Engenharia Informática do Instituto Politécnico do Porto. Para tal, uma amostra de 223 alunos responderam a um questionário sobre o tema, do qual analisamos neste texto duas questões que versam o estabelecimento/formulação de hipóteses e a identificação do teste de hipóteses. Os resultados mostram que os alunos, em geral, têm muitas dificuldades nas questões colocadas neste tema de testes de hipóteses, principalmente na interpretação das questões e em expressarem o seu raciocínio estatístico através da justificação escrita das respostas.

Palavras-chave: Aprendizagem da Estatística, Inferência, Testes de Hipóteses, Ensino Superior.

1. Introdução

Nas últimas décadas, o ensino da estatística foi integrado, cada vez mais, nas escolas e nas universidades, não só pelo seu carater instrumental mas também pela importância que o desenvolvimento do raciocínio estatístico tem na sociedade caracterizada pela proliferação de informação e a necessidade de tomar decisões.

As tecnologias têm hoje uma utilização mais intensa nos campos da Engenharia e a Estatística, incluindo o seu raciocínio e metodologias, assume-se cada vez mais como uma ferramenta de suporte no trabalho e na investigação científica em engenharia. As revistas e publicações nesta área estão repletas de informação estatística, justificando a inclusão desta área no currículo de um engenheiro. Segundo Olivo (2008), um engenheiro, na sua vida profissional, irá deparar-se com a análise de dados e a realização de inferências estatísticas a partir de conjuntos de dados.

Em Portugal, a inferência estatística, embora seja abordada no programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (Ministério da Educação, 2001), com base em intervalos de confiança, é um tema abordado quase exclusivamente nas unidades curriculares de estatística dos cursos do ensino superior.

Relativamente ao ensino da inferência estatística, mais concretamente aos testes de hipóteses, a nível internacional existem muitos trabalhos nesta área, mas em Portugal é uma área pouco trabalhada em termos de investigação. Trata-se de um tema que envolve muitos conceitos abstratos e relações entre eles, tais como distribuições amostrais, nível de significância, valor de prova, entre outros. No nosso país, na literatura científica aparecem poucos estudos nesta área, apesar de constituir um tópico relevante para a compreensão de boa parte da literatura científica e técnica em várias áreas do conhecimento, como a engenharia, as ciências, a matemática e as ciências sociais.

Apesar da sua relevância, ao nível do ensino é um tema em que os alunos apresentam muitas dificuldades na compreensão dos conceitos envolvidos (Rodríguez, 2006; Sebastiani, 2010; Vallecillos, 1996; Vallecillos, Batanero & Godino, 1992; Vera, Díaz & Batanero, 2011). Essas dificuldades e a quase inexistência de estudos em Portugal justificam a realização de mais investigação nesta temática.

Assim, neste trabalho temos como objetivo avaliar a compreensão dos testes de hipóteses num grupo de alunos do curso de Engenharia Informática, depois de terem passado pelo ensino do tema na unidade curricular de Matemática Computacional (MATCP). Mais concretamente, a partir das respostas dos alunos a duas questões, avaliamos a sua compreensão nos dois seguintes aspetos: estabelecimento/formulação de hipóteses e identificação do teste de hipóteses.

2. Antecedentes

De acordo com Batanero (2001), os testes de hipóteses, apesar de possuírem um campo específico de aplicação, são a área da inferência estatística onde a aprendizagem gera mais incompreensões e confusões, tanto por estudantes. como por investigadores.

A este propósito, também Sotos, Vanhoof, Noortgate e Onghena (2007) referem que as ideias de inferência são especialmente sensíveis a interpretações erradas e os estudantes adotam-nas com frequência pelo facto de a inferência requerer a compreensão e a conexão de muitos conceitos abstratos, tais como o de distribuições amostrais, nível de significância, valor de prova, entre outros. Além disso, os autores salientam o facto de a estatística inferencial ser um tópico decisivo para o desenvolvimento das pesquisas em todas as áreas das ciências.

Vallecillos e Batanero (1997) realizaram um estudo sobre as dificuldades de compreensão de estudantes universitários em alguns conceitos-chave dos testes de hipóteses, tais como: nível de significância; hipótese nula e alternativa; parâmetro estatístico e a interpretação (lógica) de um teste de hipóteses. Para tal, entrevistaram 7 estudantes universitários do 2º ano do curso de Medicina, tendo-lhes sido pedida também a resolução de dois problemas de teste de hipóteses. O estudo evidenciou que os alunos, embora tenham conhecimento de que a hipótese nula deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada, dificilmente conseguem enunciá-la de modo correto e todos eles cometeram erros que evidenciam a não compreensão no que se refere à relação entre a distribuição de probabilidade, as regiões de aceitação e de rejeição e o nível de significância.

Rodríguez (2006) desenvolveu um estudo que envolveu 96 alunos (29 alunos do curso de Biologia, 22 do curso de Microbiologia e 45 do curso de Agronomia), em que a investigadora aplicou um questionário de duas partes aos alunos: a primeira para identificar o conhecimento concetual dos alunos, com onze itens do tipo verdadeiro-falso; e a segunda com três problemas de aplicação. A maior dificuldade verificada foi relativa ao nível de significância, que os alunos consideraram como sendo a probabilidade da hipótese nula ser verdadeira, dado que foi rejeitada. Para a maior parte deles, não havia diferença entre $P(\mathrm{A}|B)$ e $P(B|A)$, ou seja, não distinguiram a probabilidade condicionada da sua transposta.

Batanero, Vera e Díaz (2012) no estudo que realizaram com 224 alunos do curso de Psicología para avaliar as dificuldades dos alunos na compreensão dos testes de hipóteses, concluíram que os seus resultados são melhores do que os dos estudos anteriores, embora subsistam erros relacionados com a descriminação entre os tipos de erro, relação entre regiões, nível de significância, valor de prova e potência do teste.

3. Metodologia

Neste texto avalia-se a compreensão de alunos do ensino superior politécnico na resolução de duas questões relativas a testes de hipóteses, nas quais uma primeira parte consistia num item de escolha múltipla e numa segunda parte era pedida uma justificação para a opção escolhida antes. Para tal, estudaram-se as opções selecionadas e as justificações que os alunos deram para a escolha da sua opção, de forma a avaliarmos a sua compreensão nos dois seguintes aspetos: estabelecimento/formulação das hipóteses e identificação do teste de hipóteses.

As duas questões aqui analisadas fazem parte de um questionário, constituído por um total de 10 questões de escolha múltipla e de dois problemas de testes de hipóteses, aplicado aos alunos do 1.º ano que frequentavam a unidade curricular (UC) de Matemática Computacional (MATCP), no ano letivo 2012-13, do curso de Engenharia Informática do Instituto Superior de Engenharia do Porto. Dos 263 alunos que frequentavam a UC, responderam ao questionário 223, sendo 22 do sexo feminino, 201 do sexo masculino e 45 estavam a repetir a UC. Estes alunos distribuíam-se por várias turmas nas aulas teórico-práticas da UC. Nessas aulas os respetivos docentes (3 docentes, incluindo o investigador enquanto também professor) aplicaram o questionário na última aula do segundo semestre (junho de 2013). Este questionário foi respondido por escrito e sem consulta imediatamente depois de os alunos terem estudado o tema de testes de hipóteses na UC e os alunos dispuseram de 90 minutos para responder, o que se revelou um tempo suficiente.

Depois de recolhidos os dados, foi feita uma análise detalhada das respostas às questões de escolha múltipla, sintetizando-se em tabelas as frequências de respostas corretas e erradas. Relativamente às justificações apresentadas, para justificar a resposta escolhida no item de escolha múltipla, foi efetuada uma análise qualitativa mediante o processo de comparação de respostas semelhantes entre si de forma a obter-se a uma categorização.

4. Respostas e justificações dos alunos

Nesta secção analisam-se as respostas e justificações apresentadas pelos alunos nas duas questões aqui analisadas.

4.1. Respostas e justificações na questão 1

Questão 1. Qual das seguintes hipóteses não é uma hipótese nula?

a. $\mu_x = 10$.

b. $\sigma = 3$.

c. $\bar{x} = 35$.

d. $\mu_1 = \mu_2$.

Justifique a sua resposta.

A questão 1 foi retirada de Vallecillos (1996) e avalia o estabelecimento/formulação de hipóteses estatísticas. Mais especificamente, nesta questão pretendeu-se averiguar se o aluno confunde estimativa com parâmetro, erro assinalado por Schuyten (1991).

Os resultados obtidos, apresentados na Tabela 1, revelam a existência de uma percentagem muito baixa de respostas corretas (11,2%). Já de entre a elevada percentagem de respostas erradas, destaca-se a opção b, com uma percentagem de 49,3%, e a opção d, com uma percentagem de 26%. Conclui-se, assim, que a maioria dos alunos responderam incorretamente à pergunta, não sabendo reconhecer que a hipótese nula é formulada para um parâmetro populacional. Vallecillos (1994) no seu estudo obteve uma percentagem de respostas corretas nesta questão superior (56%), mas a amostra utilizada era bastante superior, incluindo 436 alunos de vários anos e cursos distintos do presente estudo.

Tabela 1. Frequências (percentagens) das respostas da questão 1

Opções	Frequência (%)
a	18 (8,1%)
b	110 (49,3%)
c*	25 (11,2)%
d	58 (26%)
Não resposta	12 (5,4%)
Total	223 (100)

*Resposta correta.

Na Tabela 2 apresentam-se as categorias encontradas a partir das justificações apresentadas pelos alunos na questão 1.

Tabela 2. Frequências (percentagens) das categorias de justificação na questão 1

Justificação	Frequência (%)
Na hipótese nula estudam-se características populacionais e não da amostra	4 (1,8)
Só médias e proporções podem ser hipóteses nulas	20 (9,0)
O desvio padrão não é uma hipótese nula	33 (14,8)
As hipóteses têm que ser médias	7 (3,1)
As médias são iguais: $\mu_1 = \mu_2$	13 (5,8)
Justificação sem sentido	69 (30,9)
Não justificar	77 (34,5)
Total	223 (100)

Da análise da Tabela 2 observamos que a categoria “Não justificar” é que apresenta a percentagem mais elevada de alunos (34,5%). Estes alunos ao não justificarem a opção que escolheram, permitem que se levante a hipótese da sua escolha ter sido feita ao acaso.

Também um grupo numeroso de alunos não conseguiu apresentar uma justificação que fizesse sentido (30,9%). Agora, os alunos justificam as suas opções dizendo, por exemplo: “por exclusão de partes”; “pois existe uma média para um determinado conjunto”; “todas as outras são nulas, pois a sua relevância é nula”; “fazer um teste da média bilateral”.

Salienta-se que os alunos inseridos nas categorias “Só médias e proporções podem ser hipóteses nulas (9,0%)” e “As hipóteses têm que ser médias (3,1%)” apresentam justificações para a seleção da opção $\sigma = 3$. Esta justificação pode dever-se ao facto de os alunos não terem entendido que a hipótese inicial não é formulada com os valores das estimativas. Ainda para esta opção, 14,8% dos alunos apresentam como justificação de não ser uma hipótese nula que “O desvio padrão não é uma hipótese nula”. Ora, estes alunos com esta resposta não estão a justificar a opção escolhida e, talvez como não o sabem fazer e para não deixarem de apresentar uma justificação, fazem-no da forma mais fácil que é escrever algo que, em termos de testes de hipóteses, não faz sentido.

Uma pequena percentagem de alunos (5,5%) integram-se na categoria "As médias são iguais: $\mu_1 = \mu_2$" para justificar a opção "$\mu_1 = \mu_2$". De entre estes alunos, uns dizem que não é uma hipótese nula porque as médias são iguais ou justificam que as médias são iguais e ao subtrair $\mu_1 - \mu_2$ o resultado dará zero, enquanto outros dizem que as médias são iguais e, portanto, é uma hipótese nula.

Finalmente, apenas 1,8% das justificações se incluem na categoria "Na hipótese nula estudam-se características populacionais e não da amostra" para justificar a resposta correta "$\bar{x} = 35$". Assim, podemos concluir que os alunos, em geral, não sabem que as hipóteses são formuladas com valores dos parâmetros da população e não com os valores de estimativas.

4.2. Respostas e justificações na questão 2

Questão 2. O candidato *A* a Presidente de Junta de Freguesia afirma que vai ser eleito com 60% dos votos. O outro candidato *B*, concorrente de *A*, deseja contestar esta afirmação, e decidiu, para isso, efetuar uma sondagem a 150 eleitores onde obteve 105 votos favoráveis à sua candidatura. Qual das seguintes hipóteses elegeria como hipótese nula?

a. $p_A = 0{,}7\ (105/150 = 0{,}7)$.
b. $p_A = 0{,}6$.
c. $p_A < 0{,}6$.
d. $p_A > p_B$.
Justifique a sua resposta.

A questão 2 foi elaborada pelo investigador, e pretende avaliar a aplicação de conceitos para resolução de um problema de estabelecimento da hipótese nula (estabelecer/formular), tendo em vista a realização de um teste de hipóteses, a partir de um enunciado escrito. Queremos também averiguar se os alunos têm ideia do que é uma hipótese nula e alternativa, e que são complementares.

Tabela 3. Frequências (percentagens) das respostas da questão 2

Opções	Frequência (%)
a	58 (26%9
b*	110 (49,3%)
c	25 (11,2%)
d	26 (11,7%)
Não resposta	4 (1,8%)
Total	223 (100)

*Resposta correta.

Na Tabela 3 podemos observar que a opção mais frequente foi a b, que é a correta, com 49,3% de respostas. Embora a questão 1 mantenha semelhanças com a questão 2, neste caso os resultados foram bastante melhores, ou seja, só o facto da questão 2 ter um enunciado de um problema concreto já fez a diferença entre os resultados obtidos nas duas questões.

Na Tabela 4 apresentam-se as categorias encontradas a partir das justificações dadas pelos alunos na questão 2.

Tabela 4. Frequências (percentagens) das categorias de justificação na questão 2

Justificação	Frequência (%)
A hipótese nula pretende avaliar a afirmação do presidente de freguesia. É sempre uma condição de igualdade	59 (26,5)
Existem duas hipóteses: a hipótese em que $P(A)=0{,}7$ ou a hipótese alternativa $P(A)<0{,}7$	11 (4,9)
O candidato A põe como hipótese ser eleito com 60% dos votos, sendo 0,7 a hipótese do candidato B, segundo a amostra	5 (2,2)
Só o P_B é que poderia ser 0,7, pois os dados (105/150) foram obtidos na sondagem do candidato B	3 (1,3)
Nesta hipótese é que temos os dados amostrais	3 (1,3)
Uma vez que os dados representam a população, então é uma hipótese nula	2 (0,9)
Se o candidato A afirma que vai ser eleito com 60% dos votos, logo H_0 tem de ser $P_A > P_B$ pois para ser como o candidato A diz a hipótese tem de mostrar que ele tem mais probabilidade de ser eleito que o B	12 (5,4)
Se o candidato B pretende contestar a afirmação do candidato A, então, como são "adversários", o candidato B pretende mostrar que o candidato A, na amostra considerada, irá obter uma percentagem de votos inferior a 60%, logo $P_A < 0{,}6$	7 (3,1)
Justificação sem sentido	59 (26,5)
Não justificar	62 (27,8)
Total	223 (100)

A análise da Tabela 4 permite observar que as categorias "Justificação sem sentido" (26,5%) e "Não justificar" (27,8%) foram, em conjunto, a maioria das respostas. Tal leva a concluir que, destes alunos, uns não souberam justificar e outros apresentaram justificações que não fazem sentido. Esta constatação é bastante preocupante porque mostra que os alunos não compreenderam os testes de hipóteses. No caso das respostas sem sentido, os alunos apresentaram justificações como as seguintes: "A hipótese nula devia ser $P_1 - P_2$, $P_1 = P_2$"; "$P_B = 0{,}7$ e $P_A = 0{,}3$, então $P_A < 0{,}6$"; "$P_A = 0{,}7$ visto que $P_B = 0{,}7$ (70%) apenas 30% $(P_A = 0{,}3,\ P_A \neq 0{,}6)$ comprovaria que o candidato A estaria a falsificar as votações, não obtendo os dados apresentados, $P_A > P_B$, para vencer a eleições".

Ainda se salienta a percentagem de alunos que justifica corretamente a pergunta (27,4%). Estes alunos conseguiram interpretar corretamente o enunciado da pergunta escolhendo a opção correta e justificando que a hipótese nula é aquela que se pretende avaliar, que é sempre uma igualdade, que os dados representam a população e que é o valor que está a ser contestado. Na situação estabelecida no enunciado o que se pretendia era confirmar se o candidato A a presidente da junta de freguesia seria eleito com 60% dos votos.

Um outro grupo de alunos justifica que "Se o candidato A afirma que vai ser eleito com 60% dos votos, logo H_0 tem de ser $P_A > P_B$ pois para ser como o candidato A diz a hipótese tem de mostrar que ele tem mais probabilidade de ser eleito do que B" (5,4%). Este grupo de alunos não soube interpretar o enunciado da pergunta e também não sabe que a hipótese nula é apresentada como uma igualdade.

Um outro grupo de alunos (3,1%), tal como o anterior, comete o mesmo tipo de erro, ou seja não soube interpretar o enunciado da pregunta e também desconhece que a hipótese nula é sempre apresentada como uma igualdade. Estes alunos apresentaram a justificação de que "Se o candidato B pretende contestar a afirmação do candidato A, então, como são 'adversários', o candidato B pretende mostrar que o candidato A, na amostra considerada, irá obter uma percentagem de votos inferior a 60%, logo $P_A < 0{,}6$".

Finalmente, uma percentagem relativamente pequena (4,9%), apesar de ter escolhido a hipótese nula na forma de igualdade, não interpreta corretamente o enunciado porque justifica a sua escolha com, por exemplo: "O candidato A põe como hipótese ser eleito com 60% dos votos, sendo 0,7 a hipótese do candidato B, segundo a amostra. Nesta hipótese é que temos os dados amostrais e só o P_B é que poderia ser 0,7, pois os dados (105/150) foram obtidos na sondagem do candidato B".

5. Conclusões

Tal como relatam os estudos de Vallecillos e Batanero (1997) e Sebastiani e Viali (2011), também aqui se constatou que alguns alunos não compreendem que num teste de hipóteses são testados valores hipotéticos de parâmetros populacionais (questão 1) e cometeram erros quando enunciavam as hipóteses a partir do contexto de um problema (questão 2).

Tanto neste estudo, como no de Sotos, Vanhoof, Noorgate e Onghena (2007) verificou-se que os conceitos não compreendidos são causadores de erro, destacando-se as dificuldades dos alunos em compreender o significado da hipótese nula e alternativa (questão1 e 2).

Comparativamente com os estudos aqui revistos, no presente estudo destacam-se as categorizações apresentadas para as justificações que os alunos apresentaram para cada uma das respostas selecionadas nas duas questões propostas. As elevadas percentagens de alunos nas categorias "Justificação sem sentido" e "Não justificar", cujas justificações ou a sua ausência podem ser interpretadas como ideias erradas ou falta de conhecimentos. Este facto salientara as dificuldades dos alunos ao recusarem a definição de uma hipótese nula a partir de uma estimativa, mais agravado neste estudo do que no estudo de Vallecillos (1994), bem como a formulação da hipótese nula a partir de uma desigualdade. Por outro lado, a discrepância entre as percentagens de respostas corretas nas duas questões, que diminuíram em termos de justificações adequadas, parece perspetivar um conhecimento pouco consolidado dos alunos nos conceitos envolvidos.

Em resumo, os alunos mostraram ter muita dificuldade no tema "testes de hipóteses", principalmente na interpretação das perguntas e na justificação da forma como pensam em estatística, isto é, a forma como explicitam o seu raciocínio estatístico. Perante esta situação, esta análise aponta no sentido da necessidade de rever a forma de ensino referente a este tema. Para além de motivar os alunos para o tema, é imprescindível ajudá-los através de um ensino centrado em dados, encorajando o uso de dados reais e de tarefas de grupo como forma de melhorar as suas habilidades comunicativas por meio de discussões estatísticas, tal como propõem Ben-Zvi e Garfield (2005) e Batanero (2001 e 2013).

Referências

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero C., Vera, O., & Díaz, C., (2012). Dificultades de estudiantes de Psicología en la compresión del contraste de hipótesis. *Números*, *80*, 91-101.

Batanero C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. (pp. 55-61). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2005). Research on statistical literacy, reasoning, thinking: issues, challenges and implications. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 397-409). Netherlands: Springer.

DES (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. ME, Departamento do Ministério da Educação (2007). Programa de matemática do ensino básico. Lisboa, Portugal: DGIDC.

Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Tese de doutoramento, Universidad de Granada, Espanha.

Rodríguez, I. (2006). Estudio teórico y experimental sobre dificuldades en la comprensión del contraste de hipóteses en estudantes universitários. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 162-168.

Sebastiani R. (2010). *Análise de erros em testes de hipóteses: um estudo com alunos de engenharia*. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Católica, Rio Grande do Sul, Brasil.

Sebastiani R. & Viali, L. (2011).Teste de hipóteses: uma análise dos erros cometidos por alunos engenharia. *Bolema*, 24 (40), 835-854.

Sotos, C., Vanhoof S., Noortgate W. & Onghena P. (2007). Student's misconceptions of statistical of inference: a review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review*, 2, 98-113.

Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. In D. Vere-Jones (Eds.), *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, Netherlands: International Statistical Institute.

Vallecillos, A. (1996). Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas. Recife. Comares.

Vallecilos, A., & Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(1), 29-48.

Vallecillos A., Batanero C. & Godino J. (1992). Student's understanding of the significance level on statistical tests. En W. Geesling & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the XVII Conference on the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp.271-378). Universisad de Valencia.

Concepções de professores do ensino fundamental em relação ao ensino de estatística

Ailton Paulo Oliveira Júnior[1] *y Márcia LopesVieira*[2]

[1]drapoj@uol.com.br, Universidade Federal do Triângulo Mineiro
[2]marcialopes@iftm.edu.br, Instituto Federal do Triângulo Mineiro

Resumo

O presente estudo apresenta a concepção de 55 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de oito escolas (estadual, federal, municipal e privada) de Uberlândia, Minas Gerais. Portanto, através de um questionário, pretendeu-se verificar a concepção deste grupo de professores em relação ao ensino de Estatística. Para a análise das respostas dos professores utilizou-se a análise de conteúdo de Bardin (2009) a partir do qual as respostas dos professores foram transcritas e identificadas de acordo com cada tema gerado a fim de se compreender a mensagem contida no texto, assumindo as impressões envolvidas. As respostas oferecidas pelos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental permitiram refletir sobre como estes se relacionam com o ensino de Estatística e entender melhor como se relacionam com o processo ensino e aprendizagem desta importante área do conhecimento.

Palavras-chave: concepção, professores dos anos iniciais, ensino fundamental, ensino de estatística.

.

1. Introducción

Segundo Zabalza (1994), por meio das concepções dos professores, pode-se compreender o seu universo e suas ações. O autor ainda define que concepção é aquilo que o professor, em um dado momento, dá por deliberado e que orienta a sua ação, explícita e implicitamente.

Nessa vertente, pode-se comungar também com Ponte (1992) ao definir que as concepções têm natureza essencialmente cognitiva e que atuam como uma espécie de filtro, dando sentido às coisas ou atuando como bloqueador para novas situações, limitando a possibilidade de atuação e compreensão. Como elas estruturam o sentido que se atribui às coisas surge uma indagação: O sentido e a intencionalidade educativa são elementos importantes para repensar a prática pedagógica do professor?

Diante dessa questão é oportuno dialogar com os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1997), quanto ao desenvolvimento do ensino da Matemática, pois este ressalta que é necessário que o professor tenha clareza de suas próprias concepções sobre a disciplina, uma vez que em sala de aula, as suas escolhas pedagógicas, os conteúdos de ensino e as formas de avaliação da aprendizagem estão intimamente ligados a tais concepções.

Além disso, Ponte (1992) diz que as concepções formam-se num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros).

Ponte (1992) distingue crenças de concepções, situando as crenças em um domínio metacognitivo, ou seja, a faculdade de conhecer o próprio ato de conhecer, ou, em outras palavras, consciencializar, analisar e avaliar como se conhece e as concepções em um domínio cognitivo, no entanto, ele mesmo admite a frequente justaposição entre crenças e concepções, tornando assim não vazia a intersecção entre crenças e concepções.

Ainda de acordo com Ponte (1994), as concepções são marcos organizadores implícitos de conceitos que condicionam a forma com que afrontamos as tarefas.

Thompson (1992) identifica concepções como sendo estruturas mentais das quais fazem parte tanto as crenças como qualquer tipo de conhecimento adquirido por meio da experiência, nomeadamente significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais, preferências, dentre outros.

Schoenfeld (1992) parece atribuir um significado também amplo à ideia de concepção que ele define como compreensões e sentimentos individuais que moldam as formas como cada um conceitua e se envolve no comportamento matemático.

Cury (1999) destaca que os professores de Matemática dos anos iniciais concebem a Matemática a partir das experiências que tiveram como alunos e professores, do conhecimento que construíram, das opiniões de seus professores, enfim, das influências socioculturais que sofreram durante suas vidas, influências que vêm sendo construídas, passadas de geração pra geração.

Para Moron e Brito (2001), a última concepção é uma crença, uma vez que as concepções são relativas ao domínio cognitivo, enquanto que as crenças são altamente influenciadas pela cultura e referem-se à aceitação de uma ideia sem o devido suporte teórico.

Dessa forma, tomamos como principal definição de concepção nesse trabalho a expressa por Ponte (1992) ao dizer que essas têm natureza essencialmente cognitiva e que atuam como uma espécie de filtro, dando sentido às coisas ou atuando como bloqueador para novas situações, limitando a possibilidade de atuação e compreensão.

Tendo em vista o tema e o problema de pesquisa levantada, o objetivo geral é pesquisar as concepções de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em relação ao ensino de Estatística em oito escolas da cidade de Uberlândia no Triângulo Mineiro.

Na atualidade a formação de professores para ensinar Estatística é um tema importante de investigação como é ressaltado em Batanero, Burrill e Reading (2011); Gómez, Batanero e Contreras (2013) e Ortiz, Batanero e Contreras (2012).

2. Procedimentos Metodológicos

O público alvo da pesquisa são cinquenta e cinco professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas e privadas de Uberlândia, Minas Gerais que lecionam conteúdos de Matemática, sendo 15 professores de duas escolas estaduais, 15 professores de três escolas privadas, 13 professores de duas escolas municipais e 12 professores de uma escola federal.

As escolas públicas da pesquisa foram selecionadas de acordo com o seu Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – Ideb, criado em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino (Brasil, 2014).

O Ideb funciona como um indicador nacional que possibilita o monitoramento da qualidade da Educação pela população por meio de dados concretos, com o qual a sociedade pode se mobilizar em busca de melhorias. Para tanto, o Ideb é calculado a partir de dois componentes: a taxa de rendimento escolar (aprovação) e as médias de desempenho nos exames aplicados pelo Inep. Os índices de aprovação são obtidos a partir do Censo Escolar, realizado anualmente (Brasil, 2014).

No tocante às escolas privadas a amostragem escolhida é diversificada, uma vez que utilizou como critérios o tipo de escola privada, ou seja, confessional ou particular. A estrutura física também foi pensada, tanto ao pesquisar escolas maiores que tivessem mais demandas e escolas menores. A clientela das escolas diverge, pois a localização delas é em bairros diferentes.

Assim, através de um questionário com quatro questões abertas pretendeu-se verificar a concepção deste grupo de professores em relação ao ensino de Estatística. A primeira pergunta (O que é Estatística para você?) pretendeu investigar como os professores de Estatística definem os conteúdos estatísticos ou mesmo a Estatística. A segunda questão (Em sua opinião como uma pessoa adquire conhecimento em Estatística?) perguntou como este grupo de professores acredita que o conhecimento estatístico é adquirido, com o objetivo de identificar suas concepções sobre o uso de estatísticas. A terceira pergunta feita (Como você trabalha os conteúdos estatísticos em suas aulas?), objetiva identificar como esses professores trabalham com conteúdo estatístico em suas salas de aula. A última pergunta (Como você incorpora situações do cotidiano em suas aulas de Estatística?) procurou a opinião do mesmo grupo sobre o papel da utilização de situações do cotidiano no ensino de Estatística.

Para Bardin (2009), a análise de conteúdo torna-se um conjunto de técnicas de análise de comunicação que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens e os organiza em três fases: (1) Pré-Análise - fase em que o material é organizado a fim de sistematizar ideias iniciais; (2) Exploração do material - a definição de categorias e identificação das unidades e as unidades de contexto relatando em documentos; (3) Tratamento dos resultados inferência e interpretação - que resume as principais informações para análise, culminando em interpretações inferenciais, este é o momento para a intuição, a análise reflexiva e crítica.

Assim, as respostas dos professores foram transcritas e identificadas de acordo com cada tema gerado a fim de se compreender a mensagem contida no texto, assumindo as impressões envolvidas. Cada resposta foi examinada individualmente e associadas de acordo com a semelhança dos seus conteúdos e categorias assim definidas.

3. Resultados

Para facilitar a apresentação dos relatos dos professores em relação as suas concepções em relação ao Ensino de Estatística utilizamos a seguinte caracterização: (1) professores de Escolas Estaduais (PEE) seguido do número de identificação do professor (por exemplo, PEE1); (2) professores de Escolas Municipais (PEM) seguido do número de identificação do professor (por exemplo, PEM2); (3) professores da Escola Federal (PEF) seguido do número de identificação do professor (por exemplo, PEF3); (4) professores de Escolas Privadas (PEP) seguido do número de identificação do professor (por exemplo, PEP4).

A primeira questão “O que é Estatística para você?” observamos que dentre 45 professores (81,8%) do total de 55 professores que a responderam, 35,6% (16 professores) dos professores que participaram dessa pesquisa definiram que a Estatística é um conjunto de dados que devem ser coletados, organizados e analisados e que utiliza elementos matemáticos para o seu desenvolvimento. Apresentamos alguns depoimentos que corroboram este posicionamento:

- *Estatística é um conjunto de **dados**. **PEE6***
- *Estatística vai abranger a pesquisa, coleta de **dados** para determinada questão que utilizará a matemática para os resultados finais. **PEM13***
- Ainda destacamos um grupo de 13 professores (28,9%) que consideram a Estatística como importante instrumento para um melhor conhecimento do dia a dia. Apresentam-se também depoimentos que indicam esta opinião em relação ao que seja Estatística:
- *Estatística é uma disciplina fundamental a diversos assuntos, seja no mundo profissional ou até mesmo no **dia a dia**. **PEM10***
- *Conteúdos que estão não só na escola, mas no **cotidiano** das pessoas. **PEF10***

Lopes (2008) destaca a necessidade de se lembrar de que as raízes da Estatística estão centradas nas diferentes áreas do conhecimento e esta percepção remete-nos à interdisciplinaridade. O seu ensino deve ocorrer através das experimentações, observações, registros, coletas e análises de dados de modo interdisciplinar, possibilitando aos estudantes o desenvolvimento do sentido crítico, elemento fundamental no exercício de uma cidadania crítica, responsável e participativa.

A partir dos depoimentos dos professores, consideremos que estes se aproximam da definição de Estatística no site da Escola Nacional de Ciências Estatísticas – ENCE, que a considera como conjunto de técnicas e métodos de pesquisa que entre outros tópicos envolve o planejamento do experimento a ser realizados, a coleta qualificada dos dados, a inferência, o processamento, a análise e a disseminação das informações. Além disso, esta definição a nosso ver traz aspectos importantes sobre o que é Estatística, mostrando que além de ser um conjunto de técnicas e métodos, envolvem aspectos como a coleta, tratamento, apresentação e análise de dados que são importantes para auxiliar na tomada de decisão em diversas áreas do conhecimento, sendo ainda, útil para o nosso cotidiano.

Outra questão a ser analisada, para a determinação da concepção de como os professores do Ensino Fundamental de escolas públicas e privadas, considera de que forma uma pessoa adquire conhecimentos em Estatística, destaca-se que 25,5% destes professores acreditam que se adquire este conhecimento no cotidiano, associando a Estatística a situações do dia a dia. Para um melhor entendimento, destacamos as seguintes falas:

- *Se comprometendo, e entendo a importância da matemática para o **dia a dia**. **PEE11***
- *Com as vivências do **dia a dia**, vinculadas às explicações em sala de aula, estruturando o saber mais formal. **PEP15***

Segundo Corrêa (2012), em relação às experiências profissionais, percepções e concepções dos respondentes em relação ao ensino da Estatística, em sua pesquisa percebeu-se que todos atribuem a Estatística um lugar de relevância, justificando que conhecimentos estatísticos são importantes, pois estão presentes no cotidiano e nas avaliações de larga escala.

Destacam-se também aqueles professores (19,1%) que entendem que se adquire conhecimento estatístico por meio de Estudos. Apresentam-se os seguintes testemunhos que indicam este pensamento:

- ***Estudando**, claro, compreendendo os caminhos de raciocínio das mesmas e principalmente no fato de saber usá-las em seu cotidiano, entendendo como a Estatística é importante nos mais diferentes aspectos de vivência no dia a dia. **PEE7***

- ***Estudando** e buscando conhecimento, começando da base.* ***PEP7***

O processo de aprendizagem subjacente ao estudo implica que deve envolver ativamente, para que não seja um mero receptor de informação durante as aulas. É necessária a condução do processo de aprendizagem da melhor maneira e com muitos ganhos para a apreensão dos conteúdos a serem aprendidos.

Outra categoria de professores (17%) respondeu que é através da "Prática" que se adquirem conhecimentos estatísticos. Para melhor explicitar estas opiniões, apresentamos alguns depoimentos:

- *Empenho, exercícios, **práticas** e explicações.* ***PEE3***
- *Além da escola, **na prática**.* ***PEP11***

A terceira questão trata-se de quais são os procedimentos metodológicos utilizados por esse grupo de professores durante as suas aulas. Portanto, na análise das suas falas, destacamos cinco grandes categorias. Verifica-se que 19,6% dos professores demonstraram que o vínculo com o Dia a dia e com o Cotidiano é uma estratégia importante para o processo de ensino-aprendizagem conforme os seguintes relatos:

- *Gosto muito de trazer atividades concretas como, por exemplo: medidas de capacidade, massa e comprimento é mais fácil e o aluno aprende usando **coisas do dia a dia**. Trabalho com rótulos e pesquisas, acho muito valioso.* ***PEM14***
- *De forma lúdica **relacionando com a vida da criança**.* ***PEP14***

Na perspectiva de Lopes (2008), é necessário o desenvolvimento de práticas pedagógicas envolvendo situações em que os estudantes realizem atividades considerando seus contextos e que estes possam observar e construir os eventos possíveis, por meio de experimentação concreta, de coleta e de organização de dados.

Outra categoria (17,4%) em destaque para esta questão refere-se aos professores que trabalham a Estatística a partir de Representações Gráficas relacionadas à realidade dos seus alunos. Indicamos algumas declarações para explicitar melhor estas práticas:

- *Através de informações de dados, **gráficos** e material concreto.* ***PEE4***
- *Como ministro aulas para o Ensino Fundamental (1° ao 5° ano) trabalho com **gráficos** oriundos de pesquisas relacionadas à realidade do aluno.* ***PEM4***
- *Com **gráficos**, tabelas em data show e na lousa.* ***PEF12***

Segundo Corrêa (2012), destaca que os saberes estatísticos estão ligados a outras disciplinas, sendo expressos em gráficos e tabelas, requerendo conceitos estatísticos para a sua interpretação. Lopes (2010) indicam que se deve incentivar a leitura e a interpretação de gráficos, de tabelas e de medidas publicadas pelos diversos meios de comunicação, a fim de que o aluno saiba posicionar-se de forma crítica diante dessas informações e fornecer-lhes ferramentas para arguir e "desmantelar" informações porventura falaciosas ou mal intencionadas.

O papel do professor no processo ensino-aprendizagem da Estatística deve partir de uma metodologia por meio da proposição de problemas concretos e da realização de experimentos reais, favorecendo a formação do aluno num desenvolvimento a caminho da cidadania.

Finalizando a terceira questão, dois grupos de professores afirmaram que trabalham os conteúdos estatísticos através da Teoria e Prática (13%) e com Outros (4,4%) métodos conforme os relatos a seguir:

- *Com **teoria e prática**. **PEE14***
- *Desde a acolhida da turma, com a contagem/soma/subtração de alunos. O que o resultado disso representa trabalho diariamente, o calendário/aniversariantes; relógio (quantas horas); rotina; problemas matemáticos envolvendo **dados reais** da turma; data; gráfico de votações, etc. **PEF5***

Observamos também que recai sobre o professor, principalmente, o papel de ensinar esses conteúdos aos alunos. E, como sabemos, um dos principais recursos de ensino utilizados pelo professor é o livro didático, recurso que se configura numa das poucas formas de documentação e de consulta usada por professores e alunos nas escolas públicas (Brasil, 2004).

A Estatística deve ser aplicada no dia a dia, pois é uma ciência que está a serviço das demais além de ser um tema interdisciplinar. E considerando estes aspectos, a última pergunta questiona à maneira como os professores incorporam situações do cotidiano em suas aulas de Estatística. Os relatos a seguir, demonstram que 28,6% dos professores incorporam a Estatística em suas aulas através da Prática:

- *Estabelecendo vínculo com o mundo, por meio de atividades **práticas** e com materiais didáticos manipulados pelos alunos. **PEP2***
- *Usando **exemplos práticos**, dentro da compreensão deles, usando uma linguagem adequada ao que propomos dentro de cada aula. **PEM7***

Acredita-se que uma forma interessante de adquirir esse conhecimento é por meio da junção de diversos componentes de uma metodologia como a contextualização como cotidiano do aluno, com temas atuais, a prática e a pesquisa, como observa Miguel (2003) que o conhecimento matemático não se consolida como um rol de ideias prontas a serem memorizadas; um processo significativo de ensino de Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma grande variedade de ideias e de estabelecimento de relações entre fatos e conceitos de modo a incorporar os contextos do mundo real, as experiências e o modo natural de envolvimento para o desenvolvimento das noções matemáticas com vistas à aquisição de diferentes formas de percepção da realidade.

Nesta mesma questão, 26,2% dos professores destacam situações que envolvem pesquisas que utilizam em suas aulas, quais sejam:

- *Trabalhando **pesquisa**, ex: filme preferido dos alunos, lanche preferido, contas de boleto, supermercado e outros. **PEM11***
- *Por meio das situações ocasionais (reportagens, informações do governo público, divulgação de dados e **pesquisas**) ou atividades sequenciadas envolvendo a estatística e probabilidade nas situações problemas. **PEF8***

Para Silva (2007) trabalhar a Estatística através de projetos ou o desenvolvimento de uma pesquisa, objetiva que o estudante sinta necessidade de resolver um problema, o que poderá garantir seu envolvimento. Dessa forma, o problema deixaria de ser resolvido apenas porque o professor o pede, pois o estudante estando envolvido passaria a desejar a solução e buscaria ferramentas necessárias para isso.

Onuchic e Allevato (2009) defendem que o problema é ponto de partida para se alcançar o conhecimento e posicionam o professor como guia e o aluno como co-construtor nos processos de ensino-aprendizagem. Neste sentido, 2 (dois) grupos de professores (21,4% cada) afirmam que através de Situações Problemas e do Dia a dia é possível incorporar circunstâncias do cotidiano nas aulas que envolvem os conteúdos estatísticos. Algumas respostas expressam melhor o pensamento dos professores:

- ***Situações problemas*** *e pesquisas.* ***PEE2***
- *Através* ***de rodas de conversa colhendo informações*** *necessárias para o desenvolvimento do trabalho em sala de aula.* ***PEM4***
- *Através de exemplos práticos do* ***dia a dia****.* ***PEP1***

Gal (2002) aponta os estudos estatísticos como ferramentas importantes para a formação de um cidadão capacitado a resolver situações-problema que estão presentes em seu cotidiano com melhor desempenho.

A competência para pensar estatisticamente consiste em que uma pessoa seja capaz de compreender mensagens simples e diretas presentes no cotidiano, bem como as que envolvem processos complexos de inferência. Percebemos que dominar essa forma de pensamento seja essencial a qualquer indivíduo comum para que tenha maiores possibilidades de exercer sua cidadania (Lopes, 2003).

4. Considerações finais

Quando definem o que é Estatística, os professores pensam em coleta, organização e analise de dados, mas ficam na dúvida quanto a ser um método, ou técnica, ou uma ciência ou elementos para tomada de decisão ou parte da matemática aplicada, indicando que é necessário um estudo mais aprofundado dos elementos estatísticos.

Os professores acreditam que a melhor forma de obter o conhecimento estatístico é por meio do estudo da teoria aliada à prática de pesquisa para que os alunos se interessem pela aprendizagem deste conteúdo. Indica-se também que grande parte dos professores pensa que a obtenção deste conhecimento se vincule simplesmente a apresentação de fórmulas e outros nem mesmo expuseram sua opinião podendo indicar a sua não utilização dentre os conteúdos que devem fazer parte da formação de seus alunos.

E quanto à forma como estes professores trabalham os conteúdos estatísticos em sala de aula, alguns deles tomam tabelas e gráficos e associam a situações do cotidiano, mas a maioria diz não saber como apresentar estes conteúdos.

Especificamente, os professores quando perguntados se incorporaram situações do cotidiano às aulas de conteúdos estatísticos, alguns utilizam situações simples do cotidiano do aluno, como dados dos próprios alunos: idade, letra inicial do nome, idade, animais preferidos e até a moeda vigente para elaborar tabelas e gráficos. E da mesma forma que nas questões anteriores, muitos deles também não deixam claro como estes elementos podem ser inseridos em aulas de matemática.

Enfim, é preciso difundir e aprofundar mais os conhecimentos estatísticos nos encontros de formação de professores e nos contextos de trabalho da escola, ressaltando as abordagens teórico-metodológicas que podem ser utilizadas nas séries iniciais, quando tratam dos conteúdos estatísticos para o tratamento da informação e incentivar os estudos que possam contribuir para o desenvolvimento da Educação Estatística.

Acreditamos que este estudo possa ser uma possível contribuição para o progresso de produções acadêmicas que enfatize a necessidade da abordagem Estatística no processo de ensino-aprendizagem para que o cidadão atue criticamente em seu meio social.

Vislumbra-se também que mais docentes passem a compreender e ter uma concepção desse conteúdo com uma visão consciente de tal forma que colaborarem com o preenchimento da lacuna existente de estudos e práticas pedagógicas que contemplem essencialmente da Estatística desde o início do Ensino Fundamental a fim de prolongar aos demais níveis de ensino com sucesso.

Referências

Bardin, L. (2009). *Análise de conteúdo*. Lisboa, Portugal; Edições 70.

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. challenges for teaching and teacher education.*. New York: Springer.

Corrêa, A. A. (2012). Saberes docentes e educação estatística: composições analíticas no Ensino Médio. *Educ. Matem. Pesq*.**,** São Paulo, 14(1), 67-83.

Cury, H. N. (1999). Concepções e crenças dos professores de matemática: pesquisas realizadas e significados dos termos utilizados. Bolema, São Paulo: Unesp, 12(13), 29-44.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy: meanings, components, responsibilities – appeares. *Internacional Statistical Review*, Espanha, 70(1), 1-33.

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, C. (2013). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema 28* (48), 209-229.

Lopes, C. A. E. (2003). *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil***.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Campinas: Faculdade de Educação da Universidade de Campinas.

Lopes, C. A. E. (2008). O ensino de estatística e da probabilidade na Educação Básica e a formação de professores. *Caderno Cedes*, 28(74), 57-73.

Lopes, C. A. E. (2010). Os desafios para educação estatística no currículo de matemática. In: Lopes, C. E., Coutinho, C. & Almouloud, S. *Estudos e reflexões em Educação Estatística***.** Campinas: Mercado de Letras, 2010.

Miguel, J. C. (2003). *O ensino de matemática na perspectiva de formação de conceitos: implicações teóricos-metodológicas*. Recuperado de http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/Ensino-Matematica-Enfoque-Conceitos.pdf.

Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental Brasil. (1997).. *Parâmetros curriculares nacionais primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Ministério da Educação e do Desporto. Brasil. (2004). *Guia de livros didáticos*: 1ª a 4ª séries. Brasília: MEC.

Ministério da Educação e do Desporto. Brasil. (2014). *Índice de desenvolvimento da educação básica (Ideb).* Recuperado de http://portal.mec.gov.br.

Moron, C. F. e Brito, M. R. F. (2001). Atitudes e concepções dos professores da educação infantil em relação à Matemática. In Brito, M. R. F. Psicologia da educação matemática**:** teoria e pesquisa. Florianópolis: Editora Insular, 263-277.

Onuchic, L. R. e Allevato, N. S. G. (2009). Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas**.** *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, 55, 1-19.

Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latino Americana de Matemática Educativa,* 15(1), 63-91.

Ponte. J. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. in educação e matemática: Temas de Investigação. Lisboa: IIE e Secção de Educação e Matemática da SPCE, 186-239.

Ponte, J. (1994). Matthematics teachers´professional knowledge. In J. Ponte, & J. Matos, Proceedings of the Eighteen International Conference of the Psycology of Mathematics Education. Lisboa: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In Grouws, D. A. Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan, 334-370.

Silva, C. B. (2007). *Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de matemática*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: Faculdade de Educação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Thompson, A. (1992). *Teachers' beliefs and conceptions*: A synthesis of the research. In: GROUWS, D. A. Handbook of research in mathematics teaching and learning**.** New York: Macmillan.

Zabalza, M. A. (1994). *Diários de aula. Contributo para o estudo dos dilemas práticos dos professores*. Porto: Porto Editora, Colecção Ciências da Educação.

Conhecimentos de futuros professores de matemática sobre probabilidade condicional por meio do jogo das três fichas

José Ivanildo Felisberto de Carvalho

ivanfcar@hotmail.com - Universidade Federal de Pernambuco – UFPE/Brasil

Resumo

Esta comunicação discute conhecimentos necessários para a compreensão do conceito de probabilidade condicional na formação inicial do professor de matemática. Apresentamos a análise de um jogo vivenciado com 25 futuros professores do curso de Matemática-licenciatura da UFPE – campus acadêmico do Agreste. Os resultados apontam lacunas no conhecimento comum e especializado do conteúdo deste grupo com o conceito de probabilidade condicional. A atividade está ancorada na literatura sobre os processos de ensino e aprendizagem da probabilidade constituindo-se também como exemplo de abordagem na formação do professor para melhor desempenho em seu futuro exercício docente.

Palavras chave: Probabilidade Condicional; Educação Probabilística; Formação de professores; Conhecimentos de professores de matemática.

1. Introdução

O conceito de probabilidade condicional é um conceito relevante no campo das estatísticas por considerar alterações no nosso grau de crença sobre eventos aleatórios ao adquirimos novas informações. Ter conhecimentos concernentes a este conceito é base para uma sábia tomada de decisão em situações que envolvem a incerteza, seja na vida cotidiana, seja no campo profissional.

A natureza da probabilidade condicional precisa de uma atenção especial dos professores de matemática por que o mapeamento do espaço amostral se revela mais complexo. A utilização apenas procedimental da fórmula não propicia uma compreensão deste conceito. Este conceito é utilizado tanto na estatística clássica como na bayesiana reforçando a necessidade de uma abordagem diferenciada e significativa do mesmo.

A probabilidade condicional refere-se à probabilidade de ocorrer um evento (A) sabendo-se que outro evento (B) já ocorreu. Formalmente, se define mediante a expressão:

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B) \text{ sempre que } P(B) > 0.$$

Em pesquisas realizadas por diversos autores, envolvendo tanto professores como estudantes, uma das dificuldades com probabilidade condicional é discriminar adequadamente a direção da condicional P (A|*B*) e P (B|*A*) ou supor que P (A|*B*) e P (B|*A*) são iguais (Batanero, Contreras e Díaz, 2012; Oliveira, 2013). Esse erro é denominado por Falk (1986) como *falácia da condicional transposta.* Pelo teorema da Bayes, estas probabilidades condicionadas só são iguais se A e B tiverem a mesma probabilidade.

Este erro pode levar a serias consequências, tal como o exemplo explicitado em Batanero et al (2012, p. 8): *a confusão entra a probabilidade de que uma criança afetada com síndrome de*

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 189-196). Granada, 2015.

Down dê uma amniocentesis pré-natal[1] *positiva, que é alta e o fato de que, sendo o diagnóstico positivo a criança realmente tenha síndrome de Down, que é muito menor.*

Atividade que aparentemente parecem ser fáceis, mas que tem soluções contra-intuitivas, se constituem grande fonte de erros e incompreensões, tanto por parte de alunos como por professores.

2. Antecedentes e Marco Teórico

Falk (1986) ao investigar a *falácia da condicional transporta*, advoga que tal dificuldade pode ser proveniente da interpretação da condicionalidade como causalidade, da definição do evento condicionante e a confusão da probabilidade inversa.

Estudo realizado por Figueiredo (2000) com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e Ciências da Computação ressalta que diante de questões que envolvam a probabilidade condicional os estudantes diferenciavam esta da probabilidade da interseção e o cálculo da P(A/B) do de P(B/A), desde que estes se apresentassem nas perguntas em linguagem natural. Quando as questões análogas eram apresentadas na linguagem simbólica, muitos alunos mostraram dificuldades em resolvê-las.

Estrada e Díaz (2006) apresentaram um estudo avaliando os "sesgos" (deslizes; desvios) no raciocínio condicional de uma amostra com 159 estudantes de Matemática, Magistério e Psicologia. Os resultados indicam que o tema não resulta fácil para estes estudantes e evidencia a necessidade de potencializar a formação estatística sobretudo entre os futuros professores de matemática.

Contreras (2011) desenvolveu em sua tese de doutoramento um conjunto de cinco estudos para compreender os conhecimentos de professores e alunos sobre probabilidade condicional e o uso de recursos didáticos na Formação de professores do ensino primário e secundário com foco na probabilidade condicional. O estudo de número 5 apresentou como um dos objetivos fazer os professores (166 participantes da Espanha, México e Portugal) experimentar uma situação didática baseada em um paradoxo clássico da teoria probabilística com intuito de aflorar alguns conhecimentos matemáticos e didáticos deste grupo concernente a probabilidade condicional. Uma proporção considerável destes professores mostrou intuições incorretas no começo da atividade – Jogo das Três Fichas e não foram capazes de dar uma demonstração matemática completa da estratégia uma vez identificada ao final do jogo. A atividade se mostrou útil para provocar a reflexão didática do professor. Em nosso caso, utilizamos este jogo com os mesmos objetivos, posto que, esperamos que os futuros professores da nossa mostra tenham os conhecimentos suficientes sobre probabilidade condicional para realizar o seu exercício docente de forma eficaz neste campo.

Escolhemos também, compondo nosso marco teórico, os estudos sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino, desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008). Estes pesquisadores descrevem o conhecimento matemático para o ensino como "o conhecimento matemático que o professor usa na sala de aula para que o aluno construa o conhecimento." Logo, tomamos como

[1] A amniocentese é um método de diagnóstico pré-natal que é tipicamente aconselhado aos pais perante a probabilidade de deformações genéticas durante a gravidez.

base as categorias de conhecimentos necessários ao professor de matemática, estabelecidas por esses pesquisadores e que discorremos em seguida.

Conhecimento do conteúdo

O *conhecimento do conteúdo comum* é o conhecimento colocado em jogo por qualquer pessoa para resolver determinados problemas matemáticos. No tocante ao ensino de probabilidade condicional, o professor dos anos finais do Ensino Fundamental, deve ter a capacidade de, por exemplo, de discriminar um evento que envolve probabilidade simples de uma probabilidade condicional.

O *conhecimento do conteúdo especializado* inclui, por exemplo, aspectos como identificar ideias matemáticas que dão base a resolução de um problema. Em relação ao ensino da probabilidade condicional, o professor dos anos finais do Ensino Fundamental deveria saber a epistemologia do conceito de probabilidade em que neste processo encontramos diferentes significados. Conhecer ainda as limitações e avanços de cada significado, a saber: clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. Discriminar entre probabilidade simples, composta e condicional. Ter capacidade para leitura em tabelas de contingência – que são usadas para registrar observações independentes de duas ou mais variáveis aleatórias, normalmente qualitativas; compreendendo ainda sobre entre independência e dependência dos dados. Com este domínio o professor pode propor situações em que ajude os estudantes a construir o conhecimento em probabilidade condicional numa perspectiva integral.

E por fim o *conhecimento horizontal do conteúdo*, que é o conhecimento da relação com outras disciplinas e as conexões intradisciplinares, a título de exemplo, com a história da matemática e da própria probabilidade.

Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

O *conhecimento do conteúdo e do currículo* está relacionado com a compreensão dos programas curriculares para um determinado conteúdo. O professor, por exemplo, deve ter um conhecimento sobre a pertinência ou não da inclusão de um conteúdo em um determinado nível escolar e as implicações didáticas que advém desta escolha.

O *conhecimento do conteúdo e dos estudantes*, ou seja, o conhecimento de como os estudantes aprendem determinados conteúdos; por exemplo, o professor, ao saber que seus alunos têm dificuldades no mapeamento do espaço amostral, deve incentivar que eles busquem estratégias para a superação dessa dificuldade.

O *conhecimento do conteúdo e do ensino* é resultante da integração do conhecimento do conteúdo matemático e do ensino desse conteúdo; por exemplo, o professor poderá discutir com seus alunos diferentes registros para a determinação do espaço amostral, como tabelas de dupla entrada e diagramas de árvore. Nesse âmbito, o professor deverá também ter conhecimento de estudos e pesquisas indicando questões relativas ao ensino e aprendizagem da probabilidade condicional. Estudos que apontem uma melhor abordagem para dirimir as falácias como o caso da condicional transposta.

3. Método

Participantes. Os participantes da pesquisa foram estudantes do curso de Matemática-Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste – Universidade Federal de Pernambuco. A disciplina foi a de Estatística e Probabilidade, em sua maioria, estudantes do 2º período e 3º período. Participaram da atividade 25 estudantes. Contudo, não há implicações para os resultados que vamos apresentar, uma vez que apresentamos as análises por atividades.

Atividade – Jogo das Três Fichas. Propomos esta atividade para permitir aos estudantes a ressignificação e/ou mesmo a construção do conhecimento sobre probabilidade condicional, mobilizando o conhecimento específico do conteúdo. Pretendemos por meio dessa atividade que os licenciandos – futuros professores – reflitam suas dificuldades e seu rebatimento nas suas futuras salas de aula. Para isto, lançamos mão do Jogo das Três Fichas apresentado por Contreras em diversas publicações (Contreras, 2001; Contreras, Batanero, Arteaga, e Cañadas 2012; Batanero, Contreras, Díaz e Cañadas, 2014). Este jogo foi sistematizo com base no Paradoxo das Caixas de Bertrand, assim conhecido por ter sido estudado pelo matemático francês do século XIX Joseph Bertand. O jogo tem o seguinte enunciado:

Se tomam 3 fichas da mesma forma e tamanho, das quais uma é vermelha em ambas as faces; outra é azul por uma face e vermelho na outra e a terceira é azul nas duas faces. O professor coloca as três fichas em uma caixa, que agita convenientemente, antes de selecionar uma das três fichas ao azar. Mostra uma das faces da ficha, mantendo a outra escondida, pedindo a seus alunos que adivinhem a cor do lado oculto. Uma vez feita as apostas, o professor mostra o lado oculto. Cada aluno que tenha acertado a previsão efetuada consegue um ponto.

Temos como objetivo aflorar nos professores alguns conhecimentos matemáticos e didáticos com relação a probabilidade condicional. Além de confrontá-los por meio das suas estratégias articulado ao conceito de probabilidade condicional.

Os estudantes receberam uma folha de registro com o enunciado e espaço para os demais registros que a atividade solicita. Cada estudante deve apresentar sua estratégia e argumentar sobre a estratégia escolhida. Foi disponibilizado um espaço para o debate coletivo e decidir qual é a melhor estratégia e analisar os diferentes argumentos envolvendo a probabilidade condicional.

Análise dos Dados. Para análise dos dados adotamos uma perspectiva de análise qualitativa e não apenas quantitativa com base em acerto e erros. Os protocolos foram analisados por diversas vezes para definição das variáveis e categorias.

Por meio dos protocolos, das estratégias adotadas e do debate em sala de aula pudemos levantar dados para uma análise mais ampla ao qual estamos apresentando neste texto. E ainda, no que diz respeito aos conhecimentos necessários ao ensino de probabilidade, consideramos as categorias apresentadas por Ball *et al* (2008) tal qual discutido no capítulo acima, porém para análise da atividade aqui apresentada, nosso foco centra-se no *conhecimento comum do conteúdo* e no *conhecimento especializado do conteúdo* de probabilidade.

4. Resultados e discussões

Tomamos para nossa análise as estratégias descritas em Contreras (2011) e Contreras, Díaz, Batanero e Ortiz (2010), a saber:

E1 – Apostar na mesma cor da face que se vê (correta);

E2 – Apostar na cor contrária da que se mostra;

E3 – Considerar que não utilizou nenhuma estratégia - escolha aleatória;

E4 – Eleger uma das cores em todos os ensaios;

E5 – Uso dos resultados anteriores para a escolha;

E6 – Mudar as estratégias ao longo da sequência dos ensaios;

E7 – Propriedades não físicas das tarjetas.

Analisando as estratégias iniciais (primeira jogada), temos a tabela abaixo que apresenta a frequência absoluta dos tipos de estratégias e as respectivas porcentagens com relação a estratégia inicial.

Tabela 1: Estratégias Iniciais

Estratégias	*Freq.*	*Porc. (%)*
E2	5	20,0
E3	17	68,0
E4	1	4,0
E5	2	8,0
TOTAL	25	100,0

Os índices nos revelam que um maior grupo de licenciandos (68%) considerou que não utilizavam nenhum tipo de estratégia em suas apostas ou que apostavam aleatoriamente (E3). Alguns argumentos errôneos apresentavam uma ideia de que os resultados de dar uma das cores seriam equiprováveis. Nenhum dos participantes elegeu a estratégia correta “E1” como estratégia inicial. Esses resultados estão na mesma direção dos resultados de Contreras (2011) em que a E3 é a de maior índice (47,6%) de indicações dos participantes da sua pesquisa com 166 professores em exercícios e futuros professores.

No segundo momento da atividade, realizava-se outro sorteio e desta vez era solicitado aos estudantes, além de identificar a estratégia elegida por eles, deveriam apresentar uma demonstração matemática para a mesma. Temos que 61,5% apresentaram uma demonstração matemática, enquanto que 38,5% não responderam este item.

O problema pode ser resolvido de diversas formas e sem necessariamente utilizar a formula da probabilidade condicional. Uma solução correta e mais intuitiva é observar que das 3 fichas, duas tem a mesma cor. Ao sortear uma ficha aleatoriamente temos três possibilidades (as três fichas). Os casos favoráveis são as duas fichas de mesma cor. Logo, a probabilidade de face oculta = face visível é igual a probabilidade de duas faces iguais, ou seja, 2/3.

Dos estudantes que responderam (61,5%), os mesmos utilizaram frações, porcentagens, combinações e diagramas das possibilidades para demonstrar sua estratégia. A seguir, apresentamos três protocolos com as justificativas e estratégias.

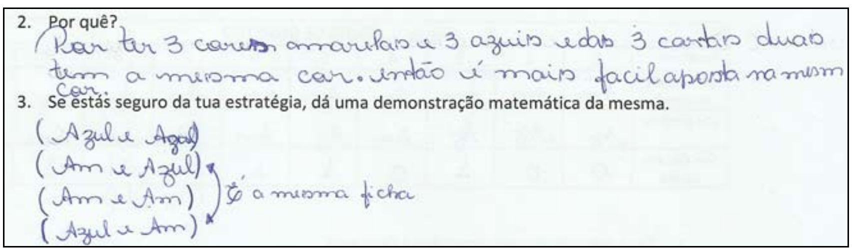
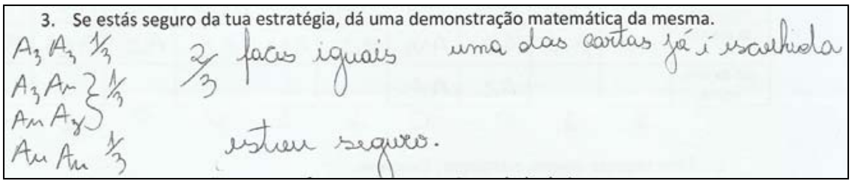

2. Por quê?
(Por ter 3 cores amarelas e 3 azuis e das 3 cartas duas tem a mesma cor. então é mais facil aposta na mesma cor.
3. Se estás seguro da tua estratégia, dá uma demonstração matemática da mesma.
(Azul e Azul)
(Am e Azul)
(Am e Am)
(Azul e Am)
É a mesma ficha

Figura 1: protocolo nº 15

O estudante acima aponta para a resposta correta da probabilidade que é de 2/3. No entanto, ao explicitar sua demonstração matemática se confunde ao mapear o espaço amostral e seu argumento se torna errôneo. É preciso levar em consideração o fato de que mesmo que a possibilidade "Az1 e Az2" e "Az2 e Az1" represente fisicamente a mesma ficha, mas são possibilidades diferentes dentro do espaço amostral. O protocolo demonstra que o estudante consegue considerar isto para as fichas de cores diferentes, mas não o faz para as fichas de mesma cor. O correto seria explicitar as diferentes faces que se tem com as fichas, uma representação poderia ser a seguinte:

Ficha amarela nas duas faces (Am1 e Am2), Ficha azul nas duas faces (Az1 e Az2) e Ficha Azul em uma face e amarela na outra (Am e Az). O espaço amostral compreenderia os seguintes resultados: Am1_Am2; Am2_Am1; Az1_Az2; Az2_Az1; Am_Az; Az_Am.

Como observamos, temos quatro resultados favoráveis dentre todos os seis resultados possíveis, pela regra de Laplace, a probabilidade é de 4/6 ou 2/3. Observemos agora a resolução do próximo estudante.

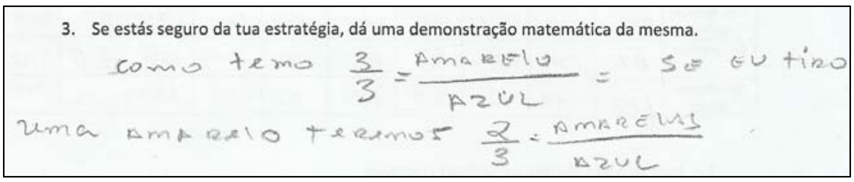

3. Se estás seguro da tua estratégia, dá uma demonstração matemática da mesma.

Az Az 1/3   2/3 faces iguais   uma das cartas já é escolhida
Az Am } 1/3
Am Az
Am Am 1/3   estou seguro.

Figura 2: protocolo nº19

O estudante apresenta uma dificuldade para construir um argumento correto com base no espaço amostral, também como no protocolo anterior. O que destacamos deste estudante é a frase *"uma das cartas já é escolhida"* que sinaliza uma noção do significado da probabilidade condicional.

Para chegar a uma demonstração correta utilizando a probabilidade condicional, poderia se pensar na resposta à seguinte pergunta: Qual a probabilidade de ocorrer Am dado que Am já tenha ocorrido? Como nos estudos de Falk (1986) entender este evento condicionante não é tarefa fácil para os estudantes. Utilizando o algoritmo do cálculo da probabilidade condicional "$P(Am|Am) = P(Am \cap Am) / P(Am)$" encontramos $(1/3) / (1/2) = 2/3$. De forma análoga para a cor azul. E para confirmar utilizando a ficha de cor diferente: Qual a probabilidade de ocorrer Am dado que Az já tenha ocorrido? Encontramos como resposta $(1/6) / (1/2) = 1/3$. De forma análoga encontramos o mesmo resultado trocando as cores. Assim, a probabilidade de apostar na mesma cor é maior e se torna em uma estratégia mais sabia. Observemos mais um protocolo.


3. Se estás seguro da tua estratégia, dá uma demonstração matemática da mesma.

como temo $\frac{3}{3} = \frac{\text{amarelo}}{\text{azul}}$ = se eu tiro uma amarelo termos $\frac{2}{3} = \frac{\text{amarelas}}{\text{azul}}$

Figura 3: protocolo nº5

Já este estudante da figura 3 apresenta um argumento errôneo e que o leva para uma resposta incorreta. O que o mesmo realiza como demonstração matemática é o estabelecimento da razão entre a quantidade de amarelos e quantidade de azuis. Esse é um erro comum e que envolve o significado da probabilidade clássica.

Após a realização do jogo e dos questionamentos que a atividade possibilita começamos a discutir situações em que é necessário calcular a probabilidade de um evento dado que outro já tenha ocorrido e assim sistematizar o conceito de probabilidade condicional a que esta atividade propicia. Além disto, houve uma reflexão sobre a utilização deste jogo como um recurso didático que faz aflorar confusões ao se raciocinar condicionalmente.

5. Considerações finais

Estes resultados são motivos de preocupação, na formação inicial dos estudantes do curso de Matemática-Licenciatura, uma vez que se aos mesmos não for propiciada uma vivência de situações que mobilizem os conhecimentos necessários ao ensino, os professores tenderão a falhar no ensino de probabilidade, bem como em algumas atividades profissionais que requerem o raciocínio probabilístico, tais como compreender o que os alunos sabem e ainda, decidirem estratégias didáticas de ação para dirimir tais dificuldades.

Defendemos, com base nos estudos aqui apresentados, que os licenciandos devem na sua formação inicial entrar em contato com atividades que mobilizem e avancem os conhecimentos necessários para os processos de construção do conceito de probabilidade. Devem dominar os diferentes significados de probabilidade, da probabilidade condicional e das noções que sustentam este conhecimento. Devem ter em seu repertório situações didáticas para a sua futura prática profissional. É necessário conhecer as implicações didáticas das abordagens que discutimos para um melhor planejamento do seu ensino sobre probabilidade.

Ao mobilizar tais conhecimentos com os licenciandos estaremos avançando na transição do *conhecimento comum* para o *conhecimento especializado de probabilidade,* e que, reverbere no Conhecimento Matemático para o Ensino de Probabilidade Condicional.

Referências

Ball, D., Thames, M. H. e Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Educacion* 5, 389-407. Disponível em: http://jte.sagepub.com/content/59/5/389.

Batanero, C., Contreras, J. M. e Díaz, C. (2012). Sesgos em el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet. 12* (2).

Batanero, C., Contreras, J.M., Díaz, C. e Cañadas, G. (2014). Preparing teachers to teach conditional probability: a didactic situation based on the Monty hall problem. In Wassong, T., Frischemeier, D., Fischer, P., Hochmuth, R., & Bender, P. (Eds). *Mathematik- und Stochastiklernen mit Werkzeugen - Using Tools for Learning Mathematics and Statisti*cs (pp. 363-376). Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum.

Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos de futuros profesores y recursos formativos sobre la probabilidad condicional. Tese Doctoral–Universidade de Granada.

Contreras, J. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2012). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilon, 28*(2), 7-20. .

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Ortiz, J. J. (2010). Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo. *Educaçao Matemática e Pesquisa, 12* (2), 181-198.

Estrada, A., Díaz, C. e De la Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo e T. Sierra (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIV* (p.271-280). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Falk, R. Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Figueiredo, A. C. (2000). *Probabilidade condicional: Um enfoque de seu ensino e aprendizagem.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Oliveira, F. F. de. (2013). Registros de representações semióticas no ensino de probabilidade condicional. *Anais do XVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática.* Vitória – ES.

Dificultades en el desarrollo de una concepción estocástica de las distribuciones muestrales utilizando un ambiente computacional

Santiago Inzunza Cazares

sinzunza@uas.edu.mx, Universidad Autónoma de Sinaloa

Resumen

En el presente artículo reportamos resultados de una investigación realizada con 22 estudiantes universitarios del área de ciencias sociales sobre el razonamiento e imágenes que construyen sobre conceptos de población, muestra, variabilidad muestral, efecto del tamaño de muestra y error de muestreo, los cuales son parte esencial en el desarrollo de una concepción estocástica de la inferencia estadística. Los resultados muestran que los estudiantes adquirieron algunos elementos que caracterizan una concepción estocástica del muestreo cuando respondieron diversas preguntas, recién concluidas las actividades de simulación, tales como identificación correcta de la variabilidad muestral mediante un intervalo, efecto del tamaño de muestra en el error muestral y la forma y variabilidad de una distribución muestral. Sin embargo, cuando se les administró un cuestionario días después, varios estudiantes no lograron distinguir gráficamente una población de una distribución muestral, y no tuvieron claridad en la idea de que los datos que se representan en la distribución muestral son estadísticos calculados sobre una muestra –en este caso la media-. Se identificaron imágenes erróneas sobre la idea de población y variabilidad desde un punto de vista gráfico que obstruyeron un razonamiento adecuado.

Palabras clave: Población, muestra, variabilidad muestral, simulación.

1. Introducción

Una distribución muestral representa el valor que puede tomar un estadístico (por ejemplo, la media o la proporción) en cada una de las muestras aleatorias de un tamaño dado que son posibles de seleccionar de una misma población. Así, en tanto los estadísticos constituyen el medio para estimar los parámetros poblacionales, el conocimiento de su distribución muestral permite determinar intervalos de valores entre los cuales se puede encontrar el parámetro de interés, o si suposiciones de valores de los parámetros, concuerdan con los valores del estadístico y su ubicación en la distribución muestral.

La enseñanza tradicional de las distribuciones muestrales y la inferencia estadística en los cursos universitarios está basada en un enfoque formal deductivo que utiliza la teoría de la probabilidad, por lo que requiere de un lenguaje matemático que está fuera del alcance de muchos estudiantes –particularmente de los estudiantes del área de ciencias sociales y humanidades-; y más importante aún, la distribución muestral descrita mediante una distribución teórica de probabilidad es difícil de asociar con el proceso real que se utiliza en la selección de muestras de una población (Lipson, 2002; Meletiou-Mavrotheris, 2004).

Las fuentes de dificultad asociadas a las distribuciones muestrales son de diversa índole. Chance, delMas y Garfield (2004) sugieren que la complejidad del tema se debe a que requiere la integración y combinación de muchas ideas de estadística y probabilidad, tales como aleatoriedad, distribución, muestra, población, variabilidad y muestreo. Lipson (2002), sostiene

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 197-205). Granada, 2015.

que la dificultad en su compresión está asociada a la idea de muestra, al proceso de muestreo, así como a la diversidad de representaciones matemáticas y simbólicas que el concepto posee. Saldanha y Thompson (2002) por su parte consideran problemático que los estudiantes tienden a enfocarse en muestras individuales y resúmenes estadísticos de ellas, en vez de enfocarse en cómo se distribuyen las colecciones de estadísticos muestrales. Desde nuestra perspectiva, el enfoque formal que prevalece en la enseñanza de la inferencia estadística, además de las dificultades que entraña para los estudiantes con pocos antecedentes matemáticos, no hace visible las relaciones que existen en los conceptos y las relaciones que intervienen, al enfocarse más en el resultado que en el proceso, y limitarse al uso de fórmulas en la que se sustituyen datos y utilizar tablas de probabilidad para obtener resultados, dando con ello una imagen estática y determinista de la inferencia, cuando es la variabilidad parte central en su estudio. Diversas investigaciones sugieren una enseñanza que clarifique la forma en que se relacionan e intervienen todos estos conceptos como paso previo al estudio de los métodos formales de la inferencia, con lo que se pretende que los estudiantes, además de comprender los métodos y sus resultados, desarrollen un razonamiento inferencial adecuado para la vida cotidiana y la profesión.

Algunos autores (Liu y Thompson, 2007; Konold y Kazak, 2008) han hecho un llamado para desarrollar una concepción estocástica de la probabilidad y la inferencia estadística desde edades tempranas, esto es, concebir a los eventos y al muestreo como procesos estocásticos o aleatorios para que los estudiantes vayan desarrollando ideas intuitivas correctas sobre probabilidad, poblaciones, muestras, variabilidad muestral, distribuciones muestrales y efecto del tamaño de muestra. Este acercamiento a los conceptos de inferencia desde una perspectiva informal requiere del uso de herramientas tecnológicas con amplio potencial de representaciones visuales dinámicas para generar imágenes correctas de estos conceptos en los estudiantes.

En el presente trabajo nos hemos propuesto analizar el razonamiento e imágenes que estudiantes universitarios de ciencias sociales construyen sobre conceptos que forman parte de las distribuciones muestrales, los cuales son parte esencial en el desarrollo de una concepción estocástica de la inferencia estadística. Utilizamos un ambiente computacional como el que proporciona el software Geogebra (Hohenwarter, 2001), software libre que en los años recientes ha cobrado especial importancia en la enseñanza de las matemáticas por su potencial cognitivo basado en el uso de representaciones dinámicas múltiples de los conceptos matemáticos.

2. Marco teórico

2.1. Concepción estocástica del muestreo

Conceptualizar el muestreo de poblaciones, la variabilidad muestral, los efectos del tamaño de muestra y la toma de decisiones bajo incertidumbre, involucra concebir situaciones generadoras de datos como procesos estocásticos o procesos aleatorios (Pfannkuch et. al, 2012). En el caso particular de la probabilidad, Liu y Thompson (2007, p. 122) caracterizan un concepción estocástica de la siguiente manera: “una persona con una concepción estocástica o aleatoria de un evento concibe un resultado observado como una expresión de un proceso subyacente repetible, el cual después de una gran cantidad de repeticiones producirá una distribución estable de resultados”. Pfannkuch et al. (2012) extienden dicha concepción al muestreo y la inferencia estadística. Una concepción estocástica del muestreo significa:

1. Concebir el muestreo como un proceso aleatorio. Esto es, seleccionar una muestra de la población, registrar el dato de cada elemento de la muestra y calcular el estadístico en cuestión para estimar el correspondiente parámetro de la población.
2. Imaginar muestras de un mismo tamaño tomadas repetidamente y registrar el valor del estadístico en cada una de ellas.
3. Comprender que este proceso producirá una colección de resultados que serán en su mayoría diferentes del parámetro poblacional que deseamos estimar (la distribución muestral).
4. Comprender que debido al proceso de selección aleatoria hay variabilidad en los resultados, pero en una gran cantidad de repeticiones la distribución de los resultados llegará a ser estable y centrada en el verdadero valor del parámetro.

2.2. La computadora como herramienta cognitiva

En la literatura de educación estadística (Efron, 2000; Mills, 2002) se sugiere con frecuencia la utilización de simulación computacional para la enseñanza de las distribuciones muestrales y la inferencia estadística como medio para desarrollar una comprensión adecuada del amplio recurso conceptual que subyace a los métodos de inferencia. La interactividad y la multiplicidad de representaciones visuales dinámicas de las que disponen las herramientas de software que existen en la actualidad, así como el poder de simulación para extraer una gran cantidad de muestras de una población casi de forma simultánea, pueden ayudar a que los estudiantes accedan a las grandes ideas de la inferencia de una forma que hasta hace poco tiempo no era accesible a través de un ambiente de lápiz y papel.

Pea (1987) se refiere a este potencial de la tecnología computacional como “metáfora reorganizadora”, que cuando es utilizada adecuadamente, tiene la capacidad para provocar cambios estructurales en el sistema cognitivo de los estudiantes a través de una reorganización y transformación de las actividades que ellos realizan con las representaciones y sus transformaciones. Pea define a una herramienta cognitiva como cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, en el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas. Particularmente, en el caso de las computadoras, constituyen una extraordinaria y potente herramienta cognitiva para aprender a pensar matemáticamente; con ellas se pueden operaron no solo números, sino también símbolos, y permiten almacenar y manipular símbolos dinámicamente y permiten interacciones con los usuarios en tiempo real. En este sentido, el aspecto representacional y de cálculo de la tecnología, adquiere especial importancia en el desarrollo de imágenes visuales de los conceptos y sus conexiones, que les puede ayudar a los estudiantes a desarrollar imágenes mentales correctas y comprender de forma adecuada el proceso subyacente a una inferencia.

3. Metodología

La investigación se llevó a cabo con 22 estudiantes que tomaban un curso de probabilidad en la carrera de Estudios Internacionales y Políticas Públicas, el cual fue muy posterior al curso de estadística, algo inusual en los planes de estudio. Las actividades de enseñanza se diseñaron con el propósito de desarrollar en los estudiantes una concepción estocástica de las distribuciones muestrales. Se elaboraron dos actividades para la distribución muestral de la media y una actividad para la distribución muestral de la proporción; sin embargo, en este artículo se reportan solamente los resultados obtenidos en las actividades de la distribución muestral de la media. Antes de utilizar el ambiente computacional, se trabajó una actividad en forma experimental para ayudar a los estudiantes a fijar ideas sobre el proceso de selección de muestras de una población y los conceptos que se involucran, y así facilitar el proceso de simulación y los cálculos de estadísticos que posteriormente se realizaron con el software Geogebra. Para el caso especifico de distribuciones muestrales, el software dispone de una hoja de cálculo con diversos comandos y una ventana gráfica que permiten simular y visualizar el proceso de selección de muestras de una población y el comportamiento de una distribución muestral en forma numérica y gráfica.

La estructura de cada actividad consistía en que dada una población de datos, se calcula la media y la desviación estándar; enseguida se obtiene una muestra de la población y se calcula su media muestral, entonces el proceso se repite muchas veces para generar una colección numérica y gráfica con los las medias calculadas (distribución muestral empírica) a la que se calcula su media y su error estándar. Enseguida se aumenta el tamaño de la muestra seleccionada y se realiza el mismo proceso de cálculo y graficación. Adicionalmente, se calcularon los errores muestrales para los tamaños de muestra. Al final de cada actividad se proporcionó una hoja de trabajo donde los estudiantes respondieron varias preguntas que buscaban explorar su comprensión. Además se utilizaron un cuestionario de evaluación y entrevistas a con tres estudiantes.

4. Resultados y Discusión

a) Simulación física del muestreo

Se formaron equipos de 3 y 4 estudiantes y se pidió a cada uno que escribiera en un pequeño papel la cantidad de contactos que tiene en su red social favorita y lo colocara en una urna. En la hoja de trabajo se les pidió que describieran la población mediante su media aritmética y desviación estándar. Enseguida debían seleccionar una muestra de tamaño 5, calcular su media aritmética y registrarla en una tabla. El procedimiento anterior lo repetían 20 veces y al final graficaron las medias muestrales en un diagrama de puntos y calcularon la media de la distribución y su desviación estándar. El mismo proceso fue realizado para muestras de tamaño 10. No obstante que se trataba de la primera parte de la actividad, algunos estudiantes mostraron sentido de la variabilidad en las muestras y de algunas propiedades de las distribuciones muestrales. Por ejemplo un equipo escribió lo siguiente: *“cuando el tamaño de muestra es más grande, la diferencia de la media con respecto a la media de la población disminuye. De la misma manera, la desviación estándar que expresa la dispersión de los datos disminuye cuando la muestra es mayor”*. Otro equipo señaló: *“aunque las muestras sean aleatorias, el resultado no varía mucho, entre más grande es el tamaño de muestra la desviación estándar es menor y el resultado es más exacto”*

b) Simulación computacional del muestreo

Posterior a la simulación física donde se extrajeron muestras de la población representada por el número de contactos en redes sociales de los estudiantes, se procedió a realizar la simulación con el software Geogebra. Después de calcular medidas descriptivas de la población (media y desviación estándar) se extrajeron muestras de tamaño 5 y se calculó la media muestral a cada una hasta completar 500 muestras. Una vez construida la distribución muestral empírica se procedió a calcular su media y desviación estándar. El mismo proceso se repitió para muestras de tamaño 10, 20 y 30. Adicionalmente se calculó el error de cada muestra para los tamaño 5 y 30 (ver Figura 1). La actividad 2 consistió de una población con datos de los estímulos económicos (pesos por quincena) que reciben 300 profesores universitarios (ver Figura 2) y se procedió en el mismo sentido que en la actividad 1. Una vez concluida cada actividad, los estudiantes completaron una hoja de trabajo donde respondieron diversas preguntas con lo que se pretendía explorar conceptos como:

1. Relación entre tamaño de muestra y variabilidad de la distribución muestral.
2. Relación entre el tamaño de muestra y la forma de las distribuciones muestrales.
3. Efecto del tamaño de muestra en el centro de las distribuciones muestrales.
4. Cálculo del error muestral y el efecto del tamaño de muestra.
5. Identificación de un intervalo intuitivo que comprende un porcentaje de medias muestrales.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Número de contactos			Medias Muestrales n=5	Medias Muestrales n=10	Medias Muestrales n=20	Medias Muestrales n=30	Error Muestra=5	Error Muestra=30
400	Media Poblacion	460.18	397	456.1	339.85	393.9	63.18	66.28
500	Desviacion Poblacion	411.33	643.2	670.9	467.5	499.07	183.02	38.88
985			894	258.2	620.7	497.37	433.82	37.18
129	Media Muestra n=5	456.66	371.6	529.4	466.55	548.13	88.58	87.95
1624	Desviacion Estandar n=5	186.23	505.8	362	554.15	536.3	45.62	76.12
29			671.6	469.6	407.5	520.57	211.42	60.38
500	Media Muestra n=10	448.35	639.8	519.4	572.3	530.83	179.62	70.65
82	Desviacion Estandar n=10	124.26	725.2	499.5	675.55	386.03	265.02	74.15
299			497.4	354.7	492.15	525.8	37.22	65.62
308	Media Muestra n=20	451.31	266.6	386.3	611	366.67	193.58	93.52
220	Desviacion Estandar n=20	95.51	493.2	461.4	358.95	538.87	33.02	78.68
50			381.6	447.2	707.45	525.9	78.58	65.72
116	Media Muestra n=30	464.38	283.2	638.5	331.85	612.47	176.98	152.28
76	Desviacion Estandar n=30	72.36	508.4	360.9	520.95	445.77	48.22	14.42
800			233.8	351.9	736.25	374.83	226.38	85.35

Figura 1: Hoja de cálculo de Geogebra con simulación de muestras (Actividad 1)

D	E	F	G	H	I	J	K	L
Estímulo (pesos quincen...			Medias muestrales n= 10	Medias muestrales n=30	Medias muestrales n=50	Errores muestrales n=10	Errores muestrales n=30	Errores muestrales n=50
3620.94	Media población	3268.45	3338.4	3241.68	3306.35	69.95	26.77	37.9
2569.47	Desviación estándar poblacional	956.76	3294.52	3342.08	3097.45	26.07	73.63	171
2 Número D3			3276.42	2777.5	3394.07	7.97	490.96	125.62
2550.65	Media muestral n=10	3270.32	2940.43	3201.68	3101.56	328.02	66.78	166.89
2704.2	Desviación estándar muestral n=10	294.34	3665.52	3271.44	3309.69	397.07	2.99	41.24
2274.57			2951	3517.45	3114.45	317.45	249	154
2327.3	Media muestral n=30	3274.83	3030.55	2971.83	3032.62	237.9	296.62	235.83
2274.57	Desviación estándar muestral n=30	172.49	3357.77	3326.61	3461.92	89.31	58.16	193.47
1940.51			3006.35	3143.1	3160.75	262.1	125.35	107.7
2274.57	Media muestral n=50	3268.11	3159.47	3028.01	3222.26	108.99	240.44	46.2
2642.93	Desviación estándar muestral n=50	140.68	3436.89	3122.49	3419.41	168.44	145.97	150.95
2550.65			3202.19	3569.58	3239.13	66.27	301.13	29.33
2857.71			3465.33	3006.39	3134.36	196.87	262.07	134.1

Figura 2: Hoja de cálculo de Geogebra con simulación de muestras (Actividad 2)

Al final se requería que los estudiantes escribieran sus conclusiones sobre el comportamiento de las distribuciones muestrales y los conceptos involucrados. A continuación se muestran algunas respuestas representativas:

"Las muestras nos ayudan a llegar a resultados acertados aunque no exactos. En este caso los datos tienden a agruparse cuando la muestra aumenta, en el caso del diagrama de caja, al igual cuando la muestra aumenta la mediana y tiende a ser más acertada, por último en el caso de el diagrama de caja de los errores mientras la muestra sea pequeña el error tiende a ser mayor e inversamente" (Kenia).

"En este ejercicio pudimos observar que la muestra, aunque no arroja los datos exactos de la población, nos ofrece datos con márgenes de error que son muy bajos, y el error disminuye a medida que la muestra se amplia. Con el ejercicio del error absoluto comprobamos de una manera clara esa hipótesis" (Anahí).

"Al aumentar la muestra la forma de las gráficas es más uniforme y más confiable ya que está más acomodada al centro; por otro lado la media es más cercana a la media poblacional

cada vez que la muestra aumenta; y por último la desviación estándar es cada vez menos cuando el número de la muestra aumenta reduciéndose de esta manera la dispersión" (Paúl).

"En los ejercicios trabajados pudimos observar que las muestras nos dan datos muy cercanos a los datos reales de la población con márgenes de error muy pequeños. El comportamiento es que a medida que el tamaño de las muestras aumenta los datos son más y más acertados" (Frida).

En el contexto de la actividad 2 además de explorar las relaciones anteriores, se solicitó a los estudiantes que proporcionaran un intervalo de variabilidad que les pareciera razonable en el contexto de los datos (ver Figura 3). La instrucción era la siguiente: analiza la distribución muestral para n=30 y determina de manera aproximada (viendo el histograma) un intervalo central que contenga el 95% de las muestras. Los resultados fueron los siguientes:

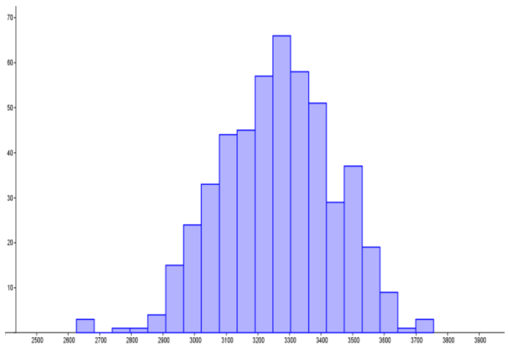


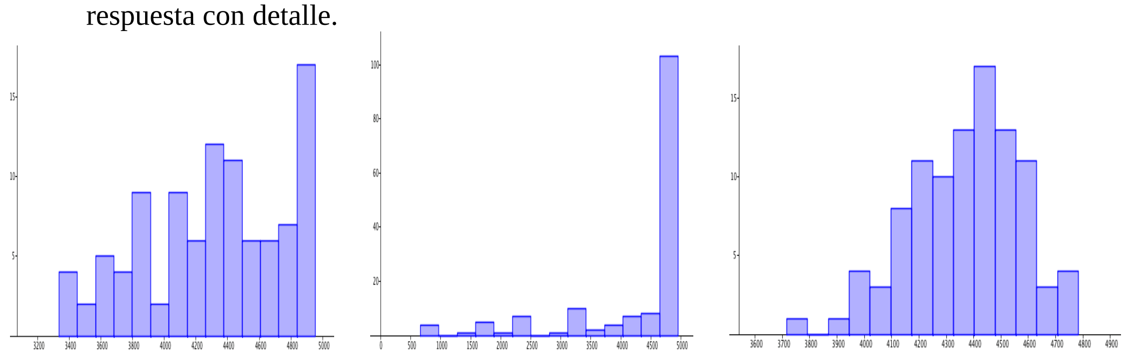
Figura 3: Distribución muestral para n=30 (500 simulaciones)

Tabla 1: Intervalos construidos por los estudiantes

Intervalo	Frecuencia
2900-3600	5
2900-3700	3
2800-3800	4
2700-3600	2
2700-3800	4
3000-3600	3
2700-3600	1
	22

Una semana después de concluir las actividades de simulación con Geogebra, se aplicó un cuestionario a los estudiantes para evaluar su nivel de comprensión sobre los conceptos involucrados en las distribuciones muestrales. El cuestionario contenía dos ítems que se muestran a continuación:

1. Las siguientes gráficas corresponden a una población de datos y a dos distribuciones muestrales cuyas muestras (n=5 y n=15) fueron seleccionadas de la población. Identifica la gráfica que corresponde a la población y a cada distribución muestral. Justifica tu respuesta con detalle.



En el análisis de las hojas de trabajo que se respondieron directamente de la simulación y donde se mostraba en forma numérica el comportamiento de la variabilidad muestral y las medidas descriptivas de las distribuciones muestrales, observamos que los estudiantes mostraron una buena comprensión del efecto del tamaño de muestra. Sin embargo, en este ítem muchos estudiantes tuvieron dificultades para realizar una asignación correcta ante la falta de medidas descriptivas de la población y de las distribuciones muestrales, ya que dependían solo de la forma de la gráfica y el rango valores de las distribuciones, lo cual era suficiente para contestar correctamente. La tercera gráfica fue identificada correctamente por 17 de los 22 estudiantes. Entre sus argumentos los estudiantes hicieron referencia principalmente a la forma acampanada, como una propiedad que adquieren las distribuciones muestrales conforme se incrementa el tamaño de muestra, otros estudiantes además hicieron referencia a que era la distribución más angosta de las tres. Las otras dos gráficas fueron identificadas correctamente solo por 9 de los 22 estudiantes. Entre las respuestas más frecuentes que dieron estos estudiantes que consideraron la primera gráfica como la población es que tenía más variabilidad. En una entrevista con dos estudiantes se observó que su idea de variabilidad era incorrecta, pues la conciben como la irregularidad de una distribución, en lugar de verla como la distancia de los datos al centro de la distribución.

2. Un conjunto de 120 empresas que operan en México (mexicanas y extranjeras) reportan la cantidad de empleos que generan. Se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 10 y se calcula la media de empleos. El procedimiento se repite 500 veces y los resultados se muestran en la Figura 4. Explica qué representan cada uno de los datos graficados en el histograma.

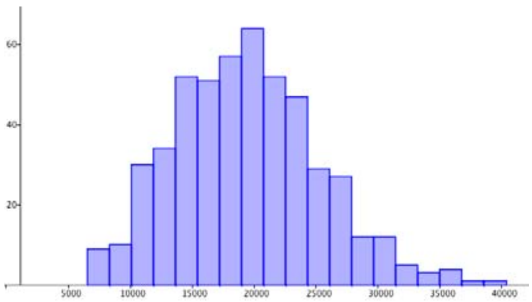


Figura 4: Distribución muestral de la media para n=10 (500 simulaciones)

En este ítem, solo seis estudiantes identificaron correctamente que los datos representan medias o promedios muestrales, el resto señaló que se trataba de la cantidad de empleos generados por las empresas, lo cual es cierto pero en la población de la que se extrajeron las muestras.

Para conocer a mayor profundidad los razonamientos mostrados por los estudiantes, realizamos una entrevista con tres de ellos tomando como base la actividad de simulación que realizaron en la actividad 2. A continuación mostramos algunos fragmentos de razonamientos correctos desarrollados por Paúl.

I: De la población se extrae una muestra de tamaño 5, ¿Qué representa para ti el valor obtenido?
P: Representa el promedio del estímulo de 5 profesores que resultados seleccionados en la muestra.
I: Observa la diferencia entre la media de la muestra y la media de la población, ¿Por qué no son iguales?
P: Porque las medias muestrales no dan el mismo resultado, varían de una muestra a otra.
I: ¿Qué sucede cuando incrementas el tamaño de la muestra?
P: Se acerca más a la media de la población, se parece más a la media poblacional
I: ¿Qué pasa con los errores?

P: Pasa lo mismo, cuando se incrementa el tamaño de muestra los errores disminuyen.
I: ¿Consideras razonable que en una muestra de empresas aparezca una media de 4000 empleos?
P: Es razonable pero poco probable.
I: ¿y de 5000?
P: No creo, porque se aleja mucho de la media poblacional. Revisando no se encuentra ninguna, apenas que seleccione más muestras.
I: ¿Puedes proporcionarme un intervalo de variación entre los cuales esperas que se encuentre la media poblacional al extraer muestras en forma repetida?
P: Yo creo que entre 2000 a 4000.
I: Con base en que haces la propuesta.
P: Con base en que la media es de 3405 y la desviación de 1034.

5. Conclusiones

El ambiente computacional que proporciona el software Geogebra para el análisis de una población, la extracción de muestras y construcción de las distribuciones muestrales en forma numérica y gráfica, constituyeron una herramienta cognitiva para que los estudiantes lograran desarrollar diversos elementos de una concepción estocástica, tales como identificar la variabilidad muestral y delimitarla mediante un intervalo razonable, identificar que el tamaño de muestra influye en la variabilidad de las medias muestrales, el error muestral y la forma de las distribuciones muestrales, y sobre todo concebir al muestreo como un proceso aleatorio y repetible de una población, que aunque produce resultados que varían, estos son en la mayoría de los casos cercanos a la media poblacional. Los estudiantes dispusieron del poder de cálculo y representacional del software para tomar conciencia de ello. Sin embargo, algunos elementos de una concepción estocástica del muestreo no fueron comprendidos por todos los estudiantes, como fue el caso de lo que representan los datos en los ámbitos poblacional y muestral. En ello influyeron ideas incorrectas de una población y variabilidad desde un punto vista gráfico. Finalmente es importante resaltar que el acercamiento empírico al estudio de las distribuciones e inferencia estadística, presenta algunas ventajas sobre el enfoque formal deductivo basado en la teoría matemática de las probabilidades, pero no está exento de dificultades. Se requiere mucha investigación sobre esta perspectiva, ya que cuando los estudiantes llegan al nivel universitario poseen muchas ideas equivocadas e imágenes incorrectas de muchos conceptos de probabilidad y estadística que subyacen al proceso de muestreo.

Referencias

Chance, B., delMas, R. & Garfield, J. (2004). Reasoning about Sampling Distributions. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking.* 295-323. Kluwer Academic Publishers.

Efron, B. (2000). The bootstrap and modern statistics. *Journal of the American Statistics Association*, 95(452), 1293–1296.

Hohenwarter, M. (2001*). Geogebra: Dynamics Mathematics for Everyone*. www.geogebra.org

Konold, C., & Kazak, S. (2008). Reconnecting data and chance. *Technology Innovations in Statistics Education*, 2(1). http:// repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol2/iss1/art1/.

Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. En B. Phillips (Editor). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town South Africa.

Liu, Y., & Thompson, P. (2007). Teachers' understandings of probability. *Cognition and Instruction*, 25(2), 113–160.

Meletiou-Mavrotheris, M. (2004). Technological tools in the introductory statistics classroom: Effects on student understanding of Inferential Statistics. *Educational Studies in Mathematics.* 8, 265-297. Kluwer Academic Publishers. Netherlands

Mills, J. D. (2002). Using Computer Simulation Methods to Teach Statistics: A Review of the Literature. *Journal of Statistics Education* 10(1). [en línea] Recuperable en http://www.amstat.org/publications/jse/v10n1/mills.html.

Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers

Pfannkuch, M., Wild, Ch. & Parsonage, R. (2012). A conceptual pathway to confidence intervals. *ZDM Mathematics Education*, 44 (899-911).

Saldanha, L. & Thompson, P. (2002). Student´s Scheme-based Conceptions of Sampling and its Relationship to Statistical Inference. En Meuborn D., Sztajn P., White D., Wiegel H & Nooney K. (Eds*.). Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psycholoy of Mathematics Education*, 1305-1316. Athens, Georgia

Wild, Ch., Pfannkuch, M., Regan, M. & Horton, N. J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society Series A.* 171(2), 247-295.

Dificultades en el razonamiento inferencial intuitivo

Víctor Nozair García Ríos[1] *y Ernesto Sánchez*[2]

[1]nozairg@hotmail.com, CINVESTAV-IPN
[2]esanchez0155@gmail.com, CINVESTAV-IPN

Resumen

El presente trabajo es un estudio exploratorio sobre el razonamiento inferencial intuitivo, llevado a cabo con estudiantes de bachillerato (15-17 años). Se les aplicó dos problemas que se refiere formalmente como contraste de hipótesis. Las respuestas se organizaron y analizaron con base en un marco conceptual formado por tres categorías. Como resultado, se observó que el concepto de variación está presente en algunos estudiantes pero no es considerado para hacer inferencias, provocando dificultades con conceptos fundamentales como el muestreo, la incertidumbre y el nivel de significación. Una herramienta potencial para desarrollar la percepción de la variabilidad y sus implicaciones en la inferencia estadística es la simulación computarizada y esta puede considerarse como un elemento informal para hacer una inferencia.

Palabras clave: inferencia informal, contraste de hipótesis, razonamiento informal.

1. Introducción

Recientemente ha crecido un gran interés por estudiar la Inferencia Estadística Informal (IEI) y el Razonamiento Inferencial Informal (RII), con los objetivos de: 1) descubrir y describir formas en que sea posible que los estudiantes desarrollen ideas centrales de la inferencia estadística sin utilizar el aparato matemático que las fundamenta, y 2) crear un repertorio de problemas y actividades que jueguen un papel de antecedente o sustrato en el aprendizaje de los estudiantes sobre el cual puedan construir los conocimientos formales de la inferencia estadística.

Concebimos a la presente investigación como una exploración inicial cuyos resultados sirvan de base para elaborar una estrategia de enseñanza de temas enmarcados en la IEI y el RII. Se parte de la hipótesis de que uno de los principios del enfoque constructivista aplicado a la enseñanza, es la recomendación de que el diseño de cualquier aprendizaje nuevo debe utilizar y articularse con los conocimientos que ya posee el aprendiz. En consecuencia, si se pretende desarrollar el razonamiento inferencial de los estudiantes, conviene tener instrumentos para saber cuáles son los conocimientos y razonamientos con los que cuentan y que naturalmente ponen en juego en tareas de inferencia y las falsas concepciones que los limitan u obstruyen.

El presente estudio tiene el propósito de ampliar, reforzar y profundizar estudios en esta línea; a la exploración de los conocimientos y razonamientos que los estudiantes ponen en juego frente a tareas de inferencia, sin aún haber estudiado el tema. Además se ha considerado que el razonamiento empleado como intuitivo en lugar de informal debido a ciertas características que se explican más adelante. Las preguntas de investigación son: ¿Qué elementos intervienen en el razonamiento de los estudiantes de bachillerato al hacer inferencias estadísticas sin los métodos y técnicas formales? ¿Cuáles son las dificultades y errores que se presentan para hacer inferencias estadísticas informales de estudiantes de bachillerato?

2. Antecedentes

Varios trabajos publicados en los últimos años, aluden a los conceptos de IEI y RII; sin embargo, todavía no hay consenso acerca de lo que significan estos dos conceptos exactamente. En un intento de combinar las distintas perspectivas, Zieffler, Garfield, delMas, y Reading (2008) definen RII como “la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos informales de estadística para crear argumentos basados en muestras observadas que sustenten las inferencias hechas sobre la población desconocida” (p.44). Estos autores, también proponen un marco conceptual para caracterizar el RII y apoyar el desarrollo de tareas que permitan examinar el RII natural de los estudiantes, así como el desarrollo de tal razonamiento.

Las investigaciones sobre RII que contiene estudios sobre la naturaleza del RII se centran en caracterizar el RII y en determinar los tipos de razonamiento que emergen al hacer inferencias cuando resuelven problemas con información estadística dada. Existen relativamente pocos trabajos sobre la naturaleza del RII en estudiantes de bachillerato (15-17 años). Hay dos de ellos que conviene considerar. En el primero, Rossman (2008) ofrece una caracterización de la inferencia estadística informal y hace una distinción entre lo informal y lo intuitivo, aunque no lo define, lo ejemplifica a través de establecer algunos rasgos esenciales de las situaciones y problemas de inferencia estadística y mostrando cómo, para resolverlos, se pueden utilizar métodos informales. En el segundo, Zeiffler et al. (2008) proponen la definición de RII citada arriba y exponen tres tipos de actividades que deben ser generadas por las tareas para desarrollarlo.

En Garcia-Rios (2013) se encontró que los estudiantes no pueden medir la significatividad del estadístico de la muestra adecuadamente, debido a dos posibles causas: a) Razonamiento determinista al especificar cuándo rechazar o no la hipótesis, en el sentido de que el estadístico debe coincidir exactamente con el modelo de la población personal. b) Comparan el estadístico con un modelo probabilístico inapropiado de la población, creado por el estudiante con base en sus conocimientos. Además se utilizan muchos prejuicios y creencias a la hora de hacer las inferencias (a veces conducen a inferencias incorrectas). Y por último hay una ausencia de un lenguaje probabilístico debido a que se tiene una concepción determinista de la estadística, en el sentido de que sus inferencias no muestran algún grado de incertidumbre.

García y Sánchez (2014) establecen que la concepción de Fisher de las pruebas de significación es muy natural para los estudiantes, pues establecen una hipótesis nula (modelo personal de la población) para comparar la muestra y medir intuitivamente su significatividad. Concluyeron que es importante que los estudiantes trabajen con los datos y pasen a segundo plano sus conocimientos informales personales pero sin descartarlas por completo. Además, es importante contar con un método informal para determinar cuándo rechazar o aceptar la hipótesis, para pasar de un razonamiento intuitivo a uno informal.

3. Marco conceptual

En este trabajo, se entiende por marco conceptual a una red de conceptos o categorías relacionados entre sí que en conjunto proporcionan una comprensión global de un fenómeno o fenómenos y que es posible construir un marco conceptual emergente de los datos del estudio mediante la metodología “teoría fundamentada” (Jabareen, 2009).

3.1 Teoría fundamentada

La metodología teoría fundamentada (Glaser & Strauss, 1967; Strauss & Corbin, 1998; Birks & Mills, 2011) establece que es posible elaborar categorías y teoría emergente y fundamentada con base en los datos que se recopilan y analizan sistemáticamente y exhaustivamente a través de una variedad de estrategias (codificación y categorización, muestreo teórico, análisis comparativo constante, sensibilidad teórica, codificación intermedia, categoría central, codificación avanzada e integración teórica). Se identifican cuatro características fundamentales con esta metodología: 1) La recolección de datos y el análisis se llevan a cabo de manera concurrente. 2) Los datos determinan los procesos y productos de la investigación y no los marcos teóricos ya establecidos. 3) Los procesos analíticos y la comparación constante de datos incluyendo teorías establecidas suscitan el descubrimiento y el desarrollo teórico. 4) El muestreo se realiza con base en lo que emerge de los datos y sirve para refinar, elaborar y completar las categorías (muestreo teórico). La comparación constante de los datos provoca el movimiento entre la codificación inicial e intermedia, propiciando el desarrollo pleno de categorías y sus propiedades (codificación avanzada) y de una categoría central, la cual es analíticamente potente y por lo tanto tiene la capacidad de explicar los fenómenos bajo estudio.

3.2 Categorías emergentes

Por medio de esta metodología se identificaron las categorías de análisis en el presente estudio y una explicación del RII de los estudiantes. Las categorías emergidas son: 1) Muestreo. Esta idea es muy importante, porque todo nuestro conocimiento y juicios sobre el mundo o las personas están basado en el muestreo, ya que, usualmente, sólo podemos estudiar u observar una parte de la realidad en la que estamos interesados. La idea de muestra tiene en sí dos características contradictorias: representatividad y variabilidad. La representatividad nos indica que la muestra se parece, en cierto modo, a la población, pero la variabilidad indica que una muestra puede ser diferente de otra, por lo que al enjuiciar, pensar e inferir en base a una muestra la gente debería ser cauto y crítico. El alumno ha de adquirir la capacidad de entender la naturaleza estadística de sus conclusiones, en cada caso particular, y las consecuencias de una decisión equivocada. 2) Valor crítico. Debido a la variabilidad es necesario considerar a ciertas muestras como resultado de ella, pero ¿qué muestra se considerará como algo que sale de ella?, el valor del estadístico de dicha muestra a partir del cual lo decidimos será la pauta para tomar la decisión, formalmente es el nivel de significación y es tomado en términos de probabilidades suponiendo cierta una hipótesis. Es un valor subjetivo pero apoyado en la probabilidad de ocurrencia de la muestra. 3) Incertidumbre. En la inferencia estadística se hacen afirmaciones sobre una población con base en la información de una muestra que no tienen certeza absoluta. Debido a que las conclusiones de la inferencia informal también se refieren a una población más allá de los datos disponibles, no se puede hacer en términos absolutos. Aun cuando se cuente con una muestra adecuada y un valor crítico adecuado es posible hacer una inferencia errónea debido a la variación natural en las muestras, toda inferencia lleva consigo incertidumbre y es necesario medirla y reportarla.

3.3 Razonamiento inferencial intuitivo

Ya se ha definido el RII, sin embargo, en el presente trabajo se hace una distinción entre el informal y el intuitivo. El concepto de intuición admite muchas interpretaciones ya que el significado que se le atribuye generalmente depende del campo del conocimiento en el que sea tratado; incluso en algunos casos los significados atribuidos a la intuición en diferentes campos resultan no ser consistentes. En educación matemática, Fischbein (1987) hace una revisión literaria de las diferentes concepciones que tiene el término en diferentes ámbitos concluyendo que la intuición puede ser caracterizada por la obviedad, la extrapolaridad, la coercitividad y la globalidad. En este trabajo tomamos estas características y las adoptamos en la forma que se expone en seguida: La intuición que interesa destacar aquí es la que se pone en juego para determinar la significatividad estadística de una muestra, es decir, a la hora de establecer un valor crítico y consecuentemente hacer una inferencia.

La obviedad: El valor crítico es determinado de forma inmediata y evidente, sin la necesidad de una argumentación o algún cálculo matemático. La extrapolaridad: El valor crítico va más allá de los hechos observables. La coercitividad: Significa que el valor crítico se le impone al sujeto como verdaderos. La globalidad: Es que el valor crítico e inferencia enunciada que son aceptados como evidentes en un ámbito también son aceptados en otros ámbitos similares.

4. Metodología

El acopio de datos se llevó a cabo mediante un cuestionario escrito administrado a 27 estudiantes del tercer semestre de bachillerato de una escuela pública, con edades de entre 16 y 17 años; en el periodo en que se realizó el estudio ellos no contaban con cursos de probabilidad y estadística.

El cuestionario aplicado consta de dos problemas de inferencia estadística (media y proporción), 13 estudiantes contestaron el problema 1 y 14 estudiantes el problema 2. Los problemas son: 1) “Desde el siglo 12 hasta el 18 las monedas tenían el mismo valor que el valor del oro o la plata. Los fabricantes de monedas tuvieron que ser revisados pues podrían haber usado demasiado o poco oro en las monedas. Si se usaba muy poco oro eran despedidos y pagaban una multa al Rey (pues estaban saqueando a la gente). Si se usaba demasiado oro también eran encarcelados (pues estaban saqueando el oro del Rey). Supón que te han designado revisar a un fabricante, y sus monedas deben tener 10g de oro ¿Cómo puedes revisar las monedas del fabricante? Recuerda que no es posible pesar cada moneda, porque es demasiado trabajo”, y 2) “Supón que te han designado revisar la calidad de la producción de cerillos (si prenden o no prenden): Si la producción diaria de cerrillos es de mala calidad, es necesario reparar. ¿Cómo puedes revisar los cerillos? Recuerda que no es posible probar cada cerillo, porque te quedas sin cerillo que vender”.

Además se les pidió un informe con un ejemplo donde aceptaran su hipótesis y otro en donde no la aceptaran, indicando el grado de seguridad así como las posibles conclusiones erróneas y cómo disminuir dichos errores.

5. Resultados

Las respuestas se clasificaron de la siguiente manera: 1R3 significa la respuesta dada por el estudiante R3 al problema 1. Una primera etapa consiste en la codificación y categorización inicial de los datos, mediante el análisis de características semejantes entres las respuestas. En etapas subsecuentes se empleó la comparación constante de respuesta a respuesta, respuesta a códigos, códigos a códigos, códigos a categorías y categorías a categorías, mediante la reflexión y la sensibilidad teórica. Esto dio pie a nuevas codificaciones y categorías, llegando a una codificación final (avanzada). Dichas categorías se presentan en la tabla 1. La categoría central “variación” es la característica principal detectada en el RII y proporciona una amplia explicación del RII de los estudiantes y sus relaciones con las otras categorías. Las categorías que emergieron fueron: 1) Muestreo, 2) valor crítico, e 3) incertidumbre. Estas categorías corresponden con ideas fundamentales del contraste de hipótesis y de la estadística en general (Garfield & Ben-Zvi, 2008). A continuación se muestran ejemplos de respuestas pertenecientes a cada categoría.

Tabla 1. Categorías en el RII de los estudiantes

Categoría central	Categoría	Códigos	Propiedades y dimensiones
Variación	Muestreo	Muestra	Emplean una muestra como posible representante de la población
		Muestra pequeña	Utiliza muestras de diferentes tamaños como representante de la población
		Población	Pretenden analizar toda la población
	Valor crítico	Determinista	No utiliza variación para establecer un valor crítico.
		Semi-determinista	Utiliza variación en un solo caso, ya sea para rechazar o no la hipótesis. Utiliza valores disjuntos.
		Probabilístico	Utiliza variación en ambos casos, rechazar o no rechazar la hipótesis, además usa valores disjuntos.
	Incertidumbre	Medición	Atribuye posibles errores a factores humanos como la medición o los instrumentos de medición.
		Variación	Atribuye posibles errores a dos factores: Humanos, como la medición o los instrumentos de medición y a la variación natural de las muestras.

Muestreo. Se identificaron tres componentes dentro de esta categoría. En la primera codificada como “muestra”, los estudiantes razonan adecuadamente en utilizar una muestra adecuada de la población para hacer inferencias. Por ejemplo 1R9 responde “La solución sería pesar muchas monedas juntas por ejemplo 100 si cada una pesa 10g en total serian 1000g si su peso es más o menos el fabricante no está haciendo bien las monedas”. Mientras que 2R7 responde “Por cada ciento de cerillos que produces toma uno al azar”.

En la segunda componente codificada como “muestra pequeña”, los estudiantes consideran que una muestra de un solo elemento es suficiente para hacer inferencias sobre la población. Para el problema 1 solo un estudiante consideraba esta muestra pequeña, dicho estudiante 1R6 dice “Elegir una sola moneda y esa pesarla y con esa saber si pesa menos o más de 10g y si pesa menos entonces todas las monedas pesan menos y si pesa más todas las demás pesan más y si pesan 10g entonces todas pesan 10g”, para el problema se pone como ejemplo al estudiante 2R6 quien responde “Probar un cerillo y de acuerdo a la calidad del cerillo que se probó en caso de que haya tenido mala se tendrá que revisar el material del que se hacen los cerillos así como la maquinaria”.

En la última componente codificada como “población”, los estudiantes no mencionan una muestra, hablan sobre revisar todos los elementos, es decir, analizar la población. Por ejemplo, para el problema 1 el estudiante 1R10 explica “Pesar todas las monedas y el peso convertirlo en gramos y dividirlo entre diez, este resultado tiene que coincidir con el número de monedas”. 2R2 menciona “Revisando la humedad del fosforo y la madera de los cerillos”.

Valor crítico. Dentro de esta categoría se clasificaron tres tipos de respuestas. Las primeras se codificaron como “determinista”, en ella, los estudiantes o bien, consideran valores críticos exactos a los esperados para aceptar o rechazar una hipótesis o bien, no especifican ningún valor, sin considerar la variación en la muestra. Por ejemplo 1R7 para aceptar que se usó menos oro explica “siempre que se pesen 100 monedas el resultado siempre tendrá que ser 1kg o 1000g (que es lo mismo)”, las monedas deben tener exactamente la cantidad de oro, omitiendo cualquier variación, y para rechazar responde “al ir pesando todas sus monedas de 100 en 100 cada montón pesaba 1kg por lo cual el fabricante cumplió con los 10g de cada moneda”, de nueva cuenta nula variación, requiere el valor exacto. Como ejemplo del problema 2 se presenta 2R12, para rechazar que la producción de cerillos es buena responde “La producción es de mala calidad ya que no tienen la suficiente resistencia para poder encenderlas ya que tienden a romperse o desmoronarse…” mientras que para aceptar la mala producción dice “La producción es buena ya que estas tienen los requerimientos necesarios para llevar a cabo su buen uso…”, no especifican en ningún caso algún valor crítico para llegar a sus conclusiones.

El segundo tipo de respuestas se codificaron como “semi-determinista”. En esta clasificación las respuestas implícitamente indican variación, ya sea para aceptar la hipótesis o para rechazarla, pero solo en un caso. Es importante resaltar que los valores críticos para aceptar o rechazar los estudiantes los presentan como disjuntos o separados. Por ejemplo, para aceptar que se usa menos oro 1R9 afirma; “Digamos que pesa mil monedas esto debería pesar un total de 10 mil gramos pero pesan 9 mil, al mencionar esto le comento a el rey que el fabricante está usando menos oro de lo que valen las monedas”. Y para rechazar que se usa menos oro responde; “este fabricante pasa la revisión rey ya que el peso de las monedas concuerda con los 10gr de cada una todas las monedas están en orden”, en el primer caso hay presencia de variación, sin embargo, en el segundo caso ya no la hay. Un ejemplo en el problema 2 es la respuesta dada por 2R1 para rechazar una buena producción de cerillos; “los cerillos en mi caso he visto que son de buena calidad el único defecto es la cajita donde están depositados, ya que la lija no viene de muy buena calidad provocando que el cerillo no prenda o se rompa la cabecita de fosforo”, no especifica un valor crítico y no hay variación. Para aceptar una buena producción dice; “la prueba de laboratorio hechas con los cerillos han sido aprobados ya que en promedio de 0 a 100 95 de los cerillos cumplieron su función”, a pesar de haber considerado cerillos malos concluye que es una buena producción, aceptando variación.

En el tercer tipo codificado como “probabilístico” no hubo ningún caso para el problema 1. Para el problema 2 se presentaron 6 casos. Como ejemplo 2R5, para rechazar una buena producción responde; “El porcentaje de cerillos funcionales fue menor de 50%, por lo que tanto es posible que la producción entera presenta características similares…”, y para aceptar una buena producción explica; “El porcentaje de cerillos funcionales ha sido satisfactorio pues solo el 0.1% no sirvió. Se puede considerar que la producción fue de buena calidad, pues el grupo presenta características similares”. En ambos casos se presenta cierto grado de variación.

Incertidumbre. En esta categoría las respuestas se clasificaron en dos tipos. El primer tipo de respuesta se codificó como “medición”. En ella las respuestas indicaban que era posible cometer errores en las inferencias pero la posible causa de esto no tenía que ver con la variación, sino con otros factores como las mediciones tomadas, los cálculos numéricos o el medio ambiente. Por ejemplo 1R3 responde; “Sí, no saber medir con la báscula”.

El segundo tipo de repuestas se codificó como “variación”. En ella las respuestas asumen errores en las inferencias debido a la variación natural de las muestras, por ejemplo, para el problema 1 el estudiante 1R6 dice; "a que solo yo según solo pese una moneda y con esa moneda tome el peso de las demás y puede que esa moneda pese menos y que las demás si pesan 10g". Sin embargo al cuestionarle sobre cómo podría reducir la incertidumbre ya no se observa que tome en cuenta la variación "Confiando en mi misma y tener evidencias de lo que digo y de la decisión que tomo y siempre aserciorarme de lo que hago". Para el problema 2 el estudiante 2R4 es un ejemplo de esta categoría, afirma "Si, ya que puede que solo se estén checando los cerillos de mala calidad y no es posible verificar uno por uno". Al igual que 1R6 al pedir que reduzcan la incertidumbre no toman en cuenta la variación y se enfocan en otros factores "Consultar un mecánico que verifique que la maquina este en buen estado y hacer las pruebas necesarias para estar seguro".

6. Conclusiones

Las tres categorías y el concepto central proporcionan información para responder nuestras preguntas de investigación. ¿Qué elementos intervienen en el razonamiento de los estudiantes de bachillerato al hacer inferencias estadísticas sin los métodos y técnicas formales?

El razonamiento inferencial de los estudiantes es intuitivo y no informal debido a la forma de medir la significatividad estadística de la muestra; determinan valores críticos sin ninguna operación o cálculo, de forma inmediata, global y autoevidente.

Muestreo. La mayoría de los estudiantes utilizan una muestra de la población para obtener conclusiones sobre una población. Sin embargo, algunos estudiantes mencionan que utilizarían la población, incluso que una muestra de tamaño 1 es suficiente pues la población debe tener el mismo proceso y las mismas características. A pesar de usar dicha muestra, aceptan que se puede cometer un error pues podría ser que dicho elemento este mal y no necesariamente toda la población. Valor crítico. Solamente 6 estudiantes manifestaban algún grado de variación al establecer el valor crítico, los restantes esperaban valores exactos (deterministas). Esta categoría es la más difícil para los estudiantes ya que no está presente de manera natural un concepto teórico; la distribución muestral. Incertidumbre. A pesar de que una tercera parte de los estudiantes (10) considera la posibilidad de muestras no representativas, todas las respuestas mencionan que para disminuir la incertidumbre es necesario revisar las mediciones varias veces, es decir, hacer conclusiones erróneas no es causado por la variación natural en las muestras, sino por mediciones hechas erróneamente o algún otro factor distinto a la variación. Al cuestionar sobre la seguridad en sus conclusiones 11 (42%) estudiantes mencionan estar muy seguros, es decir, no hay incertidumbre alguna, pero esto lo relacionan con posibles errores cometido al realizar las mediciones para determinar el estadístico de la muestra. Los restantes 15 (55%) estudiantes no contestaron dicha pregunta.

¿Cuáles son las dificultades y errores que se presentan para hacer inferencias estadísticas informales de estudiantes de bachillerato?

La categoría central que relaciona y explica las tres categorías es el concepto de variación, entendiéndose a ésta como las características que describen el cambio de una variable aleatoria (distribución, medidas de tendencia central, medidas de dispersión). Este concepto es considerado fundamental y difícil de comprender en la estadística (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Las respuestas de los estudiantes permiten identificar que pocos perciben que las muestras tienen una variación natural. La falta de percepción de variación también afecta al establecer un valor crítico para rechazar o aceptar una hipótesis, provocando que el estudiante tienda a considerar valores exactos y eliminando por completo cualquier grado de variación. Incluso cuando se percibe que hay variación, los valores estadísticos son elegidos muy cercanos al valor exacto de la hipótesis y esto se determina de manera intuitiva. La falta de variación en el RII de los estudiantes provoca la consideración de posibles errores en las inferencias debido a errores en las mediciones, en los instrumentos de medición o en los cálculos numéricos. Esto impide concentrase en la presencia de la variación y en cómo disminuirla.

Un posible camino para mejorar la percepción de la variabilidad y sus implicaciones en la inferencia estadística es la simulación computarizada, donde se muestre de manera concreta y natural el concepto empírico de la distribución muestral y su utilidad en el razonamiento inferencial. Además tiene el potencial para pasar del razonamiento intuitivo al informal y desarrollarlo, ya que la simulación ayuda a entender la distribución muestral y el papel que juega en la inferencia estadística y proporciona el cálculo u operación informal necesaria para determinar el valor crítico reafirmando lo concluido en García y Sánchez (2014), además, se sigue observando ausencia de un lenguaje probabilístico y la dificultad para medir la significatividad del estadístico de la muestra (Garcia-Rios, 2013).

Referencias

Birks M. & Mills, J. (2011). Grounded theory: A practical guide. California: Sage

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Noorgate, W., & Onghena, P. (2007). Students misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review, 2,* 98–113.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An Educational Approach.* Reidel Dordrecht: The Netherlands.

Garcia-Rios, N. (2013). Inferencias estadísticas informales en estudiantes mexicanos. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 343-357). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

García, V. N., Sánchez, E. A. (2014). Razonamiento inferencial informal: el caso de la prueba de significación con estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 345-354). Salamanca: SEIEM.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students statistical reasoning*. New York: Springer.

Glaser B. G. & Strauss A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine.

Jabareen, Y. (2009). Building conceptual framework: Philosophy, definitions and procedure. *International Journal of Qualitative Method.* 8(4), 49-62.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. Cambridge: Cambridge University Press.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: one statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7 (2),* 5-19.

Strauss A. L. & Corbin J. M. (1998). Basics of qualitative research: thechniques and procedures for developing grounded theory (2nd ed.). California: Sage

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistical Education Research Journal, 7(2),* 40–58.

El contenido matemático de los problemas de probabilidad en las pruebas de acceso en Andalucía

Magdalena Carretero Rivas[1], M. del Mar López-Martín[2] y José Miguel Contreras García[3]

[1]magdasof72@hotmail.com, Universidad de Granada
[2]mariadelmarlopez@ugr.es, Universidad de Granada
[3]jmcontreras@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

Continuando un estudio anterior, analizamos en este trabajo el contenido de los problemas de probabilidad propuestos en las pruebas de Selectividad del Distrito Andaluz relativos a probabilidad, tanto condicional, total y como problemas bayesianos, en la especialidad de Bachillerato de Ciencias Sociales. Se han analizado las pruebas correspondientes a los años 2003, 2008 y 2013. Los problemas de probabilidad propuestos se han resuelto y mediante un análisis semiótico se ha identificado los objetos matemáticos utilizados. Un estudio estadístico elemental de la frecuencia de cada uno de los objetos en los tres años permite obtener conclusiones sobre la presencia de los mismos y la dificultad de los problemas.

Palabras clave: Probabilidad, pruebas de acceso a la universidad.

.

1. Introducción

En la actualidad, la probabilidad se enseña en todos los niveles educativos, pues capacita al alumnado para enfrentarse con la incertidumbre y tomar decisiones adecuadas en su vida diaria y profesional.

La necesidad de formación en probabilidad ha sido recogida en las orientaciones curriculares españolas: Educación Primaria; Educación Secundaria y Bachillerato (Batanero, Arteaga y Gea, 2011; Batanero, Gea, Arteaga y Contreras, 2014). Los autores revisan diferentes currículos que sugieren las nuevas tendencias a una enseñanza más experimental de la probabilidad, donde los alumnos realicen experimentos y simulaciones para adquirir una experiencia con los fenómenos aleatorios.

Una parte importante de la enseñanza la constituye las pruebas de evaluación. Godino (1996) indica que la comprensión personal de un determinado objeto matemático, como la probabilidad por parte de los alumnos no puede observarse directamente pues la comprensión es un constructo psicológico inobservable. Sin embargo, la comprensión puede evaluarse indirectamente por medio de las respuestas de los estudiantes a los ítems, tareas o pruebas de evaluación. Las prácticas de los alumnos en estas pruebas (por ejemplo, las soluciones finales, estrategias, argumentos, símbolos usados, etc.) permiten indirectamente evaluar su aprendizaje. De ello se deduce la importancia de que las pruebas de evaluación sean válidas, es decir, que haya una correspondencia entre el significado institucional pretendido y evaluado. Esta correspondencia es la que tratamos de evaluar en la investigación.

Entre las pruebas de evaluación cabe destacar el papel importante que juegan las pruebas de acceso a la universidad determinando en algunas ocasiones el éxito del estudiante para poder cursar los estudios universitarios deseados.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 215-223). Granada, 2015.

El objetivo fundamental de este trabajo consiste en analizar el contenido matemático que el alumno ha de utilizar para resolver los problemas de probabilidad incluidos en las pruebas de acceso a la universidad de la comunidad autónoma de Andalucía. Puesto que en este trabajo nos centramos en el nivel de Bachillerato resumiremos, en la sección 2, las directrices curriculares para esta etapa educativa, tanto a nivel estatal, MEC (2007), como de la comunidad autónoma andaluza, centrándonos específicamente en los contenidos de probabilidad. En la sección 3 se presentan el método empleado en el estudio. Por otro lado, en la sección 4 se muestra un análisis detallado de uno de los ejercicios que componen una de las pruebas seleccionadas y en la sección 5 se muestra un resumen estadístico de los resultados obtenidos en los años que se han analizado las pruebas. Por último, en la sección 6 se resumen las conclusiones que han arrojado el estudio realizado.

2. Directrices curriculares de la Probabilidad en Bachillerato

La enseñanza de las Matemáticas en el nivel de Bachillerato comprende los cursos 1º y 2º de la modalidad de Ciencias y Tecnología y la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. En el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, se establece la estructura de Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas (MEC, 2007). Los contenidos relacionados con la materia en estudio aparecen recogidos en el bloque de Estadística y Probabilidad

Centrándonos únicamente en los temas de contenidos probabilísticos se tiene que en el primer curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología se estudian contenidos relacionados con probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori y por otro lado las distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidad. En la modalidad de ciencias sociales la asignatura de Matemáticas Aplicada a las Ciencias Sociales I incluye los temas:

- Asignación de probabilidades de sucesos,
- Distribuciones de probabilidad binomial y normal.

Por otro lado, los temas de probabilidad de la asignatura de Matemáticas Aplicada a las Ciencias Sociales II se centran en:

- Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes,
- Implicaciones prácticas de los teoremas: central del límite, de aproximación de la binomial a la normal y ley de los grandes números. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad.

Tal y como se observa, los contenidos probabilísticos descritos en el primer curso de la modalidad de Ciencias y Tecnología son más amplios que en primero de la especialidad de Ciencias Sociales, ya que además de repasar la probabilidad simple, la probabilidad compuesta y condicional introducen el Teorema de Bayes. Sin embargo, cabe destacar que el estudio de probabilidad es más completo en la modalidad de Ciencias Sociales debido a que el Bloque de Estadística y Probabilidad, dentro de la modalidad de Ciencias y Tecnología, solamente está contenido en la estructura de primero de Bachillerato.

Otro aspecto a resaltar del Real Decreto, son los criterios de evaluación. Por ejemplo, en el caso de la asignatura de Matemáticas I se incluye sugiere como criterio asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal. Tal y como se observa, este criterio es muy general ya que incluye la valoración de todo el contenido sobre probabilidad. Principalmente

> Se pretende medir la capacidad para determinar la probabilidad de un suceso, utilizando diferentes técnicas, analizar una situación y decidir la opción más conveniente. También se pretende comprobar la capacidad para estimar y asociar los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden (p. 45450).

Según las directrices de la normativa andaluza (Consejería de Educación, 2008), al desarrollar los núcleos de contenidos propuestos en el Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2007) remite a los especificados en el citado decreto e indica, que deben desarrollarse teniendo en cuenta cuatro núcleos transversales: La resolución de problemas; Aprender de y con la Historia de las Matemáticas; Introducción a los métodos y fundamentos matemáticos y Modelización matemática. En concreto, indica que los puntos históricos que podrían desarrollarse en relación a la probabilidad son:

> Los inicios del cálculo de probabilidades desde Pacioli a Gauss y su influencia en las distribuciones de probabilidad. Las formulaciones actuales dadas por Borel y Kolmogorov. La progresión de la estadística durante el siglo XX con la aplicación de la probabilidad" (p. 171).

3. Método

Las actuales pruebas de acceso a la universidad están regidas por el Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regula las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas (MP, 2008). A su vez este decreto se basa en la Ley Orgánica de Educación (L.O.E.), que exige, en su artículo 38, la superación de una prueba de madurez que permita valorar los conocimientos y la capacidad de los estudiantes para iniciar sus estudios universitarios.

La prueba de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II consta de dos opciones: opción A y opción B. El alumno, bajo su parecer, elegirá únicamente una de las opciones, sin existir la posibilidad de entremezclar los ejercicios que componen cada opción. Tanto la opción A como la opción B están dividida en cuatro ejercicios. El primer ejercicio pertenece al Bloque de Álgebra y el segundo al Bloque de Análisis. Por otro lado los ejercicios tercero y cuarto corresponden al Bloque de Estadística y Probabilidad, más concretamente, a probabilidad e inferencia estadística. Cada uno de los ejercicios que forman la prueba tienen asignada una puntuación máxima de 2.5 puntos. El contenido de la prueba está en consonancia con la normativa en materia de educación referida a segundo Bachillerato.

En nuestro análisis, lo que se refiere a la probabilidad se restringe únicamente al contenido correspondiente a *Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes*. Como se ha mencionado anteriormente, se dedica un ejercicio específico en cada prueba relacionado con dicho contenido.

Para realizar el estudio estadístico se han analizado los problemas de probabilidad que aparecen recogidos en las pruebas relacionadas con la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Los años seleccionados han sido 2003, 2008 y 2013. En cada uno de esto años se revisaron las 6 pruebas disponibles entre la convocatoria de junio y de septiembre, cada una de las pruebas está formada por dos opciones, y como resultado se obtuvo una muestra formada por 36 problemas.

Tal y como se han obtenido los datos, concluimos que la muestra en estudio es una muestra intencional, algo propio de la metodología cualitativa. Por tanto, con el estudio realizado no se pretende extrapolar los resultados a otras pruebas diferentes a las analizadas. No obstante, pensamos que las conclusiones pueden servir para conjeturar hipótesis provisionales sobre el contenido de probabilidad de las pruebas realizadas otros años o en otras comunidades, que sería necesario analizar para contrastar dichas hipótesis.

4. Ejemplo de análisis

Para cada uno de los ítems que forman parte de la muestra se resolvieron los diferentes apartados, llevando a cabo un análisis semiótico de la solución correcta de los mismos, con el fin de identificar el contenido matemático requerido en la solución y los objetos matemáticos utilizados según los propuestos en el EOS (Godino y Batanero, 1994; 1998: Godino, Batanero y Font, 2007). Como ejemplo, en la Tabla 1 se muestra el análisis realizado al ítem P1A de 2013 cuyo enunciado se incluye a continuación.

Ítem P1A. El 55 % de la población española son mujeres, de las cuales un 23 % usa el coche para ir al trabajo. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, vaya al trabajo en coche es 0.52.

- Elegido un hombre, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice el coche para desplazarse al trabajo?
- Si se elige una persona, al azar, y resulta que no usa el coche para ir al trabajo, calcule la probabilidad de que sea una mujer.

Para resolver este problema, en primer lugar el alumno ha de considerar el experimento *elegir una persona al azar*, en el que tiene que identificar por un lado el sexo de la persona (sucesos *ser mujer*, *M*, y *ser hombre, H*) y por otro lado la forma de transporte que utiliza para llegar al trabajo (sucesos *usar coche, C*, y su complementario, *no usar coche,* C^c).

Considerando que los sucesos que están formados por un único elemento se denominan *sucesos simples* y los que tienen al menos dos sucesos elementales son *sucesos compuestos*, se puede concluir que, en el caso del ítem P1A, los sucesos descritos son simples. Como consecuencia, el alumno ha de identificar estos experimentos simples y el experimento compuesto que resulta de la combinación o intersección de los experimentos simples. Una vez detectados los sucesos del ejercicio el alumno seguidamente debe interpretar, en términos de probabilidad, los datos que en el enunciado del problema aparecen descritos mediante porcentajes.

4.1. Solución al primer apartado del ítem P1A

Con el fin de responder de forma correcta este apartado, el alumno ha de interpretar que el enunciado va relacionado con una probabilidad condicionada, donde se pide la probabilidad del suceso *usar coche* bajo la condición de *ser hombre*, es decir $P(C|H)$. Para resolver esta primera pregunta se calcula la probabilidad condicionada utilizando empleando para ello la fórmula

$$P\,(C|H) = \frac{P(C \cap H)}{P(H)}\,. \qquad (1)$$

De la expresión (1) el alumno debe detectar que el numerador es la probabilidad de un suceso compuesto ya que es el suceso *ser hombre y usar coche*. Teniendo en cuenta que los sucesos *ser mujer* y *ser hombre* son sucesos complementarios se concluye que la probabilidad de ser hombre es 0.45, P(H)=1-P(M)=1-0.55=0.45. La información que se pide en el apartado hay que despejarla a partir de los datos sobre la probabilidad de usar coche, es decir:

$$P(C) = P(C \cap M) + P(C \cap H)$$

$$P(C \cap M)=P(M) \cdot P(M|C) = 0.55 \cdot 0.23 = 0.1265$$

$$P(C \cap H) = P(C) - P(C \cap M)$$

$$P(C \cap H) = 0.52 - 0.1265 = 0.3935.$$

Sin más que sustituir en la expresión (1), se tiene que elegido un hombre al azar, la probabilidad de que utilice coche para desplazarse al trabajo es 0.8744.

$$P\ (C|H) = \frac{0.3935}{0.45} = 0{,}8744$$

Tabla 1. Análisis de la solución correcta al ítem P1A

Resolución del ítem	Análisis
Sea los sucesos *M, H* y *C* "ser mujer", "ser hombre" y "usar coche para ir al trabajo", respectivamente. Entonces, de los datos del problema se tiene: P(M) = 0.55, P(M|C) = 0.23 y P(C) = 0.52.	Interpretación de datos (procedimientos) Sucesos simples, experimento simple y compuesto, probabilidad simple y condicional (conceptos) Aplicación de fórmulas (procedimientos)
Apartado a: Se pregunta por *P(C/H)* cuya expresión es $P\ (C \mid H) = \frac{P(C \cap H)}{P(H)}$. El numerador se calcula despejando la expresión de la probabilidad de usar coche, es decir, $P(C) = P(C \cap M) + P(C \cap H)$; $P(C \cap H) = P(C) - P(C \cap M)$. Como $P(C \cap M) = P(M) \cdot P(M/C) = 0{,}55 \cdot 0{,}23 = 0{,}1265$. Así, $P(C \cap H) = 0{,}52 - 0{,}1265 = 0{,}3935$. El denominador se calcula a partir de $P(H) = 1 - P(M)$= 0,45; Sin más que sustituir en la expresión primera, tenemos $P\ (C \mid H) = \frac{0{,}3935}{0{,}45} = 0{,}874$.	Interpretación de datos (procedimientos) Probabilidad condicional; descomposición, probabilidad de la unión de sucesos; probabilidad del complementario; probabilidad compuesta; teorema de Bayes (conceptos y propiedades) Aplicación de fórmulas (procedimientos)
Apartado b: $P\ (M\|C^c) = \frac{P\ (C^C \cap M)}{P\ (C^C)} = \frac{0.4235}{0.48} = 0.8823$ donde C^C es el suceso contrario de *C*, es decir, "no usar coche". El numerador es $P\ (C^C \cap M) = (1 - 0.23) \cdot 0.55 = 0.4235$. El denominador es $P\ (C^C) = 1 - P(C) = 0.48$.	Interpretación de datos (procedimientos) Probabilidad del complementario, teorema de Bayes (conceptos y propiedades) Aplicación de fórmulas (procedimientos)

4.2. Solución al segundo apartado del ítem P1A

Al igual que en el apartado a) la probabilidad que se plantea es condicionada siendo el suceso *no usar coche* el suceso que condiciona, es decir, $P\,(M|C^c)$. Luego, haciendo uso de la fórmula de la probabilidad condicionada se tiene:

$$P\,(M|C^c) = \frac{P\,(C^C \cap M)}{P\,(C^C)} = \frac{0.4235}{0.48} = 0.8823$$

El numerador es $P\,(C^C \cap M) = P\,(C^C\,|\,M)\cdot P(M) = \left(1-0.23\right)\cdot 0.55 = 0.4235$ y el denominador de dicha expresión es la probabilidad de no usar coche, que se obtiene realizando el complementario del suceso *usar coche*, es decir, $P\,(C^C) = 1 - P(C) = 1 - 0.52 = 0.48$. En consecuencia, se observa que en el problema aparecen conceptos como suceso simple y compuesto; dependencia, probabilidad simple, probabilidad condicionada, probabilidad conjunta, unión de sucesos y sucesos complementarios.

Como procedimientos y propiedades se tiene que aplicar la probabilidad de la unión de sucesos y del complementario y aplicar los teoremas de la probabilidad total y Bayes. Por otro lado ha de diferenciar si los experimentos simples del enunciado son o no independientes. Asimismo, se aplica la descomposición de la probabilidad condicional. Además el alumno ha de hacer un proceso de interpretación del enunciado, transformar los porcentajes en probabilidades y realizar un argumento tipo análisis-síntesis para mostrar la solución. Finalmente ha de usar de forma adecuada el lenguaje simbólico.

5. Resumen de resultados.

Como vemos en el análisis detallado (véase Tabla 1) la resolución del ítem tiene una gran complejidad y combina los diferentes tipos de objetos matemáticos considerados en el marco teórico. El mismo método se aplicó a 36 problemas seleccionados durante los años 2003, 2008 y 2013. Como resumen, en las tabla 2 se muestra uno de los objetos matemáticos implicados en la solución de los problemas en el año 2003.

No diferenciamos los argumentos, porque en todos los problemas siempre hay que realizar un argumento tipo análisis (descomponiendo el enunciado y resolviéndolo por partes) y síntesis (componiendo la solución finalmente). Tampoco diferenciamos el lenguaje que es siempre numérico, verbal y simbólico, al que se añade a veces gráficos elaborados por el alumno.

Consideramos enumeración del espacio muestral si se pide explícitamente; la probabilidad puede ser simple, compuesta o condicionada y referirse a un suceso simple o compuesto en un experimento simple o compuesto. En ocasiones se requiere calcular la probabilidad del complementario, de la unión de sucesos compatibles o descomponer una probabilidad condicional para hallar uno de sus elementos. También es necesario otras veces aplicar el teorema de la probabilidad total o compuesta o las leyes de Morgan

Con el fin de comparar la presencia de los objetos matemáticos en cada una de las pruebas analizadas en los años 2003, 2008 y 2013 se presentan a continuación las Figuras 1 y 2. En la primera figura se han analizado la mitad de los objetos matemáticos y en la segunda el resto de ellos. El hecho de representar todos los objetos en dos figuras es únicamente para facilitar el análisis de dichas variables.

Tabla 2. Conceptos, propiedades y procedimientos en las pruebas del año 2003

Contenidos	P1A	P1B	P2A	P2B	P3A	P3B	P4A	P4B	P5A	P5B	P6A	P6B
Enumeración espacio muestral			x					x				
Suc. simple	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Suc. compuesto	x			x	x		x	x		x		x
Suc. Complem	x					x	x		x		x	x
Leyes Morgan							x		x			
Unión sucesos						x			x			
Probabilidad simple	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Regla Laplace			x		x			x	x	x		x
Exper. Compuesto	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x
Prob. compuesta	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x
Prob. condicionada	x	x		x	x	x	x		x	x	x	x
Descomposición P. Condicional	x	x		x	x	x	x		x	x	x	x
Dependencia	x	x		x	x			x	x		x	x
Independencia			x			x	x	x		x	x	
T. Prob. Total	x			x	x				x	x	x	x
T. Bayes	x	x		x	x		x					x

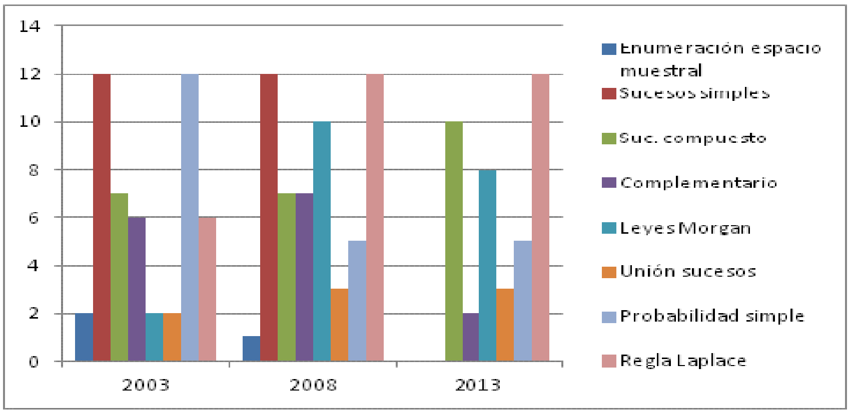


Figura 1. Objetos matemáticos en los problemas

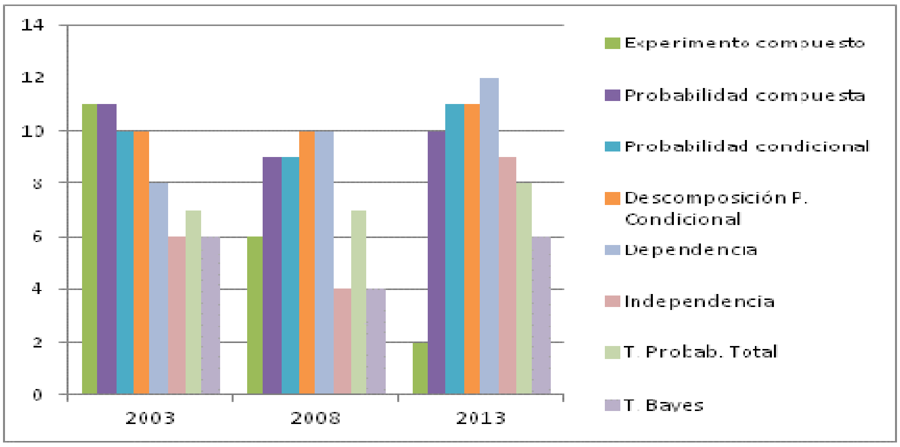


Figura 2. Objetos matemáticos en los problemas

Mientras que en 2003 y 2008 todos los problemas implican calcular una probabilidad de un suceso simple en 2013 no se propone nunca. Las leyes de Morgan se han de utilizar o demostrar en la mayoría de los problemas de 2008. La regla de Laplace se debe aplicar directamente en todos los problemas de 2008 y 2013 pero solo en la mitad de los de 2003. Igualmente hay bastante variabilidad entre años en el resto de objetos matemáticos.

Resalta la presencia de la probabilidad compuesta y condicional, así como de la dependencia e independencia, conceptos respecto a los cuáles existen numerosos sesgos de razonamiento, como describen Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012).

6. Conclusiones

Todas las pruebas de los tres años analizados incluye un problema de probabilidad; más concretamente de cálculo de probabilidades, por lo que a este tema se da gran importancia en las pruebas de acceso. El contenido del currículo, incluye otros muchos temas, como el Teorema Central del límite, aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales. Intervalo de confianza para el parámetro *p* de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida. Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida. Es cierto que un segundo problema recoge el resto de los contenidos, pero objetivamente se ve que las pruebas dan mucha mayor importancia al cálculo de la probabilidad condicional y conjunta al que dedican siempre un problema.

Analizando los objetos matemáticos implicados en la solución, hemos visto que los problemas propuestos son bastante complejos, pues incluyen gran cantidad de objetos matemáticos; más aún son pocos los ejemplos en que solo se pide calcular la probabilidad simple y en este caso se trata de demostración de propiedades abstractas.

Un indicador del aumento de la dificultad en los ejercicios es la gran proporción de ejercicios descontextualizados y el hecho de que, en la mayoría se requiera trabajar con experimentos dependientes, así como utilizar alguna descomposición de probabilidades o bien uno de los teoremas de la probabilidad total o de Bayes o los dos.

En resumen, nuestro análisis indica una alta dificultad de los problemas propuestos de probabilidad en las pruebas de acceso, que debería ser tenida en cuenta por los diseñadores de las mismas en las sucesivas ediciones o en pruebas de evaluación alternativas que se propongan en el futuro.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (Ministerio de Economía y Competitividad) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2011). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO, 59*, 9-17

Batanero, C., Gea, M., Arteaga, P. y Contreras, J.M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español. *Revista digital Matemática, Educación e Internet* 14(2). Disponible en: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2008). ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía. Sevilla: Autor.

Carreteros, M. y Contreras, J. M. (2013). Problemas que involucran probabilidad en las pruebas de acceso a la universidad en el distrito andaluz. En J. M. Contreras (Ed.). *Actas de las I Jornadas de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Granada:* SEIEM.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C., Contreras, J. M. Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Bolema 26*(22), 1207-1226.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, 417-424). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática,* 25-45.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

MEC, Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Madrid: Autor.

MP, Ministerio de la Presidencia (2008). *Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regula las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas.* Madrid: Autor.

El Informe Estadístico: Una estrategia de evaluación en Estadística

Dicleny Castro Carvajal[1] *y John Jairo Zabala Corrales*[2]

[1]diclenyc@gmail.com, Universidad del Tolima (Colombia)
[2]johnjzabala@gmail.com, Universidad del Tolima (Colombia)

Resumen

Se presenta en esta comunicación, los resultados de la experiencia didáctica desarrollada en el programa de Administración Financiera y Programas Técnicos de la Facultad de Agronomía de la Universidad del Tolima, la cual consiste en la inclusión del informe estadístico como estrategia de evaluación de conceptos y metodología estadísticas básicas. Se establece de manera general un estudio sobre el informe estadístico y sobre la manera de interpretar y argumentar escritos o relatos estadísticos, seguidamente, relacionamos el informe estadístico como una estrategia en la comunicación de la información.
Mediante la preparación previa de una lista de chequeo, que tiene que ver con la estructura del informe estadístico, que involucra los elementos técnicos de la elaboración del informe estadístico y de las condiciones estéticas y éticas de la evaluación, se establece un acuerdo didáctico para la realización de la actividad.

Palabras clave: Texto argumentativo, informe estadístico, lista de chequeo, evaluación en estadística.

1. Introducción

El tema de la evaluación de los aprendizajes, se ha convertido en objeto de estudio, ya como una disciplina dentro de las ciencias de la educación o como un tema de análisis dentro de cada una de ellas. Particularizando, en la educación matemática la evaluación, es otro campo amplio de la acción investigativa. Y si entramos aún más el desarrollo de estos temas como en el caso de la estadística se torna aún más específico, pues los objetos de estudio de la estadística son diferentes a los objetos de estudio de las Matemáticas. De esta manera, pensar en establecer una estrategia de evaluación para los conceptos estadísticos, es razonable y muy pertinente en nuestro quehacer cotidiano de la enseñanza de la estadística.

El informe estadístico, como estrategia de evaluación de conceptos estadísticos, permite abordar de manera consecutiva, dinámica y alternativa los procedimientos estadísticos básicos. Se puede iniciar mediante un acuerdo didáctico expresado en una lista de chequeo, en donde se describan las condiciones previas para el desarrollo del informe estadístico.

Seguidamente, se describe la experiencia significativa que tuvimos al emplear esta metodología en el desarrollo de un curso de Estadística en los programas de Administración Financiera y en los programas Técnicos de la Facultad de Agronomía, de la Universidad del Tolima.

2. Evaluación en Estadística

Según los Lineamientos Curriculares (1998), el dominio del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos (Estadística) debe orientarse inicialmente a la exploración, representación,

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 225-230). Granada, 2015.

lectura e interpretación de datos en contextos; al análisis cualitativo de regularidades, tendencias, tipos de crecimiento y a una aproximación intuitiva a las posibilidades. El estudiante debería estar familiarizado con algunas formas de representación de información numérica y estar en capacidad de interpretar estas representaciones.

En los grados superiores de la educación media y por supuesto en la universidad, deberá potenciarse la formulación de inferencias y argumentos, usando medidas de tendencia central y de dispersión para analizar datos, interpretar informes y elaborar conclusiones.

Siguiendo el objetivo que persigue la estadística, Acevedo (2003) afirma:

Resulta muy interesante proponer actividades de evaluación que privilegien el trabajo en grupo. En el manejo de información, por ejemplo, la recolección de datos interesantes y relevantes para el grupo, el investigar cómo es el estudiante promedio del curso o de la institución; formular preguntas para determinar características: edad, altura, color de ojos, tipo de música o programa de televisión que prefiere, número de personas del núcleo familiar. Estas actividades requieren que los estudiantes construyan un instrumento de sondeo adecuado con el objeto de obtener los datos y, una vez establecidos estos instrumentos, proceder a recolectar, agrupar y granear los datos y analizar la información, guiando esta exploración con preguntas como; ¿Qué es lo que más aparece en los datos?, ¿qué tendencias se aprecian en éstos?, ¿son significativos los puntos extremos?, ¿cómo pueden interpretarse?, ¿qué dificultades podrían presentarse si generalizamos a otros problemas similares?, ¿qué datos adicionales podríamos recoger para verificar o refutar las conclusiones que se han sacado a partir de estos datos? (p. 138).

El asumirse como un científico, es una de las ventajas dadas en el marco aleatorio y estadístico, pues a manera de explorador, el estudiante puede arriesgarse a lanzar hipótesis y conjeturas, dentro y fuera del aula y en cualquier área del conocimiento, en este sentido Acevedo (2003) afirma:

En este campo, los contextos y las situaciones reales son ricas fuentes de exploración, pues en ellos los estudiantes pueden generar datos nuevos e investigar un campo amplio de hipótesis o conjeturas, incluso dentro de la misma institución, manejar datos de los compañeros de clase de educación física: longitud de saltos, tiempo empleado en recorrer una determinada distancia; o llevar registros de los precios de algunos artículos de la canasta familiar vendidos en expendios del barrio, durante un período de tiempo determinado, para estudiar su variación. Estudiar la naturaleza de la relación entre pares de variables tales como: peso y estatura de los alumnos, su edad y ritmo cardíaco, su temperatura y ritmo cardíaco; registrar información, construir tablas de doble entrada y estudiar el comportamiento de las variables. Trabajar con informes de tipo estadístico (científicos, económicos, sociales, políticos, deportivos) que aparecen en los medios de comunicación, como motivo de discusión en la clase, interpretar la información que presentan y motivar inferencias a partir de ellos (p.138).

El apoyo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC), disponibles en las instituciones educativas y en los hogares, facilitan los cálculos de medidas estadísticas, las gráficas y tabulaciones, es decir, un mejor manejo del Análisis Exploratorio de Datos. Prevaleciendo el análisis de la información de manera sintética y objetiva y así obtener una visión diferente para enfrentarse a los problemas planteados.

La manera de acceder a la información estadística , es de manera práctica, pues los estudiantes lo viven a diario en su contexto, desde las facturas de la energía, del agua y del gas, entre otras, que llegan a sus hogares conformando así las bases de datos que los estudiantes utilizan, además la información suministrada en el DANE (Departamento Administrativo Nacional de Estadística), la cual es de uso libre, lo mismo que las bases de datos del Banco de la

República; igualmente en la red se encuentra mucha información que sirve de apoyo para soportar toda la información teórica y práctica de la estadística. Se puede además hacer uso de la simulación estadística para procesos de modelación de información, cuando esto lo requiera.

Considerando lo anterior, el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística se hace enriquecedor en opciones, pues permite abordar temáticas simples y elementales en los cursos iniciales, desde problemas descriptivos, hasta situaciones complejas de simulación y/o modelación de información que le permita hacer inferencias y así resolver problemas más complejos que involucren información.

3. Informe Estadístico

Los entes gubernamentales a nivel internacional o nacional (INE en España o DANE en Colombia) presentan a sus usuarios metodologías para la presentación de los resultados de sus estudios e informes, estos estudios son demasiado técnicos y especializados, sin embargo, hay otros documentos que permiten difundir la estadística de manera libre y de uso general como son los dos documentos editados por la Organización de las Naciones Unidas, ONU (2009), “Cómo hacer comprensible los datos, Parte 1: Una guía para escribir sobre los números” y “Cómo hacer comprensible los datos, Parte 2: Una guía para presentar estadísticas”.

A continuación presentaremos el informe estadístico como una herramienta práctica para ayudar a los estudiantes a utilizar textos, tablas, gráficos y otra información con el objetivo de acercar las estadísticas a la vida cotidiana, utilizando técnicas de escritura efectivas.

Se describen también las características de un buen informe. Pues este no es un simple resultado de un producto o una tarea al final del curso. Él debe llevar de manera taxativa y clara, todo el proceso de acompañamiento didáctico desde inicio, hasta el final del curso.

Basados en la propuesta de Cassany (2007), el informe estadístico deberá contener los siguientes elementos mínimos:

A. **Título**: Debe dar una idea clara del tema estudiado. En la medida de lo posible debe ser claro, concreto y atractivo al lector.

B. **Resumen**: El propósito es suministrar al lector no especialista, los hechos más relevantes y las conclusiones del estudio, sin entrar en los detalles estadísticos. Tener presente que los lectores pueden pertenecer a áreas distintas a las técnicas, por lo cual quizá estén poco interesados en estos aspectos del informe. Sin embargo deben hacerse los esfuerzos necesarios para garantizar que se ha incluido toda la información relevante.

C. **Introducción** Explica **por qué** se realiza el estudio y la necesidad de formular un curso de acción. Describe la naturaleza, objetivo y el alcance del problema.

D. **Métodos:** Describe **cómo** se llegan a los resultados.

El informe debe permitir que otra persona pueda repetir el experimento o ejercicio tan solo sobre la base de la misma estructura del informe.

Sintetiza:

- Origen de los datos que sirvieron de base y los participantes.
- Herramientas que se utilizaron para confeccionar el estudio. Si alguna fue diseñada especialmente para este trabajo, deberá darse el detalle suficiente para que otro experimentador pueda construirlo u obtenerla.

- Diseño contiene la definición de las variables.

E. **Resultados**: Establece **qué** se ha encontrado.
- Se presentarán preferentemente en forma de gráficos usando tablas solo si son imprescindibles.
- Este es el paso en donde se realiza el análisis estadístico propiamente dicho, sea este descriptivo o inferencial.
- La información que se presente deberá incluirse una sola vez, ya sea en forma de tablas, gráficos o en el texto escrito.
- Las tablas o gráficos deben ser autosuficientes, no obligar al lector a recurrir al texto para comprenderlos.
- Presentar los cálculos con el rigor necesario para validar la prueba estadística pero no incluir información que sea innecesaria.
- No interpretar los datos hasta sección siguiente.

F. **Análisis**: Interpreta los hallazgos del estudio y realiza las recomendaciones que surjan del mismo. El formato para expresar los resultados de un análisis inferencial debe mencionar el valor p (probabilidad), IC (Intervalo de Confianza) y la potencia del estudio (especialmente en los no significativos).

G. **Conclusiones**: Parte de este paso final se utiliza en el resumen que antecede al informe, pero aquí el investigador explica las conclusiones.

Si hay un buen número de pruebas o procedimientos en el trabajo, quizá sea conveniente combinar las secciones C y D con el título: Resultados, Análisis y Conclusiones. Esto permitiría una mejor continuidad en la lectura.

La importancia de las conclusiones se observa al repetirlas implícitamente tres veces: en el Resumen, en la Introducción y aquí en las Conclusiones.

El Informe Estadístico se puede ubicar entre los textos descriptivos y argumentativos. Es descriptivo, parafraseando a Pérez (1999) porque el texto descriptivo refiere las características o propiedades de un objeto; su estructura se organiza básicamente sobre la dimensión espacial. La descripción supone siempre una forma de análisis, ya que implica la descomposición de su objeto en partes o elementos y la atribución de propiedades o cualidades; además posee las siguientes características: Uso detallado del lenguaje, razón por la cual hay mayor número de adjetivos. La descripción puede ser de dos clases: objetiva, a través de la cual se expresa cómo es realmente el objeto de la descripción a partir de la inclusión de las partes que lo constituyen y subjetiva (propia del lenguaje literario) que expresa la percepción personal que se tiene del objeto descrito. La relación que se quiere establecer entre el informe estadístico y el texto descriptivo y el argumentativo, es que se vale del lenguaje para describir y analizar de manera más fácil y apropiada la información, además que el informe estadístico se considera un texto argumentativo.

Considerado en Sánchez (2006), el texto argumentativo se distingue porque la presentación de ideas u opiniones tiene el fin único de persuadir o convencer y ello recurre al planteamiento de hipótesis que se pretende demostrar y argumentos que contribuyan a su validez o refutación. Se trata del tipo de textos en los que se presentan las razones a favor o en contra de determinada "posición" o "tesis", con el fin de convencer al interlocutor a través de diferentes argumentos tomando una postura a favor o en contra . Se trata de manera fundamental, aunque no exclusivamente, de juicios de valor, apreciaciones positivas o negativas acerca de lo expuesto:

Bueno, malo, feo, bello, válido, no válido, adecuado, no adecuado. Esto en relación a los datos y la información encontrada a partir de ellos, permitiendo así la toma de decisiones.

Es decir, el informe estadístico resumirá estos dos tipos de expresiones textuales, presentando un orden en la exposición de ideas, coherencia en la presentación de los datos, uso de términos específicos y un lenguaje claro y persuasivo de tal manera que haga comprensible los resultados del problema planteado.

4. Desarrollo del Tema

Se debe iniciar con el establecimiento de la lista de chequeo, en ella se debe describir de forma clara, las directrices que se presentan en el informe estadístico, se debe dar una idea de los criterios generales para la redacción de informes. Sin embargo, siempre se debe tener en cuenta su contexto particular de escritura en cada una de las disciplinas.

Sea cual sea su contexto de escritura, siempre debe mantener su propósito y a quien va dirigido. Comience por preguntarse: ¿Qué es lo que quiere lograr con su informe? ¿Cuáles son sus objetivos principales? ¿Quién va a leer su informe y con qué fines? ¿Cuál es su origen? ¿Cómo está familiarizado con el tema? ¿Qué información básica necesitarán? ¿Espera que sean receptivos y o no a sus conclusiones y recomendaciones? ¿Cuáles podrían esperar en términos de contenido, nivel de detalle, y el formato de su informe?

La lista de chequeo permite dar un derrotero del desarrollo del Informe Estadístico, la lista permite hacer un seguimiento en tiempo real de las actividades estadísticas del curso, desde la formulación inicial del tema objeto de estudio, pasando por cada una de las fases del proceso estadístico hasta llegar al producto final que es la comunicación de resultados.

5. Experiencia en la Universidad del Tolima

Durante los últimos cuatro (4) semestres, en los programas Técnicos en Agronomía y Administración Financiera, se ha involucrado el informe estadístico de manera transversal, como un tema articulador de las demás temáticas, es decir hay unos temas básicos, tales son:

- Generalidades: Historia de la Estadística, Variables y su clasificación.
- Análisis Exploratorio de Datos: Medidas de centralización y de Dispersión, Gráficas y tablas.
- Fundamentos de probabilidad: Técnicas de conteo, definición de probabilidad, probabilidad condicional y teorema de Bayes.
- Funciones de Distribución: Distribución Binomial, de Possion, Normal y t-student.
- Inferencia estadística para la media y la diferencia de medias

Basados en un problema formulado por los estudiantes en equipos de trabajo, este se va desarrollando de manera sistemática y paralelo al desarrollo de la guía temática del curso. El Informe Estadístico es un recurso articulador en el sentido que permite sistematizar cada uno de los contenidos desarrollados en las clases. Por ejemplo, la clasificación de variables, elaboración de tablas de frecuencias y gráficas estadísticas, cálculo e interpretación de las medidas de tendencia central y de dispersión.

6. Conclusiones

Se presenta la estructura del Informe Estadístico como una propuesta para ser empleada en los cursos de estadística, puesto que la experiencia nos permite afirmar que esta metodología resulta ser un recurso didáctico para la evaluación del proceso enseñanza aprendizaje de conceptos en cursos formales de estadística. En él nos permite obtener un seguimiento progresivo de la apropiación de conceptos básicos de la estadística, determinación de niveles de análisis de información y de la capacidad de análisis de los estudiantes.

Referencias

Acevedo, M. (2003). *La evaluación en el aula de matemáticas*. En Trazas y Miradas. Recuperado el 5 de Junio de 2014, de http://www.bdigital.unal.edu.co/1559/8/07CAPI06.pdf

Cassany, D.. (2007). Afilar el lapicero. Guía de redacción para profesionales. Editorial Anagrama. Barcelona.

MEN (1998), Lineamientos Curriculares Para el Área de Matemáticas, Magisterio, Colombia.

ONU (2009). *Cómo hacer comprensible los datos, Parte 1: Una guía para escribir sobre los números*. Recuperado el 17 de Julio de 2014, de http://www.unece.org/fileadmin/DAM/stats/documents/writing/MDM_Part1_Spanish.pdf

ONU (2009). *Cómo hacer comprensible los datos, Parte 2: Una guía para presentar estadísticas*. Recuperado el 5 de Junio de 2014, de http://www.unece.org/fileadmin/DAM/stats/documents/writing/MDM_Part1_Spanish.pdf

Pérez, G. H.. (1999). Nuevas tendencias de la composición escrita. Capítulo 10. Bogotá. Magisterio. p. 129.

Sánchez, J. (coord.). (2006). Saber escribir. Bogotá, Colombia: Aguilar. p. 369.

Webb, N. (1992). *Assessment of student´s knowledge of mathematics steps toward a theory*. Recuperado el 5 de Junio de 2014, de http://mail.math.uconn.edu/~dragon/Assessmentofstudent.pdf

El lenguaje matemático en el tema de correlación y regresión en textos del bachillerato en ciencias y tecnología

María Magdalena Gea Serrano[1], Danilo Díaz-Levicoy[2], José Miguel Contreras García[3] y Gustavo Raúl Cañadas de la Fuente[4]

[1]mmgea@ugr.es, Universidad de Granada
[2]dddiaz01@hotmail.com, Universidad de Granada
[3]jmcontreras@ugr.es, Universidad de Granada
[4]grcanadas@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

Presentamos un estudio sobre el lenguaje matemático utilizado en el tema de correlación y regresión en ocho libros de texto de Bachillerato. Se analizan los términos verbales, notación simbólica y expresiones algebraicas, representaciones tabulares y gráficas. Se evidencia la complejidad del lenguaje matemático utilizado y su diferencia en los textos analizados, con un uso mayoritario del listado de datos para el registro tabular y del diagrama de dispersión como representación gráfica.

Palabras clave: correlación y regresión, textos, lenguaje matemático, Bachillerato.

1. Introducción

La correlación y regresión tienen gran utilidad en la predicción en diversos campos científicos (Engel y Sedlmeier, 2011), extienden la dependencia funcional a variables aleatorias y se incluye en el currículo español de Bachillerato (MEC, 2007). Sin embargo, la investigación ha descrito sesgos de razonamiento, como no apreciar la correlación inversa, tener un sentido determinista o local de la correlación o identificar correlación con causalidad (Estepa y Batanero, 1995; Estepa, 2008; Zieffler y Garfield, 2009). Dichas creencias, en algunos casos, resisten al cambio incluso después de la enseñanza (Batanero, Estepa y Godino, 1997). También se han observado errores al interpretar los coeficientes de correlación y regresión (Truran, 1995; Sánchez Cobo, 1998; Sánchez Cobo, Estepa y Batanero, 2000).

En este trabajo analizamos el lenguaje con que los libros de texto presentan la correlación y regresión, completando otros trabajos previos (Gea, Batanero, Cañadas y Contreras, 2013; Gea, Batanero, Fernándes y Gómez, 2014; Gea, Batanero, Arteaga, Cañadas y Contreras, 2014).

2. Fundamentos

Desde el currículo fijado en las directrices curriculares al implementado en el aula, un punto intermedio son los libros de texto que constituyen el currículo escrito (Herbel, 2007). El libro de texto da también muestra del proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1991), esto es, los cambios del conocimiento matemático cuando es adaptado para su enseñanza. Un aspecto importante a considerar es el lenguaje que un texto utiliza, que consta no sólo de vocabulario y símbolos sino de representaciones complejas (Orton, 1990), que puede afectar al aprendizaje de las matemáticas. Cordero y Flores (2007) indican que el discurso matemático escolar es determinado con frecuencia por el libro de texto, además de por las creencias de los actores del

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 231-238). Granada, 2015.

sistema didáctico y prácticamente regula las acciones de enseñanza y aprendizaje. El lenguaje matemático es también fundamental en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que postula que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de una persona o institución al resolver problemas, mediadas por el lenguaje.

Aunque hay una amplia investigación sobre los libros de texto de matemáticas, esta tradición es menor en estadística. Nuestro primer antecedente es el de Sánchez Cobo (1998) quien analiza 11 textos de tercer curso de Bachillerato publicados desde 1987 hasta 1990. Como consecuencia, ofrece una taxonomía de definiciones y un análisis de la función que realizan y las componentes que integran las demostraciones. Muestra una tendencia formalista en la presentación del tema, y el uso mayoritario de ejemplos basados en representaciones gráficas, y un fuerte sesgo en los ejemplos presentados hacia la correlación positiva. Más recientemente, Lavalle, Micheli y Rubio (2006) analizan el tema en siete libros de texto argentinos de Bachillerato, observando un enfoque mayoritariamente socio-constructivista, con un nivel de profundidad adecuado, donde se plantean más actividades bajo una asociación directa que inversa. Para complementar los citados trabajos analizaremos el lenguaje matemático utilizado en los textos españoles.

3. Metodología

Se analizaron ocho libros de textos publicados recién implantado el currículo actual de Bachillerato (MEC, 2007), todos en la modalidad de Ciencias y Tecnología, y no reeditados hasta la fecha. Son los más utilizados en la enseñanza pública en Andalucía, y corresponden a las editoriales de prestigio en esta comunidad (ver Anexo 1). Se partió de las variables utilizadas por Ortiz, Batanero y Serrano (2001): términos y expresiones verbales; notación simbólica y expresiones algebraicas y representaciones tabulares y gráficas. Para cada una de ellas, por un proceso inductivo y cíclico, propio del análisis de contenido, se identificaron las categorías de análisis, analizando su presencia en los textos, mostrando ejemplos y resumiendo lo encontrado mediante tablas. Presentamos, a continuación, los resultados obtenidos.

4. Resultados y discusión

4.1. Términos y expresiones verbales

Primeramente se revisaron los términos y expresiones verbales empleados en el tema para denotar conceptos, propiedades, etc., que se clasificaron en dos grupos: por un lado los que debe conocer el estudiante al iniciar el tema, como por ejemplo, intervalo (que se usa en el estudio de las tablas estadísticas de datos agrupados), y por otro, los específicos de correlación y regresión, por ejemplo, covarianza. De cada tipo se ha encontrado una amplia variedad, mostrando la riqueza conceptual y complejidad del tema, que no incluimos aquí por limitación de espacio.

A esta variedad cabe añadir aquellos términos o expresiones que se utilizan con sentido matemático diferente a su uso en la vida ordinaria. Rothery (1980) diferencia tres tipos de expresiones en la enseñanza de las matemáticas: (a) Términos matemáticos específicos que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano; (b) Palabras usadas en matemáticas y el lenguaje ordinario, aunque no con el mismo significado y (c) Palabras con significados iguales o muy próximos en ambos contextos. Un desafío es que los términos matemáticos tienen mayor precisión que el lenguaje ordinario, pues proporcionan definiciones necesarias y suficientes, mientras que el lenguaje ordinario es simplemente descriptivo (Schleppegrell, 2007). En nuestro estudio encontramos términos del lenguaje ordinario utilizados con diferente sentido para aludir a objetos matemáticos (Tabla 1). Aunque la mayoría son usados para disminuir la formalidad del enunciado matemático, podrían llevar, de acuerdo a Thompson y Rubenstein (2000), a imprecisiones en el uso de estas nociones por parte del estudiante. Sin embargo, Pimm (1987) considera que la analogía (metáfora) por medio de palabras cotidianas es muy importante para la construcción del significado de un objeto matemático.

Tabla 1. Ejemplos de expresiones de lenguaje habitual utilizadas con sentido matemático en los textos

Expresión coloquial	Término matemático al que alude
Estatura normalita ([T1], p.331)	Estatura media
Según lo apretados que estén los puntos ([T1], p.333)	Dispersión
Rectas que "se acoplan bien" a la nube de puntos ([T1], p.336); la recta de regresión se amolda a la nube de puntos ([T1], p.337); la nube de puntos se condensa en torno a ([T8], p.322)	Ajuste lineal a la nube de puntos casi perfecto
Hinchar los puntos proporcionalmente a su frecuencia ([T1], p.339)	Representar circunferencias con diámetro proporcional a la frecuencia
Los puntos de la nube están completamente en desorden. ([T3], p.272); los puntos del diagrama están esparcidos al azar ([T8], p.322)	Están muy dispersos
La nube de puntos es estrecha/ancha ([T7], p.305)	Los puntos presentan más o menos dispersión
Se puede estimar (apostar, suponer) su estatura, con una certeza probable ([T5], p.357)	Se puede estimar su estatura con una cierta probabilidad
Una nube de puntos alargada indica correlación lineal.	Si la nube de puntos se distribuye en torno a una recta existe correlación lineal
La estrechez de la nube expresa que la correlación es fuerte ([T5], p.359)	La dispersión en la nube de puntos informa de la intensidad de la correlación
Siempre que no se exagere en la extrapolación de resultados ([T5], p.370)	Siempre que la estimación se realice en valores próximos a la media
los datos no están demasiado concentrados ([T7], p.312)	Los datos presentan gran dispersión

4.2. Notación simbólica y expresiones algebraicas

Un segundo tipo de lenguaje es el simbólico, que se utiliza para referirse a conceptos o propiedades y permite una comunicación comprimida entre individuos, trabajando a un alto nivel de complejidad. Al igual que Ortiz (1999), hemos encontrado notación funcional, subíndices y superíndices, que con frecuencia son variables. No se incluyen en el presente trabajo por limitación de espacio.

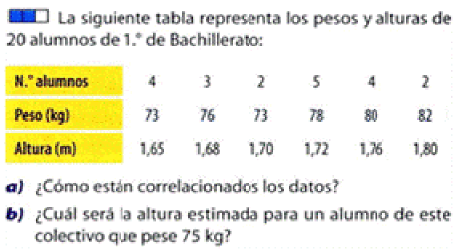
Presentamos en la Tabla 2 las expresiones algebraicas que se incluyen en los textos analizados. Se refieren principalmente al cálculo de la media, varianza, desviación típica, covarianza, coeficiente de determinación, rectas de regresión y pendiente de dichas rectas, encontrando pocas diferencias entre los textos. No se incluyen en dicha tabla dos expresiones que se refieren al análisis unidimensional de una variable aleatoria que son las expresiones: $L_i + a\dfrac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i}$ y $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| x_i - \overline{x} \right|}{N}$, incluidas en los textos [T6] y [T7], respectivamente.

Tabla 2. Expresiones algebraicas en los textos analizados

Expresión algebraica	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
$\frac{\sum x_i}{n}$	x				x	x		x
$\frac{\sum n_i x_i}{N}$; $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$; $\frac{\sum n_{ij}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y})}{N}$; $\frac{\sum x_i y_i n_{ij}}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$	x	x	x	x	x	x	x	x
$\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$; $\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$	x				x	x		x
$\sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$; $\sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$		x	x	x		x	x	x
$\frac{\sigma}{\bar{x}}$						x	x	
$\frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n}$; $\frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$	x				x	x	x	x
$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\left(x - \bar{x}\right)$; $x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\left(y - \bar{y}\right)$	x	x	x	x	x	x	x	x
$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$; $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$	x	x	x	x	x		x	x

4.3. Representación tabular y gráfica

Todos los libros analizados reconocen la importancia de las tablas, aunque su tratamiento varía. La tabla de doble entrada es la más habitual para organizar los datos de un estudio bidimensional, principalmente cuando se dispone de una muestra de gran tamaño. Se suele presentar la tabla de doble entrada al comienzo del tema, acompañando a la definición de variable y/o distribución bidimensional, y a los diferentes tipos de frecuencias (Gea, Batanero, Fernándes, y Gómez, 2014). Otros como [T1] y [T6] no hacen uso de ella hasta el final del tema, dentro de algunos ejercicios resueltos.



La siguiente tabla representa los pesos y alturas de 20 alumnos de 1.º de Bachillerato:

N.º alumnos	4	3	2	5	4	2
Peso (kg)	73	76	73	78	80	82
Altura (m)	1,65	1,68	1,70	1,72	1,76	1,80

a) ¿Cómo están correlacionados los datos?

b) ¿Cuál será la altura estimada para un alumno de este colectivo que pese 75 kg?

Figura 1. Datos en representación tabular con frecuencias ([T6], p. 320)

Otra representación muy utilizada es el listado de datos (dos filas/columnas) y como extensión, la tabla de frecuencias bidimensional simple, que se muestra en la Figura 1, donde se añade una nueva fila/columna con la frecuencia que corresponde a cada par de valores (x_i, y_i). Este tipo de representación es muy útil cuando se necesitan hacer cálculos intermedios para obtener fórmulas (por ejemplo, para calcular la covarianza), pues se pueden añadir tantas filas/columnas como cálculos sean necesarios.

En la Tabla 3 resumimos el tratamiento que se realiza de estas representaciones en los textos analizados, donde poco más de la mitad utiliza la tabla de doble entrada para el desarrollo del tema ([T2], [T3], [T4], [T7] y [T8]). Encontramos textos más completos como [T3] y [T7] donde tratan, además, la agrupación de datos en intervalos en la tabla de doble entrada. Por el contrario, otros ([T1], [T5] y [T6]) basan su enseñanza de la correlación y regresión en tablas bidimensionales simples, haciendo uso anecdótico de la tabla de doble entrada o la tabla bidimensional con frecuencias. Este resultado muestra baja idoneidad epistémica de la enseñanza del tema pues, de acuerdo a Arteaga (2011), las representaciones de datos que se limitan a un listado de los mismos no llegan a representar explícitamente la distribución de la variable, y tendrían menor complejidad semiótica que aquellas en que se han resumido las frecuencias (tabla bidimensional simple con frecuencias o tabla de doble entrada).

Tabla 3. Representación tabular en los textos analizados

	Presencia en el tema	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Tabla bidimensional	Desarrollo teórico y práctico del tema	x				x	x		
simple	Uso eminentemente práctico		x	x	x			x	x
Tabla bidimensional	Desarrollo teórico y práctico del tema		x		x				
simple con	Uso eminentemente práctico						x		
frecuencias	Presencia anecdótica			x		x		x	x
Tabla de doble	Desarrollo teórico y práctico del tema		x	x	x			x	x
entrada	Presencia anecdótica	x				x	x		

La representación gráfica más utilizada es el diagrama de dispersión o nube de puntos. Cuando los datos poseen frecuencia absoluta igual a la unidad se corresponden a puntos en el plano, y en otro caso, se puede optar por dibujar circunferencias con área proporcional a la frecuencia de cada dato (gráfico de burbujas) o bien, alrededor de donde se sitúa dicho dato, dibujar tantos puntos como indique su frecuencia absoluta. Esta representación es muy útil pues ayuda a deducir la intensidad de la relación (mayor o menor dispersión de la nube), visualizar su sentido (relación directa/inversa) y el tipo (lineal o no) según la tendencia de los datos (Sánchez Cobo, 1998). Un ejemplo de tarea de traducción de gráfico a tabla se presenta en la Figura 2.

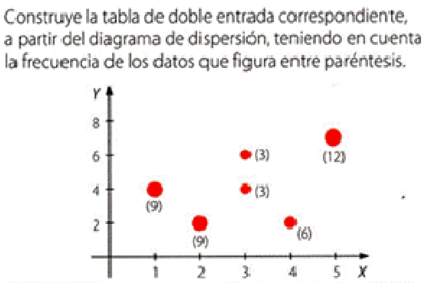


Figura 2. Tarea de traducción entre diferentes representaciones ([T7], p.317)

El tratamiento de la representación gráfica de la variable en tres dimensiones es mucho más pobre en relación a la representación de datos en el plano. El diagrama de barras tridimensional suele utilizarse mucho más que el histograma tridimensional, y permiten visualizar en el espacio la variable estadística bidimensional a través de barras (prismas, en el caso del histograma) de altura (volumen, en el caso del histograma) proporcional a su frecuencia. Ambas representaciones generalizan las que ya conocen los estudiantes de cursos anteriores.

En la Tabla 4 observamos que todos los textos presentan al menos un tipo de representación gráfica, aunque hay mucha variabilidad: desde los que presentan sólo el diagrama de dispersión ([T5], [T6], [T8]), al que incluye todos los gráficos descritos ([T1], [T3] y [T7]). Menos de la mitad de los textos presentan el gráfico de burbujas. Este diagrama está especialmente indicado para distribuciones en que los datos posean frecuencia distinta a la unidad, que son las más comunes. Por este motivo se incluyó en el análisis el descriptor "Utiliza con frecuencias mayores a 1" para el diagrama de dispersión, pues nos permite valorar si los textos contemplan este tipo de situaciones problemáticas en el tema, aunque no utilicen el gráfico de burbujas. Algunos textos como [T4] y [T8] omiten el tratamiento del gráfico de burbujas, aunque representan tantos puntos como frecuencia presenten los datos alrededor de las coordenadas de éstos. En general, los textos no son precisos al definir este tipo de representación. Por ejemplo, [T7] indica la importancia del grosor de los puntos dependiendo de la frecuencia de los datos, pero no precisa que este grosor debe ser proporcional al radio con que se representan.

Tabla 4. Representación gráfica en los textos analizados

	Presencia en el tema	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Diagramas de dispersión	Desarrollo teórico y práctico	x	x	x	x	x	x	x	x
	Utiliza con frecuencias mayores a 1			x	x			x	x
Gráfico de barras	Utiliza		x	x	x				
	Presencia anecdótica	x						x	
Gráfico de burbujas	Utiliza							x	
	Presencia anecdótica	x		x					
Histograma	Utiliza			x					
	Presencia anecdótica	x						x	

Destacamos el escaso uso de otras representaciones gráficas básicas como el diagrama de barras o el histograma tridimensional, que en la mayoría de los textos se reduce a un ejemplo o un ejercicio práctico. Esta situación se complica cuando, además, las descripciones de ambas representaciones son poco precisas. Destacamos el texto [T2], que muestran el gráfico de barras sin explicar a qué se refiere la altura de cada barra, y luego proponen tareas al alumno.

5. Conclusiones

Nuestro análisis sugiere que la presentación de la correlación y regresión en los textos de Bachillerato podría llevar un uso sesgado de diferentes representaciones (tabular, verbal, gráfica y numérica), con tendencia hacia el registro gráfico, pero sin prestar atención al proceso de construcción de estos gráficos por las imprecisiones que encontramos en sus descripciones. Más aún, el lenguaje en algunos textos podría inducir confusión en gráficos como el diagrama de barras tridimensional y el histograma tridimensional, o el diagrama de dispersión y el diagrama de burbujas, donde el profesor debiese estar atento a las descripciones imprecisas que se hacen de los mismos. No es menos importante el uso limitado de la tabla de doble entrada en la mayoría de los textos analizados, a favor del uso casi generalizado del listado de datos, cuya complejidad semiótica, según Arteaga (2011) es insuficiente para visualizar tendencias. Todo ello contriuye al desarrollo del sentido de la correlación (Gea, Batanero y Roa, 2014).

Todos estos resultados han de interpretarse con precaución, pues, de acuerdo a Lowe y Pimm (1996) el impacto del libro de texto depende no sólo del mismo libro, sino del lector, y del profesor, así como de las interacciones que determinan su uso en el aula.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía)

Referencias

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. IASE Round Table Conference Papers* (pp. 191-205). Voorburg, The Netherlands: Internacional Statistical Institute.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10* (1), 7-38.

Engel, J. y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). New York: Springer.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *26* (2), 257-270.

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, *13* (2), 155-170.

Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., Cañadas, G. R., Contreras, J. M. (2014). Análisis del lenguaje sobre la correlación y regresión en libros de texto de Bachillerato. *SUMA*, *76*, 37-45.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). Bilbao: SEIEM.

Gea, M. M., Batanero, C., Fernándes, J. A. y Gómez, E. (2014). La distribución de datos bidimensionales en los libros de texto de matemáticas de Bachillerato. *Quadrante*. *23* (2), 147-172.

Gea, M., Batanero, C. y Roa, R. (2014). El sentido de la correlación y regresión. *Números 87,* 25-35.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38* (4), 344-369.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 9* (3), 383-406.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-410). Dordrecht: Kluwer.

MEC. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura de Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *SUMA*, *38*, 5-14.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: M.E.C. y Morata.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*. New York: Routledge and Kegan Paul.

Rothery, A. (1980). *Children reading mathematics*. Worcester: College of Higher Education.

Sánchez Cobo, F.T. (1998). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Sánchez Cobo, F.T., Estepa, A. y Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *18* (2), 297-310.

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, *23*, 139-159.

Thompson, D. R. y Rubenstein, R. N. (2000). Learning mathematics vocabulary: Potential pitfalls and instructional strategies. *Mathematics Teacher*, *93*, 568-574.

Truran (1995). Some undergraduates' understanding of the meaning of a correlation coefficient, en B. Atweh, y S. Clavel (Eds.), *Proceedings of the Eigteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)* (pp. 524-529). Darwin, Australia: Northern Territory University.

Zieffler, A, y Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, *8* (1), 7-31.

Anexo 1: Textos utilizados en el análisis

[T1]. Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas I*. Madrid: Grupo Anaya.

[T2]. Arias, J. M. y Maza, I. (2011). *Matemáticas 1*. Madrid: Grupo Editorial Bruño.

[T3]. Biosca, A., Doménech, M., Espinet, M. J., Fandos, M. J. y Jimeno, M. (2008). *Matemáticas I*. Barcelona: Guadiel - Grupo Edebé.

[T4]. Monteagudo, M. F. y Paz, J. (2008). *1º Bachillerato. Matemáticas. Ciencias y Tecnología*. Zaragoza: Edelvives (Editorial Luis Vives).

[T5]. Martínez, J. M., Cuadra, R., Barrado, F. J. (2007). *Matemáticas 1º Bachillerato*. Madrid: McGraw-Hill.

[T6]. Bescós, E. y Pena, Z. (2009). *Matemáticas. 1 Bachillerato*. Navarra: Oxford University Press España.

[T7]. Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Molano, A., del Río, J., Santos, D. y de Vicente, M. (2008). *Matemáticas I. 1 Bachillerato*. Madrid: Santillana Educación.

[T8]. Vizmanos, J. R., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas 1*. Madrid: Ediciones SM.

El pensamiento crítico en la interpretación de tablas y gráficos estadísticos en el aula

Ángela Rodríguez Nope[1]*, Jairo Andrés Nieto Bernal*[2] *y Ingrith Álvarez Alfonso*[3]

[1]dma_arodriguez257@pedagogica.edu.co, Universidad Pedagógica Nacional
[2]dma_jnieto669@pedagogica.edu.co, Universidad Pedagógica Nacional
[3]ialvarez@pedagogica.edu.co, Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

El presente documento surge como resultado del proceso de diseño, gestión y evaluación de una experiencia en aula, implementada en un colegio público de Bogotá (Colombia), con el propósito de fomentar los procesos de interpretación de tablas y gráficos estadísticos, mediante la puesta en práctica del pensamiento crítico. La experiencia surge como parte del proceso de formación inicial como futuros profesores de matemáticas, dentro del espacio académico de Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística, dentro del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. A partir de tal experiencia y el análisis de los resultados se propone una alternativa metodológica para trabajar en aulas de grado octavo (12-15 años) nociones de estadística.

Palabras clave: Cultura Estadística, Interpretación, Tablas y gráficos estadísticos, Pensamiento crítico.

1. Introducción

Como Batanero (2013) lo menciona, una posible explicación a las concepciones incorrectas que tienen los estudiantes acerca de algunas nociones estadísticas, puede ser la enseñanza rutinaria que se enfatiza en fórmulas y definiciones, restando importancia a la interpretación y el contexto de los datos. Con este énfasis en rutinas y memorización de definiciones, los componentes de la Cultura Estadística, propuestos por Gal (citado en Batanero, 2002): i) la capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística y ii) la capacidad para comunicar o discutir opiniones al respecto de tales informaciones, quedan minimizados y hasta olvidados en las aulas de clase de la educación básica.

Teniendo en cuenta esto y que, como lo mencionan Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras (2009), la interpretación de gráficos estadísticos forma parte de la cultura que un ciudadano bien informado ha de tener para enfrentarse críticamente a la sociedad de la información; en lo que sigue, se muestra el proceso y los resultados de una experiencia en aula en la que se involucra el pensamiento crítico para promover la interpretación de la información presentada en tablas y gráficos estadísticos; información suministrada principalmente a partir de situaciones provenientes del contexto de los estudiantes de grado octavo de una institución pública de la ciudad de Bogotá.

Tal experiencia en aula se lleva a cabo como parte del proceso de formación inicial de profesores de matemáticas, de los dos primeros autores, con orientación de la docente (tercer autor), en el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Tal proceso se desarrolla bajo tres fases; la primera, fase de **planeación**, la constituye el proceso de contextualización en relación con la institución educativa, el aula de clase y los estudiantes, así como también la apropiación del conocimiento a poner en práctica, la metodología a utilizar y el diseño de las actividades; la segunda fase involucra la **puesta en práctica** de las actividades en el aula de clase; y la tercera fase, **evaluación**, implica el diseño y aplicación de actividades de verificación del desarrollo de las competencias de los estudiantes, así como el análisis de los resultados en relación al aprendizaje de los mismos, y la reflexión como docentes en formación respecto a la enseñanza y aprendizaje de la Estadística.

2. Planeación

2.1. Contexto: institucional, aula y estudiantes

La experiencia se lleva cabo en el segundo semestre del año 2014 con estudiantes de grado octavo (12-15 años) de un colegio público de la ciudad de Bogotá (Colombia). El sector en el que se ubica la institución educativa envuelve a los alumnos en diversos tipos de problemáticas sociales como los grupos vandálicos y el consumo de sustancias ilícitas, lo que genera en algunos de ellos actitudes groseras, agresivas y de poco respecto hacia el otro. Se cuenta con 37 estudiantes cuya participación en las distintas sesiones de clase está permeada en dos grupos, aquellos que hacen aportes en el desarrollo de las actividades (desde sus respuestas, ideas y opiniones) y aquellos que se dedican a manifestar sus inquietudes. En relación con los conceptos estadísticos, los estudiantes conocen muy poco (antes de la experiencia en aula) acerca de los distintos gráficos estadísticos, sus elementos básicos y las variables estadísticas involucradas en los mismos y en las distintas situaciones que se les presentan, asuntos que fueron identificados a partir de una prueba diagnóstico trabajada con dichos estudiantes y de charlas con el profesor titular de matemáticas encargado del grupo.

2.2. Apropiación del conocimiento

Para poder llevar a cabo la preparación de la secuencia de actividades, previo reconocimiento del contexto, se realizó un análisis de contenido según lo propone Gómez (2002), usando esto como estrategia para re-conocer y apropiarse del conocimiento de contenido alrededor del objeto de estudio. Tal análisis se presenta mediante un esquema gráfico (Anexo A), en el que se diferencian los conceptos, los procesos y las actitudes asociados a la competencia de lectura e interpretación de tablas y gráficos. Además se incluyen sistemas de representación y un breve análisis fenomenológico del objeto de estudio. Para los conceptos, fenómenos y sistemas de representación, en el esquema se sintetizan las ideas de Nortes (1995), Estepa y Batanero (1995), Flores, Chi Chablé, Cantú y Pastor (2009), y las expuestas en los documentos Variables y encuestas (2013) y Tablas y gráficas (2013). Para los procesos y actitudes se tiene en cuenta lo expuesto por Nortes (1998), Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006, 1998) e ICFES (2014).

2.3. Metodología de trabajo en el aula

La metodología de la experiencia en aula se fundamenta en la propuesta de Arias, Clavijo y Torres (2013) quienes proponen siete Ambientes de Aprendizaje organizados en momentos tales como: *reconocimiento y diagnóstico*, donde se busca la identificación de percepciones frente a problemáticas y una caracterización del pensamiento crítico; *ubicación y ambientación del problema*, a través de lo cual se identifican aspectos estadísticos inmersos en las encuestas preelectorales y su influencia en aspectos socio-políticos; *construcción de herramientas conceptuales* a partir del análisis de fichas técnicas de encuestas de opinión emitidas por noticieros de televisión enfocándose en las herramientas conceptuales sobre diagrama de barras, población y muestreo; y la *aplicación* de dichas herramientas conceptuales, en una situación extraída del contexto de los estudiantes. Así, el trabajo en el aula se enmarca de manera básica en elementos de la Educación Matemática Crítica, que entre otras cosas, considera la alfabetización matemática como una competencia, la cual “no sólo se refiere a unas destrezas matemáticas, sino también a la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas” (Skovsmose, 2000).

2.4. Diseño de la propuesta

La secuencia de actividades hace énfasis en el proceso de interpretación de tablas y gráficos estadísticos desde un enfoque crítico, ateniendo el contexto de los estudiantes y su acción participativa en una sociedad, ya que según Mora (citado por Arias et al., 2013) mediante esta acción los actores se involucran en la transformación de su medio y de ellos mismos, y es “donde la validez intersubjetiva, se construye en la argumentación y en las expresiones libres de los involucrados” (Arias et al., 2013, p. 291).

De tal forma, la secuencia se propone bajo algunas adaptaciones a los escenarios de aprendizaje y momentos formulados por Arias et al. (2013). El primer momento formulado por los autores, es dividido en las dos primeras actividades de la secuencia (siguiente sección); se omite el segundo momento; el tercero se modifica en un 80% utilizando únicamente las preguntas guías planteadas; y el último momento se modifica en un 100% con el fin de poder incluir el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación [TIC] mediante el aplicativo *Lectura e interpretación de gráficos estadísticos* (s.f.), como herramienta en el proceso de evaluación de los estudiantes. Así, se propone a los estudiantes realizar lecturas y análisis de información suministrada por los medios de comunicación, tal análisis guiado por preguntas que buscan que el estudiante opine de manera crítica acerca de las situaciones, así como también que lea e interprete la información estadística que se le presenta tanto de manera verbal como gráfica.

3. Puesta en práctica

La secuencia de actividades se desarrolla durante tres sesiones de clase de 60 minutos cada una. Cada uno de las actividades se describe a continuación con sus respectivos propósitos.

ACTIVIDAD 1. Lee, interpreta, representa y opina. Por parejas de estudiantes leen el fragmento (Imagen 1) de una noticia sobre venta de licor y contestan preguntas relacionadas a la misma. Además escogen la gráfica que, a su criterio, mejor representa la situación, justifican su escogencia y exponen sus opiniones ante el grupo, lo cual ha de generar una discusión en torno a las opiniones, las cuales pueden ser diametralmente opuestas según la mirada crítica de los estudiantes. Esta actividad se propone: propiciar en los estudiantes la comprensión lectora, acercándolos a situaciones reales como lo son los accidentes causados por el alcohol (noticia diaria en los medios de comunicación), promover la identificación de elementos básicos de los gráficos estadísticos (título, rótulos, ejes, escalas) y conocer sus opiniones acerca de los temas involucrados en la respectiva información.

Bogotá |18 Agosto, 2011 - 11:07 am Venta de licor
Distrito defiende a 'capa y espada' restricción a la venta de licor.
Con cifras de disminución de homicidios, riñas y accidentes de tránsito la Administración Distrital argumenta que la medida ha sido efectiva.
"...Barragán Beltrán demostró cómo a partir de la expedición del Decreto 263; que restringen la venta de licor en tiendas y espacio público después de las 11:00 pm, también se ha registrado una disminución en los incidentes atendidos por la Policía Metropolitana de Bogotá: mientras que en junio de 2010 se registraron 25.113 incidentes, en el mismo mes de 2011 estos bajaron a 22.282.El descenso se hace más notorio comparando el mes de julio de los dos años, al pasar de 24.348 casos a 12.970..."

a) ¿En cuánto disminuyeron los accidentes entre junio de 2010 y junio de 2011?____________________¿por qué?____
b) ¿En cuál mes y año (de los que menciona la noticia) se presentaron mayores incidentes? ____

Imagen 1. Fragmento de noticia para leer e interpretar

Actividad 2. Observa, analiza, conjetura e infiere. Por parejas de estudiantes analizan una tabla (Tabla 1); contestan preguntas tales como: ¿Cuál puede ser el objetivo de la encuesta? ¿A qué personas pudo haberse encuestado? ¿Cuántas personas se encuestaron? ¿Cómo creen que se recogieron los datos?, y proponen conclusiones de la información que contiene la representación, luego socializan sus respuestas ante el grupo con el fin de generar discusión en torno al tema. Los propósitos de esta actividad se enfocan en promover el análisis de la representación tabular y del proceso de recolección de información, para lograr hacer conjeturas acerca de la misma. De igual forma pretende hacer evidente el hecho de que una misma representación puede llevar a varias interpretaciones, y que la labor del lector está en poder reconocer la pertinencia o no de las respectivas interpretaciones, asumiendo de esta forma una mirada crítica frente a la información.

Tabla 1. Número y porcentaje de personas por tipo de programa

Tipo de Programa	Primera opción	
	Nº	%
Noticieros	577	51,98
Telenovelas	174	15,68
Películas y series	115	10,36
Deportivos	48	4,32
Medio ambiente y vida animal	40	3,60
Programas culturales	39	3,51
Documentales de ciencia	34	3,06
Otros	34	3,06
Espectáculos y entretenimiento	23	2,07
Medicina y salud	16	1,44
Actualidad política y debates	7	0,63
Clima y meteorología	3	0,27

Actividad 3. Observa, caracteriza y toma postura. Se presenta a los estudiantes gráficos estadísticos (Imagen 2) acerca de diversos temas. Ellos responden una serie de preguntas asociadas a los gráficos, su presentación y la información que se representa en los mismos. Las distintas respuestas son socializadas, se permite la discusión en pro de institucionalizar las características de cada tipo de gráfico y la distribución de variable que cada uno puede representar. Los propósitos para esta actividad se centran en promover cuestionamientos acerca de la información emitida en medios de comunicación, y en caracterizar algunos gráficos estadísticos tomando postura frente a ventajas y desventajas de su uso.

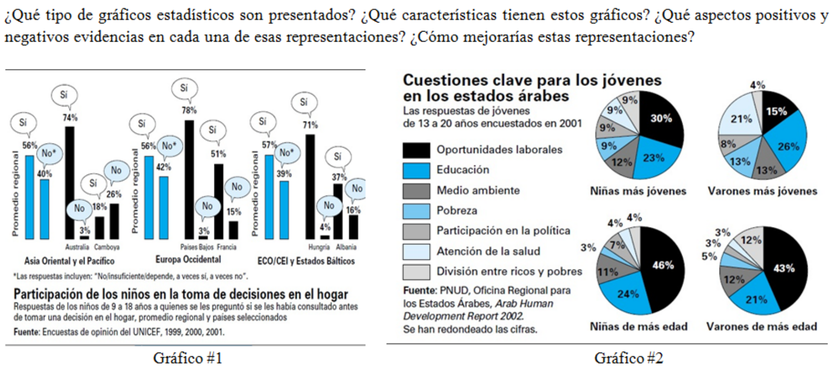


Imagen 2. Algunos gráficos estadísticos presentes en medios de comunicación

Actividad 4. Lectura e interpretación de gráficos estadísticos. Evaluación. Se presenta a los estudiantes el aplicativo *Lectura e interpretación de gráficos estadísticos* (s.f.) (una interfaz del mismo se pode ver en la Imagen 3), en el que por parejas, desarrollan dos ejercicios por cada sección que aparece, para un total de ocho ejercicios (el aplicativo tiene 5 secciones pero sólo se hace uso de cuatro). Cada una de las respuestas se reporta en un formato en el que además contestan preguntas relacionadas con cada gráfico, entre ellas: ¿Qué tipo de gráficos son presentados? ¿Qué errores presentan los gráficos? y ¿Cómo mejorarías los gráficos?

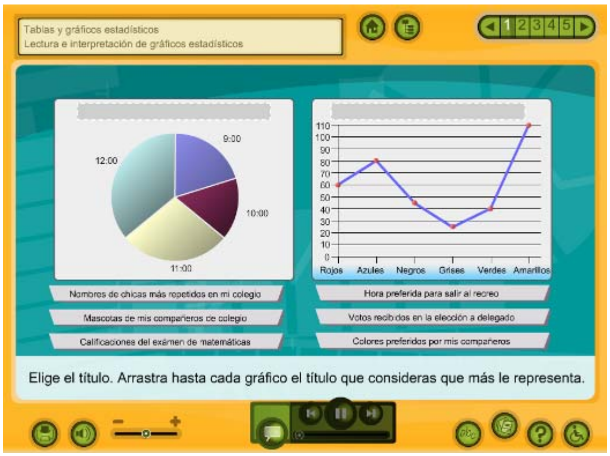


Imagen 3. Interfaz del aplicativo Lectura e interpretación de gráficos estadísticos

4. Evaluación: resultados, conclusiones y reflexiones

4.1. Resultados en relación con el aprendizaje de los estudiantes

A continuación se describen algunos de los resultados más significativos atendiendo a los propósitos de cada una de las actividades. Estos resultados están basados tanto en los reportes escritos de los estudiantes como en la socialización de cada actividad.

- Mediante la discusión dada entre los estudiantes, ellos mismos identifican conceptos estadísticos (Imagen 4) y se reconocen elementos básicos de los gráficos estadísticos tales como título, rótulos, ejes y escalas. Una minoría de estudiantes se apropia de los tipos de variable estadística y del gráfico que mejor la representa, suelen encontrar gran dificultad para identificar y diferenciar las variables cuantitativas discretas y continuas, y suelen asociar los histogramas a variables cualitativas.

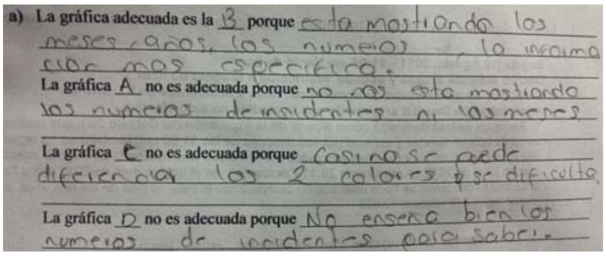

a) La gráfica adecuada es la B porque esta mostrando los meses, años, los numeros lo informacion mas especifico.
La gráfica A no es adecuada porque no nos esta mostrando los numeros de insidentes ni los meses
La gráfica C no es adecuada porque casi no se puede diferenciar los 2 colores y se dificulta
La gráfica D no es adecuada porque No enseña bien los numeros de incidentes para saber.

Imagen 4. Elementos básicos de los gráficos estadísticos

- En relación con los procesos estadísticos, la mayoría de estudiantes lee la información de los gráficos, ya sea observando la forma y los elementos del mismo, o integrando la información del mismo, usando habilidades matemáticas. Para el primer caso los estudiantes realizan la "lectura de los datos" y en el segundo "la lectura entre los datos" (niveles definidos por Curcio (1989) citado por Arteaga et al., 2009), pero se les dificulta la "lectura más allá de los datos", es decir aún no logran realizar predicciones e inferencias sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico o tabla estadística, es decir sobre información implícita. De igual modo la mayoría extrae información de los distintos sistemas de representación: verbal, gráfico y tabular (Imagen 4), traduce información entre los mismos y establece conclusiones de la misma. En cuanto al proceso argumentativo, algunos estudiantes justifican la escogencia de los gráficos más adecuados para representar una información haciendo mención a que la información debía estar completa y en relación con el conjunto de datos. Además los estudiantes dan significado a las distintas situaciones, mediante la discusión y comunicación de opiniones respecto a la información estadística presentada (Imagen 5).

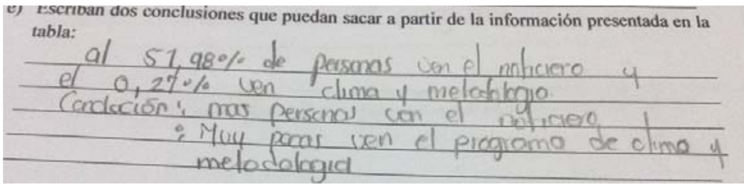

e) Escriban dos conclusiones que puedan sacar a partir de la información presentada en la tabla:
el 51,98% de personas ven el noticiero y el 0,27% ven clima y metrologia.
Conclusión: mas personas ven el noticiero
Muy pocas ven el programa de clima y metodologia

Imagen 4. Algunas conclusiones de la información presentada en la Tabla 1

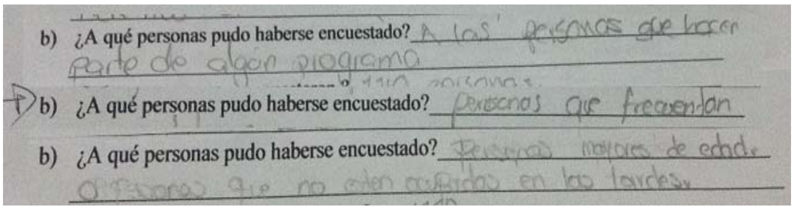

b) ¿A qué personas pudo haberse encuestado? A las personas que hacen parte de algún programa
b) ¿A qué personas pudo haberse encuestado? personas que frecuentan
b) ¿A qué personas pudo haberse encuestado? Personas mayores de edad o personas que no estén ocupadas en las tardes.

Imagen 5. Posible población encuestada según la información presentada en la Tabla 1

- Los estudiantes tienen una actitud crítica frente a la información presentada en el sistema de representación verbal, y la gran mayoría muestra la necesidad y el interés por ser sensibles y precisos en la observación de la información representada en tablas y gráficos estadísticos (aunque no es tan evidente el interés por la búsqueda de información implícita en estos sistemas de representación), son capaces de decidir cómo sería una buena presentación gráfica de la información (acudiendo a la forma, al fondo o a argumentos estadísticos). Sin embargo se nota que no todos reconocen el trabajo en grupo como elemento esencial en la discusión y toma de decisiones frente a las situaciones, pues no son constantes en responder las preguntas de manera conjunta, cosa que cambia en las socializaciones, pues entre ellos mismos se aceptan las correcciones y cambian de opinión según los argumentos de los demás. Los estudiantes reconocen la utilidad de las tablas y gráficos estadísticos en la descripción de situaciones reales y para tomar posturas críticas frente a los sucesos de la vida cotidiana.

- De manera casi inmediata, los estudiantes adoptan una postura crítica frente a la información, cuando esta se refiere directamente a problemáticas sociales (accidentes por el licor, habitantes de la calle, situaciones de la infancia en el mundo) y se ven envueltos en un escenario en el que sus opiniones son escuchadas. Mediante este ambiente de discusión los estudiantes encuentran agrado y hallan sentido al estudio de cuestiones estadísticas como la interpretación de tablas y gráficos estadísticos, pues identifican que se trata de ver más allá de la información que es presentada, adoptar una postura frente a la misma y ser capaces de hallar conclusiones e inferir cuestiones acerca de esta; además asocian la estadística como una herramienta para la vida en sociedad.
- La motivación de los estudiantes se hace evidente frente al uso de herramientas tecnológicas y medios informáticos. El aplicativo les “agiliza la mente” ya que sus respuestas son más inmediatas, identifican rápidamente inconsistencias o errores en las representaciones, y se emocionan por alcanzar los siguientes niveles, lo cual se convierte en un reto para aplicar el conocimiento estadístico.

5. Conclusiones y reflexiones

En cuanto al conocimiento didáctico y conocimiento práctico sobre la enseñanza y aprendizaje de la Estadística, a lo largo de este proceso se pudo ser partícipes de un escenario en el que la Estadística no es una técnica para tratar los datos, por el contrario está inmersa en una serie de discusiones acerca de problemáticas sociales y de la mejor forma de representar la información, generando herramientas para tomar una postura frente a las mismas (tanto las situaciones como las representaciones). Definitivamente, se considera que este es un buen camino para iniciar y continuar el estudio de la Estadística en la escuela, donde los estudiantes son el centro de atención, así como también la discusión y la participación, que a su vez son constantes y mediante las cuales se adopta una postura crítica frente a situaciones sociales cercanas a la realidad (de los estudiantes), incluyendo el uso de la tecnología para fines educativos.

Por lo tanto es posible considerar esta propuesta como una alternativa metodológica para trabajar en aulas de grado octavo (12-15 años) la interpretación de tablas y gráficos estadísticos. Sin embargo debe tenerse en cuenta que la institucionalización mediante esta metodología lleva mucho más tiempo que lo llevaría mediante la metodología tradicional, pues para este caso, en donde la discusión es esencial, no se pueden cortar las intervenciones de los estudiantes aun cuando no se consideren correctas del todo, se debe dejar que se genere un ambiente real de discusión para que las ideas tomen más sentido para ellos mismos y desde la colectividad se construya y ponga en práctica el conocimiento.

La reflexión principal que se hace es acerca de cómo reaccionar si el curso no muestra algún tipo de interés por participar y sus intervenciones no son tan productivas como las que se obtienen en la experiencia de aula aquí plasmada, pues la educación tradicional ha llevado a muchos estudiantes a esperar que el conocimiento sea impartido y él se encargue solamente de la recepción del mismo con un ente pasivo del proceso pedagógico. Aunque no se tiene con certeza la respuesta a esto, sí se considera que es algo en lo que se debe y puede trabajar para llamar la atención de los estudiantes mediante este tipo de actividades que en lo posible cobren sentido en el contexto de los estudiantes.

Igualmente también se hace la invitación a usar la tecnología para fines educativos desde las aulas de clase de Estadística, pues esto constituye una experiencia enriquecedora para las partes del proceso pedagógico y como lo mencionan Malvicini y Severino (citados en Batanero, 2002) ciertos conceptos estadísticos deben tener en cuenta, entre otras cosas, las nuevas tecnologías para la enseñanza, siendo este uno de los retos del profesor de Estadística. En la actualidad la red ofrece infinidad de programas, aplicativos, sitios, blogs, entre otros, que pueden y deberían ser explotados para las finalidades que se requieran (con el cuidado que el uso de estos sitios merece), especialmente educativas, ya que “la educación debe apoyarse en los avances científicos y tecnológicos” (Batanero, 2002).

Finalmente, cabe aclarar que aun cuando los estudiantes se sientan a gusto con las actividades realizadas, debe recalcárseles qué están haciendo, para qué y por qué; es decir debe concientizárseles de que están atendiendo a conocimiento estadístico y que por ende se contribuyendo a su formación como ciudadanos críticos y participativos.

Referencias

Arias, C., Clavijo, M., y Torres, J. (2013). Fomentando el pensamiento crítico desde el aula estadística. Una propuesta de ambientes de aprendizaje. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26*, 289-298.

Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18,* 93-104.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires. Conferencia inaugural.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En: J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. (pp. 55-61). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Estepa, A., y Batanero, M. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las ciencias*, 155-170.

Flores, C., Chi Chablé, A., Canul, E., Cantú, C., y Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 41-57.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular. *Revista EMA*, 7(3), 251–292. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/375/

ICFES. (2014). SABER 3°, 5° y 9° 2013. Cuadernillo de prueba. Matemáticas 9° grado. Bogotá: ICFES. En http://www.icfes.gov.co/examenes/component/docman/doc_view/858-matematicas-9-2013?Itemid=

Lectura e interpretación de gráficos estadísticos (s.f.). Aplicativo de internet disponible en http://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1285583725/contido/ma025_oa06_es/index.html

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos. En *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá, Colombia. Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional República de Colombia [MEN]. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*.

Nortes, A. (1995). *Encuestas y precios.* Madrid: Síntesis S.A.

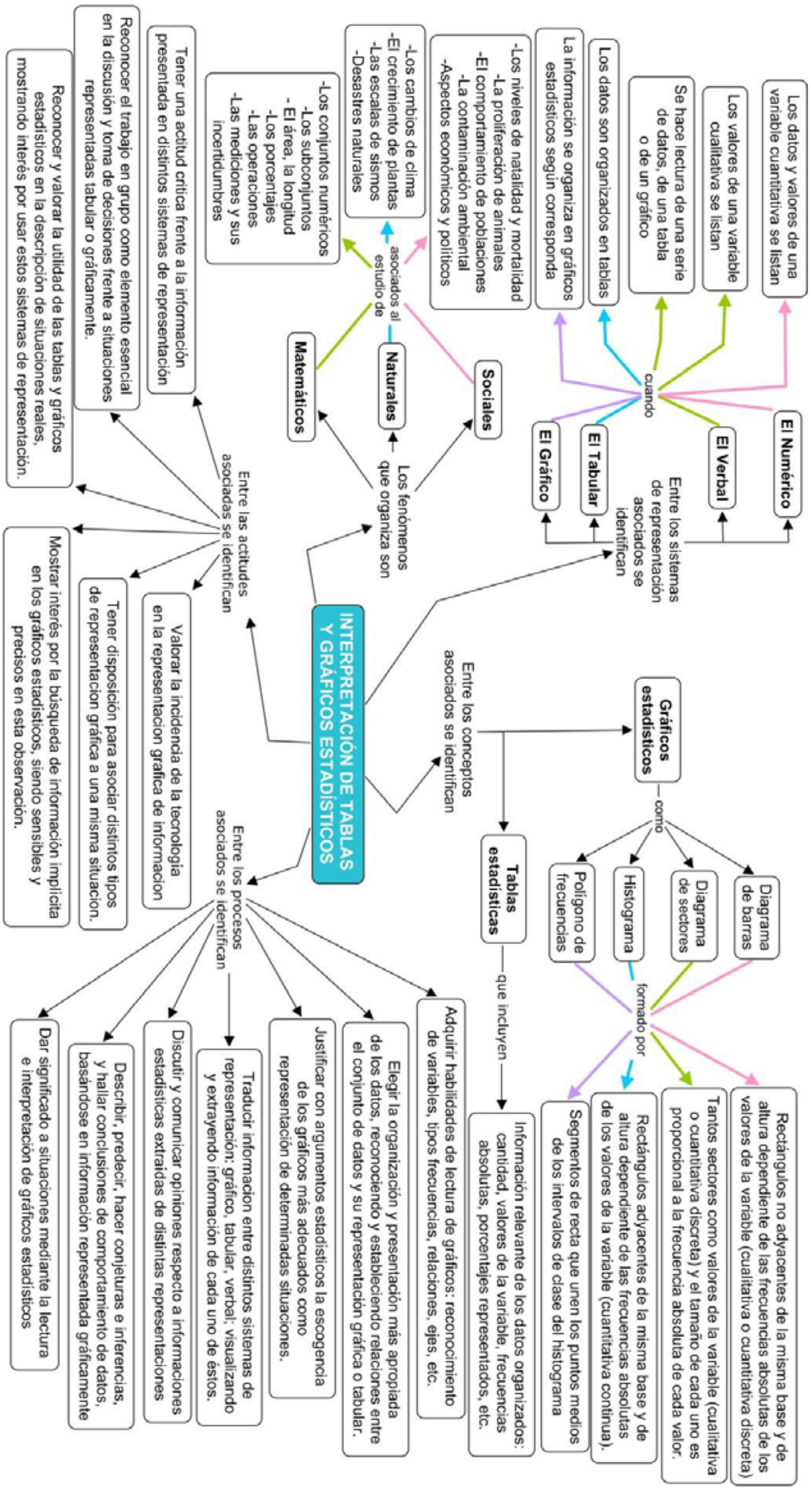
Nortes, A. (1998). Estadística y Probabilidad: Una propuesta didáctica para la enseñanza de la secundaria. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado,* 59-72.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, *6*(1), 3-26.

Tablas y gráficas. (2013). *Notas de clase del curso Estadística 2013-II*. Bogotá: Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Variables y encuestas. (2013). *Notas de clase del curso Estadística 2013-I*. Bogotá: Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Anexo A. Análisis de contenido



Elaboração de livro paradidático no ensino de análise combinatória no ensino fundamental

Ailton Paulo Oliveira Júnior[1], *Antonio Augusto CaldasTeotonio*[2], *Vanderleia ConceiçãoRibeiro*[3], *Camila Aparecida da Cruz Basista*[4] *y Soliane Roberta Barbosa*[5]

[1]drapoj@uol.com.br, *Universidade Federal do Triângulo Mineiro*
[2]aantonio_caldas@hotmail.com, *Universidade Federal do Triângulo Mineiro*
[3]vanderleia_cr@hotmail.com, *Universidade Federal do Triângulo Mineiro*
[4]myllabatista2011@hotmail.com, *Universidade Federal do Triângulo Mineiro*
[5]soliroberta@hotmail.com, *Universidade Federal do Triângulo Mineiro*

Resumo

Consideremos que o livro paradidático visa auxiliar o professor dentro e fora da sala de aula, complementando as informações oferecidas ao aluno, em geral, pelo livro didático. O objetivo deste trabalho é relatar a pesquisa para elaboração de livros Paradidáticos sobre conteúdos da Análise Combinatória para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, com a intenção de contribuir para que o tema esteja mais presente no currículo escolar. O texto paradidático denominado "Jogo das Combinações" pautou-se no desenvolvimento de um trabalho que se adapte aos ritmos de aprendizagem, além de proporcionar uma maior proximidade aluno-professor, marcada a partir da interação e colaboração. Pode-se concluir que a construção deste paradidático é possível graças à sensibilização, envolvimento, querer fazer, apostar numa produção coletiva, por parte dos envolvidos no processo. Constatou-se, também, um aprimoramento da contextualização, inter textualização e desenvolvimento de novas competências e habilidades durante o processo de construção coletiva.

Palavras-chave: ensino de análise combinatória, paradidático, ensino fundamental.

.

1. Introdução

A análise combinatória se constitui ferramenta para diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicações. Além disso, permite a elaboração de situações problemas que podem ser discutidas através da construção de conjecturas e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

Em nosso país, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Brasil (1998) destacam, dentre outras coisas, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que nós, professores, devemos ter ao procurar desenvolvê-lo. Segundo esse documento:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 249-257). Granada, 2015.

probabilidades no Ensino Médio. (Brasil, 1999, p.257).

A análise combinatória vem sendo estudada por alguns autores que evidenciam sua importância enquanto conteúdo escolar e identificam aspectos que podem influenciar no processo de ensino aprendizagem deste conteúdo como as principais estratégias de resolução, os tipos de problemas e os erros mais frequentes.

A Lei de Diretrizes e Bases 9394/96(LDB) em seu artigo 32, inciso I, Brasil (1996), aponta a grande necessidade de trabalhar com leitura, escrita e interpretação de textos na Educação Básica, com o intuito do desenvolvimento da capacidade de aprender, devendo se voltar para a construção de futuros leitores competentes, desenvolvendo um trabalho interdisciplinar, estimulando o aluno a ser sujeito do seu próprio aprendizado.

Os livros paradidáticos são livros que têm características próprias. Diferente dos livros didáticos, eles não seguem uma seriação e nem uma sequência de conteúdos conforme preconiza o currículo oficial. Geralmente, são adotados no processo de ensino e aprendizagem como material de consulta do professor ou como fonte de pesquisa e de apoio às atividades do educando (Munakata, 1997).

Segundo Machado *apud* Trevizan (2008), nos textos paradidáticos os temas costumam ser apresentados de forma menos comprometido com o isolamento e a fragmentação, possibilitando assim a relação com outras áreas de conhecimento.

Segundo Machado (1997),

> Nos textos paradidáticos, os temas costumam ser apresentados de modo menos comprometido com o isolamento e a fragmentação cartesianas, buscando-se construir o significado dos mesmos a partir de suas múltiplas relações com diferentes áreas de conhecimento, transitando-se de modo mais instigante por entre as fronteiras disciplinares (apud Trevizan, 2008, p.4)

Buscando definir os livros paradidáticos, Yasuda e Teixeira (1995), dizem que são consideradas paradidáticas as obras produzidas para o mercado escolar sem as características funcionais e de composição do manual didático.

Segundo Munakata (1997), os livros paradidáticos são livros que, sem apresentar características próprias dos didáticos (seriação, conteúdo segundo um currículo oficial ou não etc.), são adotados no processo de ensino e aprendizagem nas escolas, seja como material de consulta do professor, seja como material de pesquisa e de apoio às atividades do educando.

O que define os livros paradidáticos é o seu uso como material que complementa (ou mesmo substitui) os livros didáticos. Tal complementação (ou substituição) passa a ser considerada como desejável, na medida em que se imagina que os livros didáticos por si sejam insuficientes ou até mesmo nocivos. (Munakata, 1997)

Segundo Dubois (1984 apud Batanero, 1997), os enunciados dos problemas combinatórios simples podem ser classificados em três tipos diferentes: (1) de partição; (2) de colocação; (3) de seleção.

Segundo Roa (2000), os problemas combinatórios simples são definidos tanto por Gáscon (1988) quanto por Navarro-Pelayo (1994) e Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994) como sendo aqueles que podem ser resolvidos mediante a aplicação de apenas uma operação combinatória, com ou sem repetição.

Os problemas de partição propõem dividir grupos em subgrupos, como por exemplo, a proposta feita por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) apud Sturm (1999) que apresentam a situação em dois alunos que tem quatro cartões numerados de 1 a 4 e que decidem reparti-los, onde um dele pode ficar com os cartões com os números 1 e 2 e o outro ficar com os cartões com os números 3 e 4. E as possíveis soluções podem ser, tais como apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Exemplo sobre enunciado de problema classificado como de partição.

Aluno 1	Aluno 2
1 e 2	3 e 4
1 e 3	2 e 4
1 e 4	2 e 3
2 e 3	1 e 4
2 e 4	1 e 3
3 e 4	1 e 2

Enumerando as possibilidades, verifica-se que podem ser repartidos os objetivos de seis formas diferentes. Além disso, pode-se observar que ao distribuir os cartão para o Aluno 1, os restantes ficarão com o Aluno 2. Desta forma, para resolver este problema, basta determinar de quantas formas diferentes pode-se selecionar os cartões para o Aluno 1 porque, automaticamente, também estará sendo identificado os do Aluno 2.

Os problemas de colocação trazem situações nas quais *n* elementos, diferentes ou não, devem ocupar *m* lugares. Ao resolver problemas deste tipo devem-se considerar algumas peculiaridades que influenciarão no resultado final, como, por exemplo, se os elementos são iguais ou diferentes, se os lugares possuem uma ordenação, se os elementos serão colocados nestes lugares de acordo com uma determinada ordem e se existe a possibilidade de algum lugar ficar vazio.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) apud Sturm (1999) considere três cartas iguais, desejando colocá-las em quatro envelopes de cores: amarelo, branco, creme e dourado. Se cada envelope só pode conter, no máximo, uma carta, de quantas formas é possível colocar as três cartas nos quatro envelopes. Desta forma, a Tabela 2 apresenta um exemplo que caracteriza esta situação.

Tabela 2. Exemplo sobre enunciado de problema classificado como de colocação.

Envelope Amarelo	Envelope Branco	Envelope Creme	Envelope Dourado	Possibilidades
Carta (C)	Carta	Carta	Vazio	CCCV
		Vazio	Carta	CCVC
	Vazio	Carta	Carta	CVCC
Vazio (V)	Carta	Carta	Carta	VCCC

Pode-se observar que existem quatro formas diferentes de colocar estas cartas nos envelopes.

No caso dos problemas de seleção, utilizam-se principalmente problemas envolvendo o esquema de seleção devido ao maior grau de complexidade que os outros esquemas envolvem. Estão relacionados à ideia de amostras que podem configurar agrupamentos ordenados ou não ordenados, com repetição ou sem repetição de elementos. Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) apud Sturm (1999), caso se queira eleger um comitê formado por três membros: presidente, tesoureiro e secretário; para selecioná-lo, dispomos de quatro candidatos: Candidato 1, Candidato 2, Candidato 3 e Candidato 4. Desta forma, quantos comitês diferentes se podem eleger com os quatro candidatos?

Os conteúdos de análise combinatória ou problemas de contagem considerados no Conteúdo Básico Comum (CBC) Matemática - do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental do estado de Minas Gerais, Minas Gerais (2008), no Eixo Temático IV – Tratamento da Informação –

Probabilidade – Contagem, e considerados como conteúdos a serem ministrados do 6º ao 9º ano é: resolver problemas simples de contagem utilizando listagens ou o diagrama da árvore.

2. Procedimento Metodológicos

Nesse contexto, consideramos oportuno elaborarmos trabalho que forneça subsídios para a implementação de novas práticas pedagógicas, a partir do estudo e discussão de textos alternativos como os paradidáticos de análise combinatória.

O desenvolvimento desse trabalho será desenvolvido em duas etapas, sendo a primeira caracterizada pela análise e classificação de livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro.

A análise dos paradidáticos será guiada por roteiro, a saber: (1) os conteúdos da análise combinatória e matemáticos e os temas transversais (Brasil, 1998) abordados; (2) as atividades utilizadas na abordagem do conteúdo da análise combinatória; as tendências de ensino da análise combinatória utilizadas pelo autor; (3) a interação entre outras áreas do conhecimento (Fazenda, 1994); (4) a presença de elementos lúdicos (Huizinga, 1971); (5) a diversidade de registros de representações semióticas (Duval, 2011); (6) a oportunidade de participação do leitor na construção do próprio conhecimento; os tipos de ilustrações utilizadas (Dalcin, 2007); (7) a possibilidade de utilização da obra em diversos momentos do estudo de determinado conteúdo – na introdução, no decorrer, na finalização.

A segunda etapa da pesquisa será a elaboração de atividades a serem desenvolvidas a partir dos paradidáticos, ou seja, a produção de material que contemple aspectos relacionados aos conteúdos estatísticos e à leitura, com o intuito de proporcionar aos alunos a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005), ou seja, que processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados; sejam utilizados.

O material será produzido considerando os seguintes aspectos que podem ser realizados concomitantemente: (1) Criar a estória que será o fio condutor das ações a serem desenvolvidas; (2) Criar personagens; (3) Escolher os conteúdos que serão abordados; (4) Desenhar as ilustrações e gravuras; (5) Elaborar o texto.

A terceira etapa será a aplicação deste material nas escolas do subprojeto para identificarmos possíveis problemas e a possibilidade de sua aplicação no dia a dia do ensino do Tratamento da Informação.

3. Publicação de livros paradidáticos em Análise Combinatória no Brasil

Em nossa busca inicial por outros materiais paradidáticos com conteúdos da Análise Combinatória, encontramos o livro de Candido Zampirolo e Scordamaglio (2000). O livro trás o estudo do conceito de arranjo e de permutação como um particular arranjo.

4. Criação do paradidático

Propomos a seguinte atividade para auxiliar no processo de construção do conhecimento dos alunos do 6° ano do Ensino Fundamental adquiridos nas aulas de introdução ao conhecimento de Análise e Combinatória, usando um jogo de combinações, pois de acordo com os Parâmetros Curricular Nacional (PCN), Brasil (1998, p. 47) os jogos podem ser utilizados nas aulas de Matemática com várias finalidades: (1) Compreensão: facilidade para entender o processo do jogo assim como o autocontrole e o respeito a si próprio; (2) Facilidade: possibilidade de construir uma estratégia vencedora; (3) Possibilidade de descrição: capacidade de comunicar o procedimento seguido e da maneira de atuar; (4) Estratégia utilizada: capacidade de comparar com as previsões ou hipóteses.

As finalidades acima descritas são um grande aliado do professor, pois possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta aos ritmos de aprendizagem, além de proporcionar uma maior proximidade aluno-professor, marcada a partir da interação e colaboração. Assim justificamos a atividade, pautando-a na interdisciplinaridade que segue a partir das possíveis combinações.

Desta forma, pensou-se no texto paradidático denominado Jogo das Combinações e iniciou-se a elaborar o texto e os contextos para a elaboração da estória que o fundamenta.

Desta forma, elaborou-se o prólogo do livro paradidático que apresenta os personagens e onde se passará a estória, qual seja:

> Em uma escola situada na cidade de Uberaba- Minas Gerais existia um grupo de amigas, Ana, Maria, Joana, Laura e Roberta, muito unidas que viviam realizando suas atividades em conjunto. Ana era a mais esperta, Maria a mais inteligente, Joana a mais atenta, Laura a mais tímida e Roberta a mais vaidosa. Moravam no mesmo bairro, o que facilitava os seus encontros. Os vizinhos viviam comentando sobre as amigas e caracterizando-as como as meninas superpoderosas, e como elas eram quase que inseparáveis, estavam sempre envolvidas nas atividades do bairro, ajudando inclusive na decoração para a copa do mundo.
>
> Ana que era a mais esperta, sempre organizava os passeios escolhendo os melhores lugares, pois ela tinha um aplicativo no seu *Iphone* que avaliava os lugares como também os mais frequentados. Roberta a mais vaidosa cuidava das dicas de moda, sugerindo o vestuário dela e o das amigas, rolava inúmeras fotos pelo *Whatsapp* onde as dicas eram feitas. Já Maria sofria com as amigas, pois sempre ficava sobrecarregada com os estudos, ela sempre tinha que ajudar as amigas nos seus trabalhos, organizando as datas, as disciplinas e o conteúdo de cada trabalho. Joana a mais atenta, vivia antenada no *Facebook* acompanhando as festas e a possibilidade delas irem. Laura policiava as amigas ponderando suas atitudes.
>
> Sem perceber as amigas organizavam combinações, que é a representação da quantidade de possibilidades de acontecer um agrupamento sem que seja preciso desenvolvê-la.
>
> Contaremos a seguir algumas histórias das amigas que utilizaram análise combinatória sem perceber.

Na sequência foi elaborado o primeiro capítulo que insere os personagens no contexto de uma festa de aniversário e a escolha do local de sua comemoração a partir de sugestões dos personagens. Nesta escolha foram introduzidos conceitos básicos de combinação para determinar as opções de escolha do local de onde seria comemorado.

> Era perto do aniversário de Maria, e as amigas planejavam uma festa surpresa. Maria preocupada com a prova de Matemática que teria na segunda após o seu aniversário disse às amigas que não faria comemoração alguma, pois estaria estudando. Porém Joana, não concordou com a amiga e disse as outras que a comemoração não poderia passar em branco, era necessário sair e festejar.
>
> Joana ligou pra Ana, e em longa conversa disse a amiga para procurar um bom lugar para elas irem. Ana mais que depressa, pegou seu *Iphone* e começou a ver os lugares mais

> indicados, tinha em mente uma pizzaria; Ou também show do Luan Santana que aconteceria na sexta, mais essa hipótese precisa de um pai acompanhar; Como também estava na época da exposição, pensaram em ir à ABCZ no parque de diversão, ou irem ao shopping, para passear, comemorar e terminar a noite na praça de alimentação.
>
> Como as cinco amigas sempre andavam juntas tiveram que pensar num meio de se reunirem sem que a Maria soubesse. Aproveitaram o trabalho que elas tinham que fazer de ciências, pois Maria havia chamado todas no grupo do *whatsapp* para se encontrarem em sua casa às 15 h. Ana marcou uma reunião secreta no mesmo dia uma hora antes na sua casa com Joana, Laura e Roberta, para escolher onde comemorariam o aniversário de Maria. Pois sabia que Maria estaria preparando um lanchinho para a reunião.
>
> Chegando à casa de Ana, começou uma grande discussão para acetarem o lugar, cada uma tinha uma opinião divergente de onde seria melhor. Laura disse:
>
> - O show ficará muito caro! Além do meu pai não querer deixar, pois será muito perigoso. E teríamos que pedir aos pais de Maria! E acrescentou: que não gostaria de ir ao parque de exposição por que teria uma “muvuca” de gente, e os ingressos do parque nessa época triplicam o preço.
>
> Roberta concordou em partes com Laura:
>
> - Nossa mesada esse mês já está acabando, e com pouco dinheiro iremos a poucos brinquedos, e não vamos nos divertir, pois ainda temos que comer. Temos o shopping, porém estará vazio devido às comemorações da festa de exposição. Quero que tenha muitos gatinhos!
>
> Joana antenada com os *points* e comemorações dos amigos pelo *Facebook* disse:
>
> - Girls o que está “bombando” no momento é o show do Luan Santana! Porém ficaria difícil devido ao horário e sermos todos menores de idade. Por mais que esteja caro, lá na exposição vai ter muita gente e uma variedade de coisas para fazermos. Podemos ir, em alguns brinquedos, e depois comermos alguma coisa.
>
> Ana sugeriu:
>
> - Vamos fazer um quadro em que vamos sugerir nossa primeira opção e a segunda. Assim avaliaremos onde devemos ir.
>
> Todas concordaram.

Apresentamos a seguir o quadro em que se apresentam as opções dadas pelos personagens, Tabela 3.

Tabela 3. Combinações possíveis das opções de realização do aniversário a partir da opinião dos personagens.

	1ª opção	2ª opção
Ana	Exposição	Shopping
Laura	Pizzaria	Shopping
Joana	Exposição	Show
Roberta	Show	Pizzaria

O segundo capítulo insere os personagens na preparação na preparação de decoração da rua para a Copa do Mundo de Futebol. Aqui foram introduzidos conceitos de combinação mais elaborados para determinar as opções de escolha do local de onde seria comemorado.

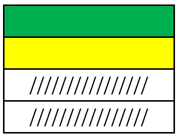
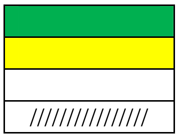
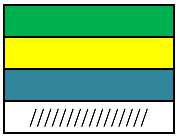
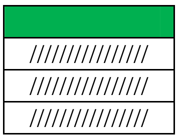
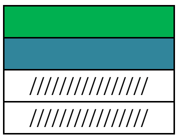
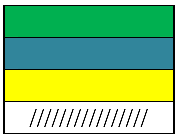
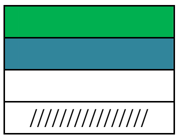
> Em meados de maio toda a vizinhança estava empolgada com a copa que aconteceria no mês seguinte. Pensavam em uma maneira de decorar a rua, pintar o meio-fio a fim de terem uma rua bem bonita para a copa com as cores da bandeira do Brasil.

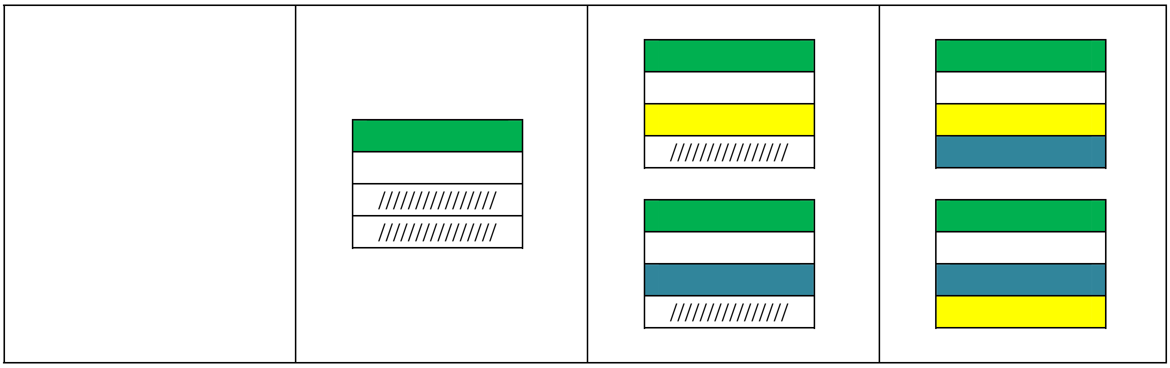
> Assim chamaram Maria para fazer a decoração de como poderia ficar a rua. Ela começou pensando na pintura do meio-fio. Sabendo que a bandeira do Brasil tem quatro cores (verde, amarelo, azul e branco) e ela queria usar as quatro cores na pintura do meio-fio, Maria tinha várias possibilidades de sequências de cores. Joana disse que seria bom iniciar a sequência com a cor verde. Para registrar as possibilidades, Maria construiu à parte uma árvore de possibilidades que mostra o desenho das faixas de primeira cor verde.

A Tabela 4 apresenta a árvore de possibilidades da combinação de cores que poderiam ser utilizadas na decoração do meio-fio da rua. O diagrama mostra que há 6 possibilidades em ter uma faixa superior verde, mas há outras maneiras de Maria chegar a esse número, ou seja: (1) São 3 possibilidades para a segunda faixa e, para cada uma delas, há 2 possibilidades na terceira faixa; portanto, são 3 x 2 possibilidades, o que dá 6; (2) Para cada uma dessas 6 possibilidades, há somente uma possibilidade para a quarta faixa: 6 x 1 = 6.

Nesse caso, fizemos um raciocínio multiplicativo. Sabendo que há 6 possíveis faixas começando com o verde, qual é o total de possíveis combinações utilizando as quatro cores? Responda com o mesmo raciocínio multiplicativo.

Tabela 4. Árvore de possibilidades da combinação de cores que poderiam ser utilizadas na decoração do meio-fio da rua

Faixa 1	Faixa 2	Faixa 3	Faixa 4
Verde	3 possibilidades	2 possibilidades	1possibilidade
		 	 
		 	 



5. Conclusão

A produção de material paradidático demanda tempo e dedicação. Ela envolve, como no caso, busca de referencial diverso que permita o embasamento teórico adequado.

Desta forma, podemos concluir que, embora a realização da produção do material seja muito trabalhosa e demande muito tempo, o exercício realizado pelo aluno pode vir a ser um diferencial em sua formação.

Sugerimos que professores do ensino fundamental e médio desenvolvam esse tipo de material como resultado de projetos realizados na escola.

Referências

Batanero, C., Godino, J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, M. C., Godino, J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria**.** *Educación Matemática, 8*(1), 26-39.

Brasil. (1996). Ministério da Educação e Cultura. Lei n. 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996. *Diretrizes e Bases da Educação*. LDB.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Candido, S. L., Zampirolo, M. J. C. V., & Scordamaglio, M. T. (2000). *Arranjando e permutando.* Coleção: Projeto Escola e Cidadania. 1 ed. Salvador: Editora do Brasil.

D'Antonio, S. R. (2006). *Linguagem e matemática: uma relação conflituosa no processo de ensino?* Dissertação em Educação Matemática. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná.

Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples, *Educational Studies in Mathematics*, 11, 37-57.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma*. São Paulo: PROEM.

Fazenda, I. C. A. (1994). *Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa*. Campinas: Papirus.

Fernandes, J. A., & Correia, P. F. (2007). Estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. *Revista Galego-portuguesa de Psicologia e Educación* 1256-1267.

Gascón, J. (1988). El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de Matemáticas. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Huizinga, J. (1971). *Homo ludens:* o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva.

Martinho, M. H. (2007). *Comunicação na sala de aula de Matemática*: um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico. Tese de Doutorado. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Menezes, L. (1999). Matemática, linguagem e comunicação. In *Conferência: Matemática, Linguagem e Comunicação*. ProfMat 99. Portimão.

Munakata, K. (1997). *Produzindo livros didáticos e paradidáticos*. Tese de Doutorado em História e Filosofia da Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Nacarato, A. M., & Lopes, C. E. (2005). *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatório em estudiantes com preparación matemática avanzada.* Tese de Doutorado. Universidade de Granada, Granada, Espanha.

Roa, R., & Navarro-Pelayo, V. (2001). Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Actas de las Jornadas europeas de estadística*, Mallorca: Instituto Balear de Estadística,

Santos, V. M. (2009). Linguagem e comunicação na aula de matemática. In C. A. E. Lopes, & A. M. Nacarato [Org] *Escritas e leituras na Educação Matemática*. (pp.117-125). Belo Horizonte: Autêntica

Sturm, W. (1999). *As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa*. Dissertação de Mestrado Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo.

Trevizan, W. A. (2008). *O uso do livro paradidático no ensino de matemática*. Em <www.usp.br/siicusp/Resumos/16Siicusp/807.pdf>.

Yasuda, A. M. B. G., & Teixeira, M. J. C. (1995). A circulação do paradidático no cotidiano escolar. In Brandão, H; Micheletti, G. *Aprender a ensinar com livros didáticos e paradidáticos*. São Paulo: Cortez.

Enseñanza de las medidas de centralización a partir de situaciones humorísticas

Mónica Guitart Coria[1], *Antonio Moreno Verdejo*[2], *Pablo Flores Martínez*[3] *y Camilo García Guridi*[4]

[1]mguitart@fing.uncu.edu.ar, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina

[2]amoreno@ugr.edu.es, Universidad de Granada, España

[3]pflores@ugr.edu.es, Universidad de Granada, España

[4]camgargur@gmail.com, Instituto de Educación Secundaria Itálica, Sevilla

Resumen

La enseñanza actual de la estadística aboga por que los alumnos desarrollen su sentido estocástico. Para lograr que las medidas de centralización adquieran un significado funcional se requieren tareas de enseñanza que le den sentido. Las viñetas de los medios de comunicación que citan términos estadísticos, muestran el uso social que se les asigna, o la imagen que tienen los humoristas sobre el papel que desempeña la estadística en la sociedad. Apoyándonos en estudios que muestran el papel didáctico del humor en la enseñanza de la estadística, presentamos una tarea para profundizar en el significado de las medidas de centralización, basada en interpretar situaciones humorísticas.

Palabras clave: Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística, Humor como recurso didáctico.

1. Introducción

Las medidas de centralización, especialmente la media aritmética, son contenidos estadísticos corrientemente enseñados desde los primeros cursos de estadística descriptiva. La media alcanza un uso muy amplio, identificándose como medida representativa de muchas situaciones, sean estas distribuciones normales o no, y siendo las variables tanto continuas como discretas. Sin embargo, emplear correctamente estas medidas no es tan sencillo, y en muchos casos su conocimiento se reduce a conocer fórmulas para calcularlas, sin llegar a interpretarlas correctamente. Este uso tan general hace que con facilidad aparezcan en chistes. En esta comunicación presentamos una muestra del trabajo que estamos llevando a cabo empleando el humor como recurso didáctico en la enseñanza de la estadística, aprovechando situaciones humorísticas que reflejan usos de las medidas de centralización, para crear tareas de enseñanza que lleven a los estudiantes a profundizar en su significado.

La estadística es una herramienta tan frecuente y poderosa, que los humoristas la reflejan en sus chistes, tanto para ridiculizar el empleo perverso que se realiza a veces, como para resolver situaciones en que las emplea la sociedad. En trabajos anteriores hemos recogido historietas que aluden a la estadística (Guitart y Flores 2002, 2008 y 2013), o a otras partes de las matemáticas, mostrando el papel que le hacen desempeñar los humoristas (Flores y Moreno, 2011). Siguiendo esta línea de trabajo, en esta comunicación promovemos emplear situaciones humorísticas aparecidas en los medios de comunicación para desarrollar el sentido estocástico en los alumnos, especialmente en el aprendizaje de las medidas de centralización.

En primer lugar desarrollamos el marco teórico, que se apoya en tres pilares, la enseñanza funcional de la estadística, para desarrollar el sentido estadístico y sentido estocástico, la problemática que genera la enseñanza y aprendizaje de las medidas de centralización, y el papel del humor en la enseñanza. A continuación mostramos algunas características de cómo el humor refleja el papel de las medidas de centralización, para dar paso al análisis de una viñeta sobre las medidas de centralización, que examinamos con mayor atención, antes de convertirla en centro de reflexión para una tarea de enseñanza de la estadística, especialmente en la enseñanza superior. Terminamos con algunas conclusiones de la reflexión realizada.

2. Marco teórico

Para proponer tareas de enseñanza de la estadística, tenemos que comenzar por examinar qué objetivos de aprendizaje se proponen con la enseñanza de la estadística. Es por ello que comenzamos describiendo el “sentido estadístico” y el “sentido estocástico”. A continuación estudiamos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las medidas de centralización, contenido estadístico sobre el que elaboramos la propuesta de actuación. Por último, presentamos algunos aportes que muestran qué papel puede jugar el humor en la enseñanza de la estadística.

2.1. Sentido estadístico, sentido estocástico

Batanero (2013) señala que aunque la estadística es una herramienta fundamental en la sociedad actual, muchos estudiantes no llegan a comprender o a aplicar conceptos y procedimientos estadísticos, por no dar sentido a la estadística. Para lograr esto se habla de que los alumnos aprendan la estadística con sentido. Batanero (2013), basándose en la idea de sentido matemático, en el que identifica conocimiento (o cultura) y razonamiento, definen el sentido estadístico como la unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico. La cultura estadística se compone del conocimiento específico de las ideas estadísticas fundamentales, entendidas como herramientas de modelización estadística, más que como conocimiento erudito. La intención funcional tiene que ir acompañada de un saber hacer, manifestado por el razonamiento estadístico, que es el que permite tomar decisiones adecuadas o efectuar predicciones a partir de datos y en presencia de incertidumbre.

Ruiz y Serrano (2015), incluyen el sentido estadístico dentro de una idea más general, el “sentido estocástico”, que identifican como el sentido matemático usado en situaciones no deterministas, a fin de obtener unas conclusiones coherentes. Tener sentido estocástico supone combinar conocimiento estadístico para recoger y organizar datos (sentido estadístico, según Batanero, 2013) y conocimiento probabilístico para inferir conclusiones. A partir de ellos se ponen en marcha unos razonamientos específicos, el razonamiento estadístico y el razonamiento probabilístico, lo que depende en gran medida de la comprensión de los hechos y conceptos probabilísticos y estadísticos, así como del conocimiento didáctico que el profesor tenga para su enseñanza (Ruiz y Serrano, 2015).

Para lograr desarrollar sentido estocástico, la enseñanza de la estadística debe hacer que los alumnos identifiquen situaciones aleatorias, en las cuales se formulen problemas con significado y muestre la importancia de recurrir a las etapas previstas en el razonamiento estadístico, con vistas a obtener conclusiones que permitan aportar soluciones al problema. Si bien el proceso estocástico completo abarcaría el estudio estadístico descriptivo y el inferencial (usando el razonamiento probabilístico), el sentido estadístico tiene mayor significación si realiza su parte del estudio del problema, teniendo como referente la situación aleatoria que afecta al problema.

2.2. Enseñanza y aprendizaje de las medidas de centralización

La enseñanza de las medidas de centralización debe colaborar a desarrollar el sentido estocástico, es decir, generar aprendizajes útiles para el desempeño posterior de los alumnos. Para ello debe ser capaz de desarrollar en los alumnos la habilidad para interpretar, evaluar críticamente, y expresar las opiniones propias acerca de la información estadística y mensajes fundamentados en datos. Gal (2003) complementa la definición mostrando que la competencia estadística también envuelve la habilidad para acceder, definir, localizar, extraer y filtrar la información necesaria de un complejo conjunto de productos de información.

Las medidas de centralización tienen un papel importante en la fase de sistematización y organización de datos, para resumirlos a uno solo con el cual poder razonar. Además, como indica Gal (2002), la comprensión de las ideas de promedio forma parte de la cultura estadística básica. Watson y Moritz (2000) analizan el significado intuitivo dado por los estudiantes al término promedio y hallan que para un gran número de ellos el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución (una idea próxima al concepto de mediana). Pocas veces relacionan la palabra promedio con la moda y menos aún con la media aritmética. En entrevistas realizadas por Watson y Moritz (2000), encuentran definiciones de promedio como “Significa igual”, “que es normal”, “no eres realmente bueno, pero tampoco malo”.

En estas investigaciones se muestra que es importante el contexto en que aparecen los términos asociados a los promedios. Por un lado se utiliza en un sentido descriptivo, tal como “la familia media”, que implica medida sin aportar una descripción explícita de cómo se ha calculado. Por otro lado, se usa en deportes, ciencia, economía y otros campos con unas expectativas precisas de la definición que ha sido utilizada.

Cobo (2004) profundiza en los significados de las medidas de posición para los alumnos de secundaria. Asociados a la media distingue los siguientes significados y propiedades: Valor medio como operación - Obtención de un conjunto numérico que produzca un valor promedio - Cálculo de medias ponderadas - La suma de las desviaciones a la media - Obtener una distribución para una media dada.

Los resultados obtenidos permiten afirmar que resulta complejo comprender que la media puede dar lugar a un dato que no esté en el conjunto de resultados, por lo que su valor puede no tener sentido en el contexto dato (e.g. número medio de hijos). Será necesaria la interpretación de la media como una operación (reparto equitativo) más que como el resultado de dicha operación, lo que exige un alto nivel de razonamiento numérico para estudiantes de secundaria.

2.3. Interés del humor para la enseñanza de la estadística

Desde hace tiempo estamos estudiando y reconociendo al humor como un recurso didáctico (Flores, 2003, Guitart y Flores, 2002 y 2008, Guitart, 2012). Para examinar las cualidades didácticas del humor comenzamos por estudiar qué es el humor. Martin (2008), sintetiza en tres grandes teorías el estudio de en qué consiste el humor y qué situaciones lo despiertan. La teoría de Superioridad/Denigración indica que la respuesta de humor surge de los defectos, errores y fallos propios o ajenos. La teoría de la Incongruencia considera que el humor se produce por la asociación inesperada de situaciones que no aparecen habitualmente unidas, pero que pueden asociarse en algún sentido. El humor como Alivio/Tensión en situaciones emocionales concretas, responde a la ruptura de situaciones de ansiedad, tal como refiere Freud (1994).

En las situaciones de comunicación didáctica que ocurren en la enseñanza, parece obvio evitar situaciones de superioridad como recurso didáctico, pues interesan aquellas que generen una comunicación fluida en clase, además de promover rupturas cognitivas que faciliten el aprendizaje. Es por ello que afrontamos el humor asociado principalmente a la teoría de la incongruencia, sin desechar plantear la teoría del alivio/tensión. Según la primera teoría, la situación que genera humor arranca de una situación familiar, que genera expectativas en el receptor sobre algún aspecto de la misma, para presentar al final una salida inesperada que le cause sorpresa, pero que tenga cierta relación con la situación de partida.

Como toda actividad humana, la estadística aparece en el humor por diversas razones. El humorista la necesita a veces para interpretar o resolver situaciones. También aparece para reflejar la imagen social que tiene la sociedad sobre el papel de la estadística. El humor responde a las necesidades sociales, pero a la vez refleja valores sociales (Romero, 2010). Tal como hemos mostrado (Flores y Moreno, 2011), los chistes que emplean matemáticas, manifiestan los significados que la sociedad adjudica a los conceptos matemáticos. Estudiando el humor matemático que se difunde socialmente, el profesor puede ver cómo son percibidas las matemáticas por la sociedad, y por tanto por la comunidad educativa, es decir, los padres y los alumnos (Flores, 2003, Flores y Moreno, 2011).

Emplear el humor como recurso didáctico tiene ya tradición pedagógica. Los trabajos más significativos se ubican en la enseñanza de la estadística, con las investigaciones de Ziv en Israel. Ziv (1988) prueba en su experimentación que los alumnos que asisten a clases en las que se utiliza un humor relevante obtienen mejores calificaciones que aquellos que estudian la misma materia, con el mismo profesor, pero sin hacer uso del humor. El humor, sostiene, puede aumentar significativamente la memoria, pero debe ser usado con cautela, advirtiendo que el sarcasmo puede tener un efecto negativo. También en la enseñanza de la estadística, Guitart (2012), ha llevado a cabo una investigación empírica, en la formación de ingenieros. En sus conclusiones aprecia que los alumnos del curso tratado con ciertas situaciones humorísticas obtienen mejores resultados académicos en pruebas de rendimiento. También examina el papel que estos alumnos otorgan al humor, para lo que realiza cuestionarios a posteriori.

En trabajos anteriores (Guitart y Flores, 2002), planteamos situaciones relacionadas con el azar, y la estadística (Guitart y Flores, 2013). En nuestra propuesta, el profesor tiene que comenzar analizando el proceso humorístico que propone la historieta y los sentidos que emplea del concepto, para explotarlos en clase, haciendo que los alumnos relacionen de manera distendida y con significado las concepciones cotidianas de esos conceptos, con las ideas estadísticas. De estas experiencias hemos extraído ideas para realizar propuestas didácticas con el fin de profundizar en el significado de las medidas de centralización. Examinar cómo se produce el humor en las situaciones humorísticas seleccionadas y analizar de qué forma se reflejan los conceptos en el argumento humorístico, son previos a proponer tareas de enseñanza con humor.

3. Medidas de centralización en el humor

Son muy frecuentes las situaciones humorísticas planteadas a partir de la estadística. Los razonamientos estadísticos se han convertido en un lugar común para justificar situaciones sociales, describir en qué consisten las crisis, justificar la falta de predicción de cataclismos, hacer predicciones climatológicas, etc. También podemos encontrar chistes sobre las medidas estadísticas, especialmente realizadas extremando los razonamientos abductivos que se emplean en el tratamiento de fenómenos no deterministas. Muchas de estas situaciones reflejan una interpretación abusiva de los conceptos. Otras muestran el empleo perverso que se hace de la estadística para realizar las justificaciones señaladas. Otras plantean situaciones interesantes, que reflejan modos de pensar, expresados de manera lúdica y bien construida. La historieta de Sendra, humorista argentino, de la figura 1, es un ejemplo:

Figura 1: Sendra, lugar en las estadísticas

En otros casos, la estadística está empleada para reflejar la evolución vital de una persona a lo largo de su vida ciudadana (sin ánimo de generalizar, pero reflejando una evolución con la que mucha gente podría identificarse). El lugar del sujeto en los estudios estadísticos le sirve para hacer una crítica política, con un tono de desencanto.

Figura 2: Thyne, media límite de lo deseable

La media aritmética, como medida empleada de manera generalizada para resumir los datos, ha dado lugar a numerosas historietas humorísticas. Thyne, en la figura 2, presenta un deseo demagógico, que por desgracia parece dominar muchas decisiones, en las que el valor medio se convierte en la referencia de lo aceptable. Este chiste plantea una situación imposible, según las propiedades de la media.

En las figuras siguientes se explota el clásico chiste que dice que “un estadístico es alguien que si mete la cabeza en el horno y los pies en el frigorífico, tiene una temperatura adecuada”. La media como compensación genera situaciones de desigualdad. Lo que los humoristas destacan es el efecto perverso de esta compensación.

Figura 3: Santy Gutiérrez

Figura 4: El Roto

Figura 5: Vergara

No es frecuente que aparezcan otras medidas de centralización en los chistes. Sin embargo, Sendra creó hace tiempo una historieta en la que alude a diversos indicadores sociológicos, que nos han inspirado para reflexionar sobre el significado de las medidas de centralización. Nuestra propuesta es emplear la historieta de la figura 6, de Sendra, para plantear una tarea de enseñanza de las medidas de centralización en la enseñanza superior (las matemáticas de ciencias sociales de bachillerato, o la estadística en estudios humanísticos, en la universidad), para que los alumnos desarrollen su sentido estocástico.

Figura 6: Sendra, centralización sociológica, indicación de felicidad social.

Tras estudiar qué significan los términos sociológicos, describir el argumento expuesto por el personaje de Sendra y estudiar su verosimilitud, mostraremos las diversas componentes del sentido estocástico, tal como lo caracterizan Ruiz y Serrano (2015).

No resulta sencillo definir con claridad e identificar el significado de los términos sociológicos utilizados por el humorista, pero justamente esto es lo que enriquece la tarea y nos permite hacer preguntas que exijan un conocimiento de las medidas de centralización:

Clase media, es una expresión que nos conduce a estudiar la forma de estratificación social en la que se dividen las sociedades, pero nos encontramos con diversidad de posturas y divisiones. La clase media ha estado constituida por los grupos sociales intermedios entre los ricos y los pobres. ¿Qué indica el personaje al ubicarse en una clase media? ¿Nos plantea una situación social promedio, en términos de media aritmética?

Familia tipo, nos encontramos con otra expresión muy usada pero no claramente definida. En Argentina se considera familia tipo a la compuesta por los padres y dos hijos, aunque en algunos estudios económicos los resultados (por ejemplo, indicadores económicos) dados para una familia tipo se basan en un matrimonio de mediana edad y dos hijos menores. Y nos podemos preguntar, ¿se la llama así porque la cantidad de hijos es una media de centralización?, en caso de serlo, ¿cuál nos llevaría a estos valores?

Cultura estándar, según la Real Academia Española, se define *cultura*, como el *conjunto de conocimientos que permite a alguien desarrollar su juicio crítico* y se indica al adjetivo *estándar* para caracterizar a aquello *que sirve como tipo, modelo, norma, patrón o referencia.* Al referirse a una cultura estándar y leyendo las definiciones del diccionario podemos plantearnos si se hace referencia a una cultura "media".

A partir de esta viñeta podemos realizar un análisis del sentido estocástico, identificando sus características:

Identificar la situación aleatoria y en qué grado se da. La situación planteada no está relacionada con juegos de azar, los indicadores sociológicos (clase media, familia tipo, cultura estándar), surgen de problemas sociales que afectan a una generalidad de sujetos, no son predecibles, es decir, apreciamos que se emplean las características de un fenómeno no determinista, que es a quien se aplica el sentido estocástico.

Cuantificación del grado de incertidumbre en situaciones aleatorias. En este caso se trataría de determinar con qué frecuencia aparecen las situaciones que se expresan: qué proporción de sujetos están en la clase media, cuántas familias tipo hay, cuántos sujetos tienen una cultura estándar. Ello obliga a identificar la población en la que se plantea la situación humorística, y analizar la pertinencia de la conclusión extraída.

Búsqueda y obtención de datos. La determinación de estos indicadores en un grupo social debe hacerse a partir de una búsqueda de datos, identificar cuáles son estos datos, cómo se obtienen etc., es una forma de profundizar en cómo se lleva a cabo esta tarea, siempre pensando en resolver los problemas planteados en el epígrafe anterior. Pero una vez establecidos, se puede completar mediante un registro de datos en el grupo social en que se encuentra el sujeto (el personaje o el lector/alumno), a partir de fuentes de estadísticas oficiales.

Resumen estadístico de la información. El foco de atención de la tarea de enseñanza son las herramientas para realizar este estudio. La realización del análisis anterior permitirá identificar cuáles medidas de centralización se están empleando, y examinar en qué grado corresponden a centralización real, proporcional, o mediana, sin contar la existencia de los demás datos. Discutir sobre cuál se aplica a cada una de las medidas favorece profundizar en el papel que desempeñan las medidas de centralización. Es de imaginar que fenómenos que se presenten una y otra vez conduzcan a la idea de media. A su vez esta idea de situaciones que se repiten concienciará en la excepcionalidad. Una observación que está en la cola de una gráfica de una distribución estadística puede considerarse fuera de lo común.

Realizar inferencias. Por lo anterior podemos concretar si lo que ha realizado el personaje es una inferencia, y si esta inferencia está fundada. Si el sujeto infiere de sus datos personales su ubicación en cada uno de las medidas expresadas (¿Cómo se ubica en familia tipo, clase media y cultura estándar? ¿Son todas estas ubicaciones igualmente arbitrarias o precisas?), y además, el argumento general, si estoy en los datos admisibles, por aquello de que "la normalidad hace feliz", "ser feliz es estar en la normalidad", "en el punto medio está la virtud", "los extremos estadísticos son problemáticos", etc., qué puede significar "ser estadísticamente feliz".

4. Reflexiones finales

La estadística está presente en nuestras vidas y es fundamental en la sociedad. Pero los estudiantes no siempre logran darle sentido a la estadística debido a que no llegan a la comprensión de los conceptos y procedimientos estadísticos.

El lenguaje incorpora frecuentemente vocablos asociados a ideas estadísticas, como las que observamos en las viñetas, incorporando términos asociados a los conceptos de medidas de tendencia central, como: habitual, acostumbrado, típico, mismo, regular, mayoría, clásico, estereotipo, esperado, normal, corriente, convencional,… La dificultad está evitar la subjetividad de estos términos, asociándolos con medidas precisas, que los modelizan. En este sentido, nuestra línea de trabajo basada en el humor, lleva a examinar situaciones cotidianas, pero mirándolos desde varias perspectivas, relacionando la estadística ciencia con su uso social.

Dado que los humoristas reflejan en sus chistes aquellos aspectos que impactan a la sociedad, encontrar en ellos la estadística supone aceptar que su uso es cercano y necesario al público, aunque en muchos casos el humor saca a la luz los abusos escondidos tras las medidas de centralización. Esto nos lleva a reflexionar sobre una educación estadística donde lo aprendido sea útil para el ciudadano, tanto para dar sentido a la educación, como para formar en valores.

Referencias

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: componentes y desarrollo. En Contreras, J.M., Cañadas, G. R., Gea, M.M. y Arteaga, P. (Eds.) *Actas de las 1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, (pp. 55-62). Granada. Bajadas de http://www.estadis.net/grupo

Cobo, B. (2004). Razonamiento numérico en problemas de promedios. SUMA, Nº 45, pp 79-86.

Flores, P. (1997). La utilización del humor para facilitar la comunicación entre educadores matemáticos. *Educación Matemática, 9 (3)*, 52-62.

Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Granada: Arial.

Flores, P. y Moreno, A. (2011). *Matemáticamente competente para reír*. Barcelona, Graó.

Freud, S. (1994). *El chiste y su relación con el inconsciente*. Madrid: Alianza. (Original 1905).

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review* 70(1), 1-25.

Gal, I. (2003). Expanding conceptions of statistical literacy: an analysis of products from statistics agencies. *Statistics Education Research Journal* v. 2, n.1, 3-21.

Guitart, M.B. (2012). *Permitido reír... Estamos en clase. El humor como recurso metodológico en el aula de Estadística.* Tesis doctoral. Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina, 5 diciembre 2012.

Guitart, M.B. y Flores, P. (2002). Humor gráfico para la enseñanza y el aprendizaje del azar. *SUMA* 42, 81-90.

Guitart, M.B. y Flores, P. (2008). Permitido reír... Estamos en clase. Comunicación en *20th International ISHS Humor Conference*. Alcalá de Henares, Julio 7-11 de 2008.

Guitart, M.B. y Flores, P. (2013). El humor en el aula de estadística. En Contreras, J.M., Cañadas, G. R., Gea, M.M. y Arteaga, P. (Eds.) *Actas de las 1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, (pp. 237-241). Granada.

Martin, R. (2008). *La Psicología del Humor*. Madrid, Orión.

Romero, A. (2010). *El humor en la sociología postmoderna*. Madrid, Fundamentos.

Ruiz, J.F. y Serrano, L. (2015). Sentido estocástico. En Flores, P. y Rico, L. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 179-185). Madrid, Pirámide. ISBN: 978-84-368-3292-1.

Watson, J. M., Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning*. 2(1 y 2), 11-50.

Ziv, A. (1988). Teaching and Learning With Humor: Experiment and Replication. *Journal of Experimental Education*, 57 (1), 5-15.

Estudio exploratorio sobre el razonamiento inferencial informal de profesoras en formación

José Antonio Orta Amaro[1], *José Antonio Altamirano Abad*[2], *Víctor Nozair García Ríos*[3] *y*

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez[4]

[1]*jaortaa@gmail.com, Escuela Nacional para Maestras de Jardines de Niños*
[2]*altabad@live.com.mx, Escuela Nacional para maestras de Jardines de Niños*
[3]*nozairg@hotmail.com, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN*
[4]*esanchez0155@gmail.com, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN*

Resumen

El objetivo de esta investigación es explorar el razonamiento inferencial informal (RII) de profesoras de jardines de niños en formación al resolver un problema de comparaciones de conjuntos de datos. Se plantea la pregunta ¿en qué medida las estudiantes dependen de sus conocimientos previos de estadística y qué tanto dependen de sus conocimientos cotidianos o experiencia? Para analizar las respuestas de las estudiantes se utilizó la teoría fundamentada y el marco de Zieffler y colaboradores (2008). Los resultados muestran la ausencia del uso de conceptos estadísticos para hacer comparaciones y tomar una decisión con base en ellos. Por lo que es necesario plantear acciones pertinentes a realizar en el aula con el fin de equilibrar los conocimientos, estadísticos y cotidianos, de las futuras profesoras.

Palabras clave: Razonamiento inferencial informal, profesoras en formación.

.

1. Introducción

Hoy en día las personas se ven en la necesidad de saber interpretar y comprender información sobre diferentes temas, además, deben tomar decisiones que involucran conceptos estadísticos. El estudio de la estadística proporciona a las personas las herramientas y las ideas para enfrentarse inteligentemente a la información numérica que emerge en la cotidianidad, siendo la inferencia la herramienta principal pues es la que capacita para leer, entender e interpretar de manera objetiva las conclusiones derivadas de los análisis de datos. En el caso de los profesores, Estrada (2007) comenta que estos, como parte de su ejercicio diario, necesitan comprender información de tipo estadístico como gráficas, promedios y otros conceptos. Hacer uso eficiente de esta información es útil cuando preparan sus clases o si forman parte de un equipo de investigación esto les permite comprender resultados obtenidos en proyectos. Estos conocimientos aunados a herramientas de análisis adecuadas le conducirán a tomar decisiones en una sociedad cambiante. El contexto del profesor mexicano en educación básica (atención a niños de 3-15 años) se está transformado rápidamente. Ya no es un especialista por niveles, sino un formador completo que ira interviniendo en momentos determinados. Por eso debe ser capaz de poder utilizar y crear información; a la par desarrollar un pensamiento lógico que le permita acompañar procesos de diferentes índoles (por ejemplo, académicos o de gestión). Por ello, el nuevo normalista toma un curso en el trayecto de "aprendizaje y enseñanza", en la malla curricular establecida, de *procesamiento de información estadística.* El propósito de ese curso es:

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 269-276). Granada, 2015.

"promover que el futuro docente comprenda y aplique los conceptos y procedimientos básicos de probabilidad y estadística descriptiva e inferencial que le permitan recolectar, organizar, presentar y analizar datos para abordar la resolución de problemas en el contexto educativo; así mismo, se pretende que los futuros docentes apliquen estos conceptos y procedimientos en la realización de proyectos de investigación y en la elaboración de su documento recepcional" (SEP, 2012, p.6).

Sin embargo, la estadística es un tema difícil de aprender, estudiantes e incluso profesores muestran errores conceptuales, por ejemplo, en los conceptos de muestreo y distribución (Castro-Sotos, et al. 2007). Esto ha motivado el interés por estudiar el RII, el cual es un razonamiento que está a medio camino entre el análisis exploratorio de datos y la inferencia estadística formal. Esta investigación tiene como objetivo iniciar exploraciones sobre el RII de profesoras en formación, cuando resuelven problemas estadísticos, y con base en estas conocer, por un lado, la manera en que razonan las futuras profesoras y por otro lado, que sean la pauta para planificar la enseñanza del curso procesamiento de información estadística que deben cubrir como parte del plan de estudios propuesto en su malla curricular. De acuerdo con Zieffler, delMas y Reading (2008), una pregunta de interés al estudiar el razonamiento inferencial informal es: ¿en qué medida las estudiantes dependen de sus conocimientos previos o formales de estadística y qué tanto dependen de sus conocimientos informales? (p.53). Como ya se mencionó en este párrafo los resultados de este trabajo contribuirán a mejorar la formación de las profesoras en formación.

2. Antecedentes

Varios trabajos publicados en los últimos años, aluden a los conceptos de RII, sin embargo todavía no hay consenso acerca de lo que significa este término exactamente. Para Pfannkuch (2006) este tipo de razonamiento está interrelacionado a razonar con distribuciones, medidas de centro y muestreo en un ciclo de investigación empírico. Ben-Zvi (2006) comenta que la inferencia informal está relacionada con actividades de argumentación, derivando conclusiones lógicas a partir de los datos acompañados de argumentos persuasivos basados en el análisis de los datos. Zieffler, et al. (2008) en un intento por combinar dichas perspectivas define RII como la manera en la cual los estudiantes usan su conocimiento estadístico informal para formular argumentos que apoyen sus decisiones. En una investigación sobre RII Garcia-Rios (2013) encontró que los estudiantes utilizan prejuicios y creencias al hacer inferencias, incluso los que utilizan los datos disponibles. Además hay ausencia de un lenguaje probabilístico debido a que se tiene una concepción determinista de la estadística, en el sentido de que sus inferencias no muestran algún grado de incertidumbre. Un tipo de problemas que permite conocer el RII y los argumentos de los estudiantes son las comparaciones de conjuntos de datos, las cuales han sido utilizadas por diferentes autores (Gal, I., Rothschild, K. & Wagner, D.A. 1989; Watzon & Moritz, 1999).

Garfield y Ben-Zvi (2008) indican las siguientes ventajas de la comparación de conjuntos de datos: comparar dos o más conjuntos puede estructurarse como una versión inicial e informal de inferencia estadística, son a menudo más interesantes que los que involucran a un solo conjunto, los estudiantes de cualquier nivel requieren desarrollar estrategias para comparar conjuntos de datos y en la comparación de conjuntos es importante realizar representaciones gráficas y obtener resúmenes (centro y dispersión) de los datos. Además de las comparaciones de conjuntos de datos como herramienta para explorar el RII de los estudiantes, el contexto es importante. Makar, Bakker y Ben-Zvi (2011) ubican al contexto como un elemento fundamental dentro del RII, ya que el razonamiento debe ser un proceso de generación de sentido impulsado por las dudas y las creencias, dando lugar a inferencias y explicaciones. En esta investigación se utiliza la propuesta de Kahneman y Tversky (1984) sobre aceptar un juego de apuestas, este tipo de contexto ha mostrado que compromete a los estudiantes a resolver el problema y propicia la argumentación por parte de ellos (Orta & Sánchez, 2014). En este tipo de problemas emergen dos actitudes de las personas: la aversión al riesgo, que es el preferir un resultado seguro sobre la aceptación del juego y la propensión al riesgo o la aceptación del juego en busca de una ganancia alta.

3. Marco conceptual

En esta exploración el razonamiento inferencial informal se usa para describir la manera en que las profesoras en formación elaboran conclusiones a partir de resolver un problema sobre comparación de conjuntos de datos. La comparación de dos conjuntos de datos es una actividad que cumple con las 3 componentes esenciales descritas por Zieffler et al. (2008) para explorar el RII de los estudiantes, a saber: 1) realizar juicios o predicciones, 2) utilizar conocimientos estadísticos formales al grado en que estén disponibles (por ejemplo, media, mediana, desviación estándar, rango) o informales (por ejemplo, experiencias, creencias, conocimiento cotidiano del contexto del problema) y 3) articular los argumentos basados en evidencia. Para organizar los argumentos de las estudiantes se hizo uso de la teoría fundamentada, la cual es una metodología para desarrollar teoría con base en datos, sistemáticamente colectados y analizados propuesta por Glaser y Strauss (1967). Esta teoría no parte de una hipótesis preconcebida; se basa en buscar mediante códigos, conceptos y finalmente categorías las cuestiones subyacentes entre el "ruido" de los datos (Allan, 2003). En esta investigación con profesoras en formación los códigos iniciales surgieron de las palabras clave pérdidas y ganancias, para posteriormente dar paso a los conceptos "gano más" (comparando la suma de las ganancias de cada juego o la razón entre ganancias y pérdidas de cada juego), "pierdo menos" (comparando la suma de las pérdidas de cada juego), y "gano lo mismo en ambos juegos" (comparando la suma de todas las cantidades de cada juego). Finalmente se establecieron tres categorías; 1) comparación de pérdidas o ganancias, 2) comparación de la media informal, 3) comparación de la razón entre ganancias y pérdidas.

4. Metodología

Participantes. Sesenta y tres estudiantes, profesoras de jardín de niños[1] en formación, de una escuela normal pública de la Ciudad de México. Para conocer las ideas de las estudiantes se elaboró un cuestionario con dos problemas sobre comparaciones de conjuntos de datos. Para el presente estudio sólo se informa sobre los resultados obtenidos en uno de ellos (Figura 1). El cuestionario fue resuelto antes de iniciar el curso de procesamiento de la información estadística en un tiempo de 60 minutos.

[1] Las edades de los alumnos en el nivel educativo de jardín de niños en México, oscilan entre los 3 y 6 años de edad.

5. Resultados

Para analizar las respuestas de las estudiantes se inició diferenciándolas por el juego elegido y posteriormente se las categorizó con base en los argumentos de la elección.

En una feria, se invita a los asistentes a participar en uno de dos juegos. Juan puede participar en un juego, pero no en ambos. Para saber por cuál decidirse observa, anota y ordena los resultados de dos muestras de 10 personas que han participado en cada juego. Las pérdidas ( ) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas:

Juego 1:

15	-21	-4	50	-2	11	13	-25	16	-4

Juego 2:

120	-120	60	-24	-21	133	-81	96	-132	18

a) Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego
¿Cuál juego elegirías? ¿Por qué?

Figura 1. Problema.

Treinta y seis estudiantes eligieron el juego 1, veintiuna el juego 2, y 6 respondieron que cualquier juego. En cuanto a los argumentos de las estudiantes, para justificar su elección, estos se basaron en comparaciones de las sumas de las pérdidas y las ganancias de los juegos, o en comparar la razón entre las ganancias y las pérdidas de los juegos.

En 6 respuestas se comentó que se elegiría cualquiera de los juegos, en estas el argumento dado fue que la ganancia o la inversión inicial era la misma (49), lo cual resulta de sumar todas las cantidades de cada juego (media informal). Las respuestas que eligieron el juego 1 se dividen en dos tipos: En el primero, el argumento de elección se basó en la comparación de razones, entre las ganancias y las pérdidas, de los juegos (25 respuestas), eligiendo el juego 1 ya que se ganaba casi el doble de lo que se perdía. En el segundo tipo los argumentos se basaron en la comparación de la suma de las pérdidas de los juegos 1 y 2 (6 respuestas), siendo menores las del juego 1 (pues 56 < 378). Las respuestas que eligieron el juego 2 (20 respuestas) argumentaron que las ganancias eran mayores que las que se podían obtener en el juego 1. A continuación se muestran ejemplos de las respuestas, utilizando las categorías “comparación de pérdidas o ganancias”, “comparación de la media informal” y “comparación de la razón entre ganancias y pérdidas”.

Comparación de pérdidas o ganancias. En esta categoría las respuestas se basaron en comparar las sumas ya sea de las pérdidas o de las ganancias del los juegos. En la Figura 2 se muestra un ejemplo donde una estudiante eligió el juego 2, y la justificación de su elección fue con base en la comparación de las ganancias, observando que las ganancias eran mayores en el juego 2.

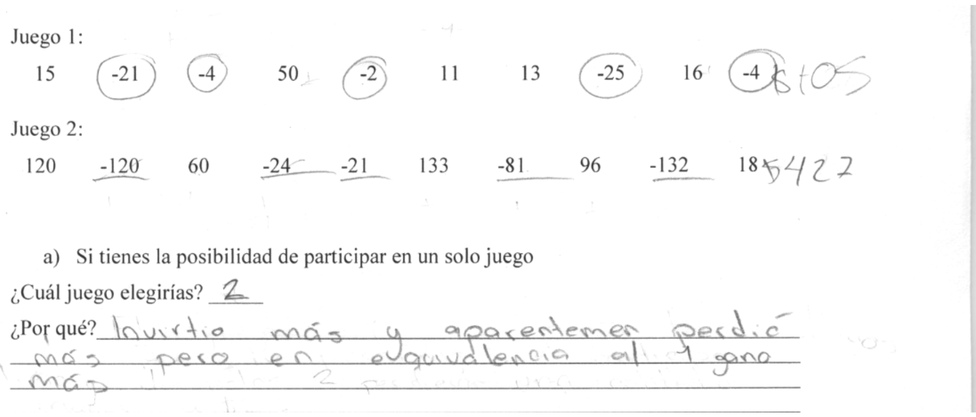
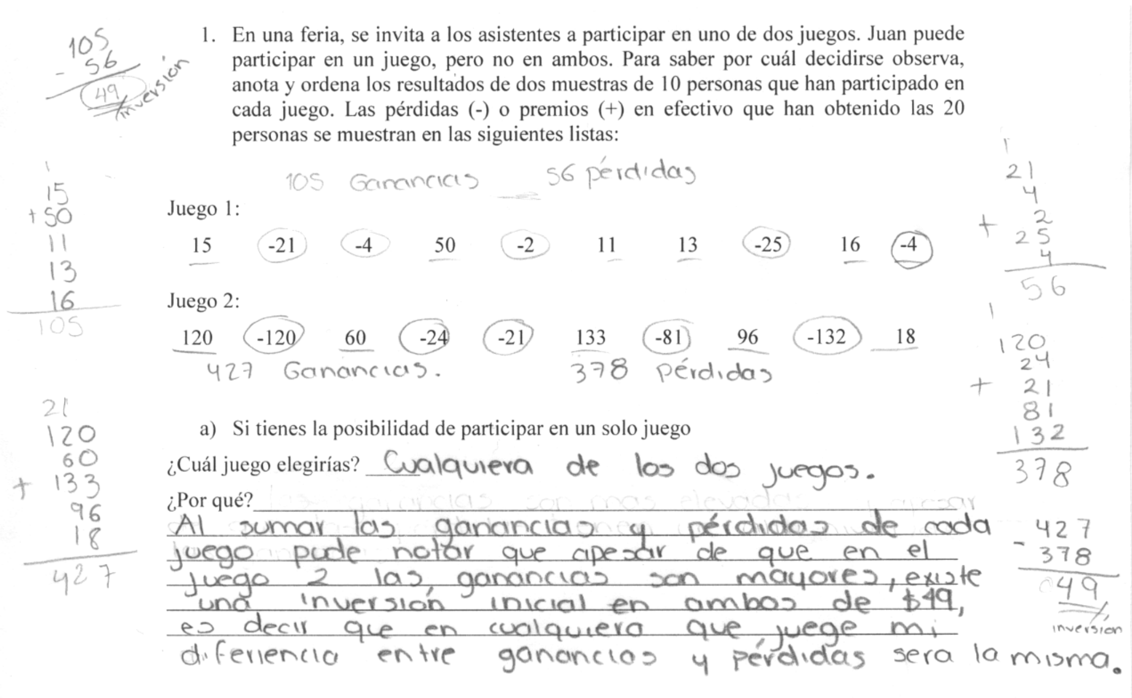

Juego 1:
15 -21 -4 50 -2 11 13 -25 16 -4 $105
Juego 2:
120 -120 60 -24 -21 133 -81 96 -132 18 $427
a) Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego
¿Cuál juego elegirías? 2
¿Por qué? Invirtio más y aparentemen perdió más pero en equivalencia al 1 gano más

Figura 2. Ejemplo de la categoría, comparación de pérdidas o ganancias.

La justificación en el ejemplo de la Figura 2 fue: “Invirtió más y aparentemente perdió más pero en equivalencia al 1 gano más”. En este ejemplo además del uso de la ganancia máxima para decidir entre un juego y otro (427 > 105), se observa la propensión al riesgo ya que al final de la justificación se comenta “gano más”.

Comparación de la media informal. En esta categoría se encuentran las respuestas que se basaron en elegir cualquiera de los conjuntos de datos porque la ganancia o inversión inicial (49) era la misma en ambos juegos.


1. En una feria, se invita a los asistentes a participar en uno de dos juegos. Juan puede participar en un juego, pero no en ambos. Para saber por cuál decidirse observa, anota y ordena los resultados de dos muestras de 10 personas que han participado en cada juego. Las pérdidas (-) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas:

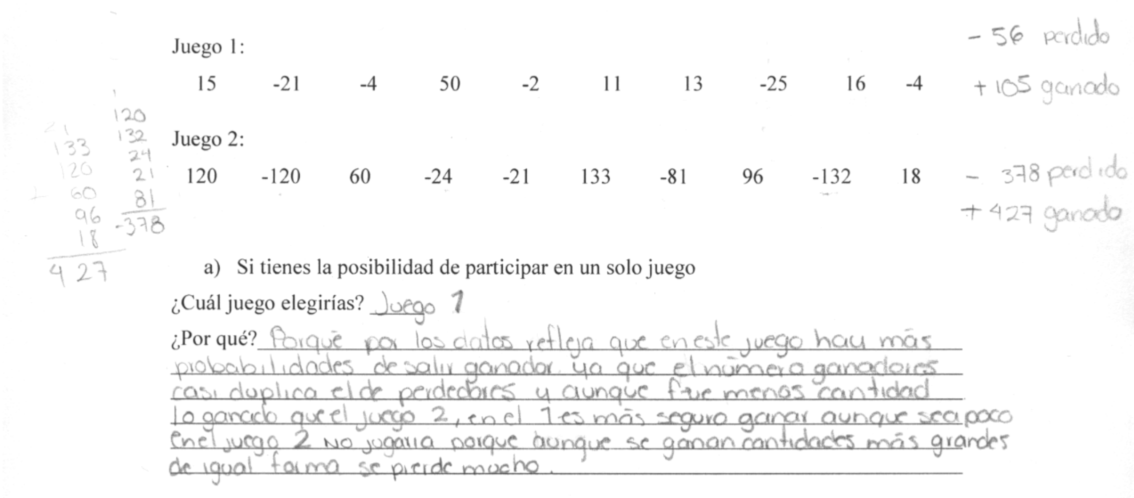
105 Ganancias 56 pérdidas
Juego 1:
15 -21 -4 50 -2 11 13 -25 16 -4
Juego 2:
120 -120 60 -24 -21 133 -81 96 -132 18
427 Ganancias. 378 pérdidas
a) Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego
¿Cuál juego elegirías? Cualquiera de los dos juegos.
¿Por qué? Al sumar las ganancias y pérdidas de cada juego pude notar que apesar de que en el juego 2 las ganancias son mayores, existe una inversión inicial en ambos de $49, es decir que en cualquiera que juege mi diferencia entre ganancias y pérdidas sera la misma.

105 − 56 = 49 inversión
15 + 50 + 11 + 13 + 16 = 105
120 + 60 + 133 + 96 + 18 = 427
21 + 4 + 2 + 25 + 4 = 56
120 + 24 + 21 + 81 + 132 = 378
427 − 378 = 49 inversión

Figura 3. Ejemplo de la categoría, comparación de la media informal.

En el ejemplo mostrado en la Figura 3 se observa que pérdidas y ganancias de cada juego fueron sumadas; posteriormente restadas obteniendo como resultado 49. Por lo que la elección fue cualquiera de los juegos. La justificación fue: “Al sumar las ganancias y pérdidas de cada juego pude notar que a pesar de que en el juego 2 las ganancias son mayores, existe una inversión inicial en ambos de $49, es decir que en cualquiera que juegue mi diferencia entre ganancias y pérdidas será la misma”.

Comparación de la razón entre ganancias y pérdidas. En este tipo de respuestas el juego elegido fue el 1 y al comparar la razón entre las ganancias y las pérdidas de cada juego se observa que la del juego 1 es casi el doble comparada con la del juego 2 $\left(\frac{105}{56} > \frac{427}{378}\right)$.


Juego 1:

15	-21	-4	50	-2	11	13	-25	16	-4

- 56 perdido
+ 105 ganado

Juego 2:

120	-120	60	-24	-21	133	-81	96	-132	18

- 378 perdido
+ 427 ganado

120
132
24
21
81
-378

133
120
60
96
18
427

a) Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego

¿Cuál juego elegirías? Juego 1

¿Por qué? Porque por los datos refleja que en este juego hay más probabilidades de salir ganador ya que el número ganadores casi duplica el de perdedores y aunque fue menos cantidad lo ganado que el juego 2, en el 1 es más seguro ganar aunque sea poco en el juego 2 no jugaría porque aunque se ganan cantidades más grandes de igual forma se pierde mucho.

Figura 4. Ejemplo de la categoría, comparación de la razón entre las ganancias y las pérdidas.

La justificación del ejemplo de la Figura 4 fue la siguiente: “Porque por los datos refleja que en este juego hay más probabilidades de salir ganador ya que el número de ganadores casi duplica el de perdedores y aunque fue menos cantidad lo ganado que el juego 2, en el 1 es más seguro ganar aunque sea poco en el juego 2 No jugaría porque aunque se ganan cantidades más grandes de igual forma se pierde mucho”. En este ejemplo se observa, por un lado el uso de la razón entre las ganancias y las perdidas y, por otro la aversión al riesgo ya que en parte del argumento se comenta que “es más seguro ganar aunque sea poco”.

6. Discusión

De los resultados obtenidos se observa que las estudiantes no hacen uso de gráficas o medidas de centro y dispersión para justificar su elección, la manera en que argumentan para hacer una elección consiste en utilizar sumas y restas, así como razones. La ausencia o poco uso de conceptos estadísticos como por ejemplo la media aritmética ha sido reportada en otros trabajos de comparaciones de conjuntos de datos (Gal et al. 1989, Watson & Moritz, 1999). En las respuestas que eligen el juego 1 se puede intuir que la respuesta verso sobre su posición ante el riesgo el cual al parecer es la aversión o rehusar a participar en el juego 2, ya que en este último las pérdidas son mayores. En las respuestas donde se eligió el juego 2 se percibe que la respuesta se da más por una posición definida hacia el riesgo ya que se gana más.

Las estrategias de solución de las estudiantes pueden organizarse, de acuerdo con sus argumentos, en tres tipos: 1) Respuestas que eligen el juego 1 o 2 con base en la comparación de la suma de las pérdidas o las ganancias. 2) Respuestas que eligen cualquiera de los juegos comparando la suma de las pérdidas y las ganancias (se obtiene el mismo monto, esta estrategia prefigura el uso de la media aritmética) y 3) Respuestas que comparan la razón entre ganancias y pérdidas de ambos juegos y eligen el juego donde la razón de las ganancias entre las pérdidas es mayor. Se observa que aunque las estudiantes realizan juicios y articulan los argumentan con base en las evidencias con las que cuentan, no hacen uso de conocimientos estadísticos formales como las medidas de centro y de dispersión.

En el contexto propuesto en el cuál las estudiantes pueden manipular datos se observa su alta dependencia de conocimientos cotidianos, en este caso sumar y restar. Aunque esto se da en diferentes niveles que van desde comparar la suma de algunos datos (pérdidas o ganancias), la suma de todos los datos, o las razones entre datos (ganancias y pérdidas) pocos se aproximaron al uso de conceptos estadísticos, en particular el uso de una media aritmética informal. Sin embargo no es claro el uso de las medidas de centro y dispersión. Además el contexto propuesto disminuye considerablemente el uso excesivo de prejuicios y creencias al hacer inferencias comparado con Garcia-Rios (2013), lo que conduce a que los estudiantes se enfoquen más en los datos disponibles.

Es necesario que durante el curso que deben cubrir las estudiantes se haga hincapié en reflexionar sobre los usos y significados de conceptos estadísticos, además de los de las gráficas. Como se mencionó en la introducción, la necesidad de que los profesores cuenten con herramientas estadísticas para su desarrollo es una faceta relevante, y es necesario estructurarla y fortalecerla para que estos tengan un mejor desempeño cuando se encuentren en las aulas.

Referencias

Allan, G. (2003). A critique of using grounded theory as a research method. *Electronic Journal of Business Research Methods*, 2(1), 1-10. http://www.ejbrm.com

Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students' informal inference and argumentation. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador, Brazil. [CDROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Castro Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Noortgate, W., y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review, 2*(2), 98-113.

Estrada, A. (2007). Evaluación del conocimiento estadístico en la formación del profesorado. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 45*, pp. 78-97.

Gal, I., Rothschild, K. y Wagner, D.A. (1989). Which group is better? The development of statistical reasoning in elementary school children. Paper presented at the meeting of the Society for Research in Child Development, Kansas City, MO, April 1989.

Garcia-Rios, N. (2013). Inferencias estadísticas informales en estudiantes mexicanos. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 343-357). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and teaching. Springer: New York.

Glaser, B.G. y Strauss. A.L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory*. New York: Aldine.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1984). Choices, values, and frames. *American Psychologist 39*

(4), 341-350.

Makar, K., Bakker, A., y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 13*, 152–173.

Orta, J. A. y Sánchez, E. A. (2014). Interpreting variation of data in risk-context by middle school students. En K. Makar, B. de Sousa, y R Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education: Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*, Flagstaff, Arizona, USA.

Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics,* Salvador, Brazil. [CDROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

SEP. (2012). *Procesamiento de Información Estadística*. México: Secretaría de Educación Pública.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: comparing two data sets. Educational Studies in Mathematics, 37,145-168.

Zieffler, A., Garfield, J. y delMas, R. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal. 7*(2), 40-58.

Evaluación de sesgos probabilísticos en futuros profesores: Tratamiento de un problema irresoluble

Contreras García, José Miguel[1]*; Arteaga Cezón, Pedro*[2]*; Cañadas de la Fuente Gustavo R*[3] *y Gea Serrano, María Magdalena*[4]

[1]jmcontreras@ugr.es, Universidad de Granada
[2]parteaga@ugr.es, Universidad de Granada
[3]grcanadas@ugr.es, Universidad de Granada
[4]mmgea@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

Los sesgos probabilísticos son un problema extendido en los futuros profesores, como demuestran las investigaciones recientes, llegado a influir considerablemente en el razonamiento probabilístico de éstos. El problema se agrava cuando estos errores llegan al punto de influir en el futuro académico del estudiante, ya no solo porque el futuro profesor cometa estos sesgos, sino porque sea la institución que pretende evaluar al estudiante la que los comete.

Este trabajo evalúa, en futuros profesores, un problema de una prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años. El estudio compara los resultados de la muestra principal (alumnos de 4º y 5º de la licenciatura de matemáticas de la Universidad de Granada) con una muestra de alumnos de primer año del Grado de Primaria de la Universidad de Granada, que no cursaron aún docencia en probabilidad, y que poseen unos conocimientos probabilísticos adquiridos es su etapa preuniversitaria.

Palabras clave: Sesgos probabilísticos, Futuros profesores, Evaluación, Pruebas de acceso.

1. Introducción

En las investigaciones sobre errores de razonamiento probabilístico se hace hincapié en la necesidad de tratar el problema desde la base, por lo que ha de ser el profesor encargado de su enseñanza el que debiera reconocer estos sesgos en sus estudiantes, ayudarles a superarlos y prepararlos para la correcta toma de decisiones en su vida personal y profesional. El problema radica en la preparación específica de los profesores, que en muchos casos puede ser insuficiente e incluso puede estar afectada por estos errores.

La probabilidad ha alcanzado en los últimos años una notoriedad que no tenía en las anteriores orientaciones curriculares de Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato, principalmente por el papel de ésta en el análisis crítico que se pretende para el alumno. Sin embargo, la poca formación específica sobre el conocimiento didáctico relacionado con la enseñanza de probabilidad, principalmente en futuros profesores de bachillerato y secundaria, puede llevar a una mala adecuación de las pautas de aprendizaje. La situación es aún más crítica para los futuros profesores de Educación Primaria, puesto que algunos ni siquiera han seguido un curso completo de probabilidad durante su formación como maestros. Esto puede provocar en algunos casos concepciones incorrectas sobre las ideas de azar y probabilidad (Azcárate, 1995) y en otras lleva a los profesores, una vez incorporados a su labor docente, a tratar de reducir o incluso omitir la enseñanza de la probabilidad (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006).

Franklin y Mewborn (2006) advierte de la urgencia de ofrecer una mejor educación previa a estos profesores para mejorar la enseñanza de la probabilidad en las escuelas, pero ello requiere un trabajo previo de evaluación.

En este trabajo analizamos las dificultades ante un problema, que fue incluido en una prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años en una muestra de futuros profesores españoles de Educación Secundaria profesores de educación primaria. Se compara los resultados de la muestra principal (alumnos de 4º y 5º y agregados de la licenciatura de matemáticas) con la muestra de alumnos de primer año, que no cursaron aún docencia en probabilidad, y que poseen unos conocimientos probabilísticos adquiridos es su etapa de secundaria y bachillerato.

2. Antecedentes

Los profesores de matemáticas de educación secundaria y bachillerato son mayoritariamente licenciados en matemáticas y estudiaron uno o más cursos de estadística en su etapa universitaria. Pero, en general, la formación que tuvieron fue teórica y no tienen experiencia con estudios de estadística aplicada, muestreo, o diseño de experimentos (Franklin y Mewborn, 2006). Generalmente, en pocos casos los profesores tienen formación específica en didáctica de la estadística, pues, aunque en España todos realizaron el Curso de Aptitud Pedagógica o el Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria, donde realizaron cursos de didáctica de la matemática, los principios generales que son válidos para otras áreas de las matemáticas no siempre pueden ser aplicados a la estadística (Batanero, Godino y Roa, 2004). La situación de los maestros de primaria respecto a la probabilidad, y no digamos ya la probabilidad condicionada, es preocupante, debido generalmente a la poca formación recibida en el campo de la probabilidad, pues hasta hace poco ni siquiera se incluía en el currículo de educación primaria.

La mayoría de las investigaciones en este campo están relacionadas con la comprensión conceptual. Son destacables las investigaciones de Maury (1986) y Totohasina (1992) sobre comprensión intuitiva de la probabilidad condicional en contexto de extracción de bolas en urnas y otro de ruletas. Los autores indican que parte de los errores en la resolución de problemas de probabilidad condicional son debidos a dificultades de identificación y restricción del espacio muestral. Algunos estudios hacen referencia a la desigualdad de predilección por la enseñanza de conocimientos probabilísticos por parte de los dos grupos de profesores. Por ejemplo Watson (2001) y Pereira-Mendoza (2002), que evaluaron profesores de primaria y secundaria, indican que los profesores de secundaria tienen un nivel de seguridad significativamente más alto que los de primaria a la hora de enseñar conceptos básicos de probabilidad.

Respecto a los sesgos tratados en la investigación podemos encontrar diferentes investigaciones, como la de Díaz (2007) con alumnos de psicología o las de Contreras (2011), Díaz, Contreras, Batanero, y Roa (2012) con alumnos matemáticas y futuros profesores de secundaria, que hacen hincapié en evaluar las falacias más comunes relacionadas con la probabilidad. Autores como Kelly y Zwiers (1986) hacen énfasis en la evaluación de lenguaje como problemática en la compresión probabilística y percepción de independencia. Por ejemplo, la confusión entre exclusividad e independencia. En el mismo sentido Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) y Ojeda (1995) coinciden en que muchas de las dificultades respecto a la comprensión de la probabilidad condicional pueden deberse al lenguaje coloquial, en el que por ejemplo, la conjunción “y” que pueden llevar a confundir la probabilidad condicional con la conjunta ya que puede llevar a la interpretación de la intersección como condicionamiento.

Otros sesgos son propios de la probabilidad condicional, por ejemplo la falacia de las tasas base (Tversky y Kahneman, 1982), consistente ignorar la probabilidad a priori de un suceso en problemas que involucran la probabilidad inversa. Es decir, se ignoran datos del problema. Este tipo de razonamiento también ha sido descrito por Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (2001), Díaz y de la Fuente (2007) y Contreras (2011); la falacia de la condicional transpuesta, definida como la confusión de las probabilidades P(A/B) y P(B/A) (Falk, 1986). Batanero, Estepa, Godino y Green (1996) encontraron esta misma confusión en la interpretación de tablas de contingencia donde se confunden las dos frecuencias condicionales relacionadas con una misma celda de datos. Otro sesgo es la falacia del eje de tiempo consistente en la creencia de que un suceso no puede condicionar otro que ocurra anteriormente. Gras y Totohasina (1995) indican que los estudiantes asocian el condicionamiento con el orden temporal de los sucesos y no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad. O la falacia de la conjunción o la creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que cada uno de ellos por separado (Tversky y Kahneman, 1982).

3. Evaluación de la interpretación de enunciados probabilísticos

3.1. Muestra y contexto educativo

La recogida de datos se realizó durante el curso 2012-2013. La muestra completa, compuesta de estudiantes de la Universidad de Granada, está formada por un total de 180 alumnos, repartidos en dos submuestras de 90 alumnos, de la licenciatura de Matemáticas (alumnos de 4º y 5º curso) y Grado de Maestro en Educación Primaria (alumnos de 1ºcurso) de la Universidad de Granada. El porqué de estas muestras es debido al interés por evaluar si los futuros profesores de matemáticas, ya que el cuestionario se pasó en una jornada informativa del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas dentro de un proyecto docente sobre salidas profesionales para alumnos de la licenciatura de matemáticas, saben interpretar enunciados probabilísticos y posteriormente comparar esta muestra con la muestra de alumnos de primer año del grado de primaria. El objetivo de este estudio es discutir si la interpretación correcta o incorrecta del enunciado depende del tipo de estudio realizado, partiendo de la mejor formación en el campo de los futuros profesores de matemáticas.

Alumnos de la licenciatura de matemáticas

La muestra está formada por alumnos de los dos últimos años del grado de Matemáticas. Por la idiosincrasia de esta muestra, los futuros profesores han de poseer las competencias exigibles para la realización de tal actividad, ya que todos los participantes han realizado asignaturas en la que se trata explícitamente la probabilidad y se hace hincapié en la probabilidad condicional. Algunas de estas asignaturas son de carácter troncal, como la asignatura de segundo curso "Probabilidades y Estadística" o la de tercer curso "Ampliación de Estadística", las dos de carácter anual. Además de estas materias, el alumno tiene la opción de elegir algunas otras asignaturas de carácter optativo íntimamente relacionadas con el tema.

Alumnos del Grado de Maestro en Educación Primaria

La muestra de 90 alumnos de primaria está formada por alumnos de dos grupos de la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria que se oferta en el primer curso de la titulación. Estos aún no han cursado el tema en cuestión por lo que, a priori, los únicos conocimientos probabilísticos son los obtenidos en su etapa pre-universitaria.

En los criterios de acceso a la titulación, descritos por el informe Verifica de la ANECA (2010) para la titulación de Grado de maestro en educación primaria de la Universidad de Granada, el perfil del estudiante que realiza estos estudios puede estar asociado a cualquier tipo de bachillerato ya sea Arte (en el que no se estudia la probabilidad), Ciencias y Tecnología (ya descrita anteriormente) y Humanidades y Ciencias Sociales; siendo esta última la mayoritaria entre los estudiantes evaluados (1,1%, 9% y 88,9% respectivamente). Dentro de esta opción de bachillerato los alumnos pueden realizar las asignaturas Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I y II, la primera de ella es optativa ya que los alumnos tienen que elegir dos materias entre Historia del mundo contemporáneo, Latín I y Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I. En la asignatura Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I se especifica que se ha de evaluar si los alumnos son capaces de determinar la probabilidad de un suceso, analizar una situación y decidir la opción más adecuada. En el apartado número 3 "Probabilidad y estadística" se describe como contenido de la asignatura la "Asignación de probabilidades a sucesos". En el mismo apartado de la asignatura Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II aparece como contenidos la "Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes". Como criterio de evaluación se especifica que el alumno ha de saber asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, utilizando diagramas de árbol o tablas de contingencia.

Análisis del ítem

El problema utilizado para el estudio es un ejercicio propuesto para la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años, curso 2009/2010, del distrito andaluz.

EJERCICIO 6

a) **(5 puntos)** En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?

Figura 1. Enunciado original del ejercicio

Este típico problema de evaluación, es muy común encontrarlo en las pruebas de acceso, pretende obtener una solución para una probabilidad condicionada a partir de los datos proporcionados: una probabilidad simple *P*("ser mujer") y una conjunta *P*("ser mujer y mayor de edad"). La pretensión en este tipo de problemas es que el evaluado sea capaz de interpretar que para su resolución es necesaria la utilización del Teorema de Bayes. Por tanto una posible resolución matemática del mismo sería la siguiente:

$$P(\text{"}ser\ mujer\text{"} \mid \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"}) = \frac{P(\text{"}ser\ mujer\text{"} \cap \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})}{P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})}$$

Conocido que $P(\text{"}ser\ mujer\text{"} \cap \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"}) = 0,4$, el problema radica en calcular la $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$. Teniendo en cuenta que

$$P(\text{"}mujer\text{"}) = 0,55;\ P(\text{"}hombre\text{"}) = 1 - P(\text{"}mujer\text{"}) = 0,45 \text{ y}$$

$$P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \mid \text{"}mujer\text{"}) = \frac{P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \cap \text{"}mujer\text{"})}{P(\text{"}mujer\text{"})} = \frac{0,4}{0,55} = 0,73.$$

Podemos utilizar el Teorema de la probabilidad total para descomponer $P(\text{"}ser\ m.e.\text{"})$ como:

$$P(\text{"}ser\ m.e.\text{"}) = P(\text{"}mujer\text{"})P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \mid \text{"}mujer\text{"}) + P(\text{"hombre"})P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \mid \text{"hombre"}).$$

Por tanto: $P(\text{"}ser\ m.e.\text{"}) = 0,55 \cdot 0,73 + P(\text{"}ser\ m.e.\text{"} \cap \text{"hombre"})$.

Como en este caso desconocemos $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"} \cap \text{"hombre"})$ es imposible calcular la $P(\text{"}ser\ mujer\text{"} \mid \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$. Otra forma de tratarlo es que al no conocer la $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$ no se puede calcular.

Es decir, nos encontramos con un enunciado de imposible resolución y que engloba muchos de los conocimientos básicos que un alumno de estas titulaciones, y no digamos un profesor o futuro profesor, necesitaría conocer.

3.2. **Resultados de la evaluación**

En este apartado se muestra y se clasifica las distintas respuestas de los estudiantes ante la cuestión planteada. En la Tabla 1 se resume el número de estudiantes que responden de manera correcta, parcialmente correcta (es decir, identifican la falta de elementos para la solución correcta pero no llegan a hacer una interpretación) y de forma incorrecta de forma global o segregada por tipo de muestra. Como se observa el porcentaje de alumnos que es capaz de encontrar que el problema es irresoluble apenas llega al 11,1% (18,3% si tenemos en cuenta las respuestas parcialmente correctas). Los resultados muestran una gran dificultad para el análisis del problema, sobre todo en los alumnos de primaria, que han debido de superar, apenas unos meses antes, una prueba de acceso similar a la que se evalúa. Respecto a la muestra de futuros profesores de matemáticas encontramos que, aunque los resultados son mejores debido a sus conocimientos previos y mayor formación en el tema, muestran una dificultad preocupante de razonamiento probabilístico, ya que un 65,6% de ellos no es capaz de interpretar la irresolubilidad del enunciado.

Tabla 1. Tipos de respuestas al problema

	Matemáticas	Primaria	Totales
Correcta	19 (21,1%)	1 (1,1%)	20 (11,1%)
Incorrecta	59 (65,6%)	88 (97,8%)	147 (81,7%)
Parcialmente correcta	12 (13,3%)	1 (1,1%)	13 (7,2%)
Nº de estudiantes	90	90	180

En la Tabla 2 se observa, para la muestra general, algunas características consideradas importantes a la hora de interpretar el enunciado, tales como: si identifica probabilidades iniciales, si identifica que hay que calcular una probabilidad condicional, si identifica la falta de $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$ o de $P(\text{"}ser\ mujer\text{"} \mid \text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$, si utiliza o no el teorema de la probabilidad total o si calcula el resultado.

Los resultados muestran dificultades ya iniciales, como el alto porcentaje de alumnos que ni siquiera es capaz de identificar las probabilidades del enunciado. El problema principal, en la mayoría de los casos, radica en la interpretación a partir del enunciado de probabilidad conjunta. La interpretación del término "y", lo que concuerda con las investigaciones de Einhorn y Hogarth (1986), Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) o Ojeda (1995), puede llevar a confusión, ya que en el lenguaje coloquial es posible interpretar la intersección como condicionamiento.

Los porcentajes muestran unas limitaciones grandes de los alumnos a la hora de interpretar el problema. Es destacable el 14,4% de alumnos de primaria que no identifica que el problema pide calcular una probabilidad condicional para resolverlo. En mucho de estos casos, como vemos en la Tabla 3, este sesgo debido a la confusión de la probabilidad de la condicional con la simple o con la conjunta. Respecto a los dos teoremas necesarios para la resolución (Teorema de la probabilidad total y de Bayes) se observa que apenas son utilizados por uno de cada tres y dos de cada tres futuros profesores de secundaria respectivamente, y apenas un 3,3% en los de primaria. Es destacable que solo dos de cada tres futuros profesores de secundaria identifica la falta de las probabilidades necesarias para la resolución del problema y el alto porcentaje de alumnos que calcula y da una solución, aunque no tenga respuesta posible.

Tabla 2. Características globales

	Matemáticas	Primaria
El alumno identifica las probabilidades iniciales	60 (66,7%)	18 (20,0%)
El alumno identifica que hay que calcular una probabilidad condicional	64 (71,1%)	13 (14,4%)
El alumno identifica la falta de la probabilidad $P(\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$	20 (22,2%)	2 (2,2%)
El alumno identifica la falta de la probabilidad $P(\text{"}ser\ mujer\text{"}\mid\text{"}ser\ mayor\ de\ edad\text{"})$,	9 (3,3%)	-
El alumno utiliza el teorema de la probabilidad total	28 (31,1%)	3 (3,3%)
El alumno utiliza el teorema de Bayes	62 (68,9%)	3 (3,3%)
El alumno calcula el resultado (aunque no de una respuesta correcta)	41 (46,1%)	78 (86,7%)

Por tanto, y dado estos resultados, se quiso comprobar cuáles eran los errores cometidos y si se identificaban con algunos de los sesgos más comunes de la literatura relacionada con el tema. Los resultados, que se muestran en la Tabla 3, hacen referencia a algunos de los sesgos previamente tratados.

Tabla 3. Sesgos probabilísticos por muestra

	Matemáticas	Primaria
El alumno identifica al empezar a resolver que hay que calcular la probabilidad condicional traspuesta	14 (15,6%)	8 (8,9%)
El alumno calcula la probabilidad condicional traspuesta	29 (32,2%)	14 (15,6%)
Confunde la probabilidad conjunta con una simple	5 (5,6%)	19 (21,1%)
Confunde la probabilidad condicional con una conjunta	21 (23,3%)	72 (80%)
Confunde la probabilidad condicional con una simple	8 (8,9%)	19 (21,1%)
Identifica los sucesos como independientes	4 (4,4%)	7 (7,8%)
Confunde la fórmula	25 (27,8%)	16 (17,8%)

Como se observa, destaca el sesgo de confundir la probabilidad conjunta con la condicional con un 51,7%, debido principalmente al altísimo porcentaje de futuros profesores de primaria, causa principal de que uno de cada dos estudiantes no identifica correctamente el enunciado, como se observó en la Tabla 2. La ocurrencia de tan alto porcentaje puede ser debida a la incorrecta interpretación de los enunciados (Pollatsek, Well, Konold y Hardiman 1987; Einhorn y Hogarth 1986), o a la ambigüedad del lenguaje coloquial que afecta a la interpretación (Falk, 1986), y no tanto a relación con la falacia de la de la conjunción, como indican las investigaciones de Tversky y Kahneman (1982) y Díaz (2007). También destacan, aunque en menor porcentaje, la confusión entre la probabilidad conjunta y la condicional con una simple, en el caso de los futuros profesores de primaria. Totohasina (1992) expone que el error radica principalmente en la estrategia generalizada de cambio de referencia: consistente en restringir el espacio muestral para tratar el problema como si se tratase de un problema de probabilidad simple. Una causa de estos sesgos (Zazkis y Leikin, 2008; Batanero, Contreras, Díaz y Cañadas, 2013) es la dificultad por parte de los estudiantes de definir, y por tanto interpretar, correctamente los distintos tipos de probabilidades. Contreras (2011) estima que esos sesgos están relacionados principalmente con errores en la interpretación de la independencia y dependencia entre sucesos, lo que también ocurre en la resolución de este problema, donde un 15,2% identifica automáticamente los sucesos como independientes que, como indica Kelly y Zwiers (1986), puede ser debido a la confusión entre independencia y exclusividad. Otro sesgo en el de confusión en las formulas, principalmente el Teorema de Bayes o el Teorema de la probabilidad total, donde un 26,3% tiene problemas. Díaz y de la Fuente (2007) hacen hincapié en este sesgo destacando que es debido a un mal razonamiento proporcional, causado por dificultades en operar con fracciones o hallar el inverso de una fracción.

En este caso, vemos que la mayor preparación formal de los futuros profesores de matemáticas no fue suficiente para no cometer razonamientos erróneos, aunque se observa un mayor desempeño en estos respecto al resto de estudiantes. Los futuros profesores de matemáticas identifican correctamente las probabilidades iniciales dos de cada tres veces, en este apartado destacan los resultados similares de los estudiantes de biología y el preocupante porcentaje, apenas un 20%, de futuros profesores de primaria que identifican correctamente las probabilidades del enunciado.

Uno de los intereses principales es conocer si los alumnos son capaces de identificar que el enunciado pide calcular una probabilidad condicional, el 71,1% de los futuros profesores de matemáticas lo hace. No ocurre lo mismo con futuros profesores de primaria donde solo lo percibe un 14,4%. En este aspecto todos los alumnos de primaria y biología que identifican que se ha de calcular una probabilidad condicional también identifican las probabilidades iniciales, no ocurriendo lo mismo con los futuros profesores de matemáticas.

En el caso de la falacia de las tasas base referente al hecho de ignorar la probabilidad a priori de un suceso en problemas que involucra la probabilidad inversa, un 85,6% de los futuros profesores de primaria intentan calcular una probabilidad simple por lo que incurren en este sesgo. Ocurre lo mismo en el 28,9% de los futuros profesores de matemáticas. Como indica Contreras (2011), por lo general, este sesgo ocurre debido a una percepción incorrecta de la dependencia entre los sucesos implicados.

Respecto a la falta de alguna de las probabilidades necesarias para resolver el problema, nos encontramos, como es normal dada la preparación de los futuros profesores de matemáticas, con un porcentaje mayor de estos alumnos que identifican una u otra probabilidad respecto a las otras dos muestras. Hay que destacar que aunque el 25,5% de estos identifica la falta de las probabilidades, solo un 21,1% es capaz de interpretar correctamente el enunciado. Es decir solo un 82,7% de los que identifican la falta de las probabilidades es capaz de concluir la irresolubilidad del problema. Ocurre lo mismo en la otra muestra en las que apenas 2,2% de los de primaria interpretan la falta de alguna de las probabilidades.

En referencia al uso de los dos teoremas necesarios, Teorema de la probabilidad total y de Bayes, observamos que el 68,9% de los futuros profesores de matemáticas utilizan el Teorema de Bayes, e implícitamente el Teorema de la probabilidad total, y que el 31,1% se decanta para resolverlo aplicando el Teorema de la probabilidad total. Como ocurre en el resto de características los alumnos de primaria apenas tienen en cuenta el uso de los dos teoremas.

Llama la atención el alto porcentaje de futuros profesores de primaria, un 41,6%, que resuelve numéricamente de forma incorrecta el problema. Esto puede ser debido a la necesidad de dar un resultado al planteamiento ya que tradicionalmente no se plantean problemas irresolubles en la enseñanza de las matemáticas y de la probabilidad en particular.

Las confusiones de probabilidades predominan en las dos muestras, destacando la confusión entre probabilidad conjunta y condicional, en el caso de los futuros profesores de primaria con un 80%, aunque uno de cada cuatro futuros profesores de matemáticas tiene este sesgo.

También destaca el caso de aquellos que confunden formulas, siendo preocupante en el caso de los futuros profesores de matemáticas con un 27,8%. En el caso de los futuros profesores de primaria el porcentaje es menor ya que en la mayoría de los casos solo aplicaban la regla de Laplace.

4. Conclusiones

Los resultados de esta pequeña evaluación indican que la existencia de estos sesgos probabilísticos está implícita en la mayoría de los estudiantes, sea cual sea su formación. En este caso, y dado las características del problema en cuestión, los sesgos se centran en la identificación de las probabilidades, la confusión entre ellas, la falacia de la condicional transpuesta y errores en las fórmulas utilizadas. Pero como indican otros estudios realizados por el grupo de investigación en educación estadística, tales como los de Díaz (2007); Contreras (2011); Batanero, Contreras, y Díaz (2011); Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012); Contreras, Batanero, Díaz y Arteaga (2012); Batanero, Contreras y Díaz (2012) o Batanero, Contreras, Díaz, C. y Cañadas (2013), más otros ya descritos anteriormente, existen numerosos sesgos que han de ser estudiados por parte de los investigadores en el área y principalmente por los profesores encargados de la enseñanza del tema. Este tema es de gran importancia, ya que como indica Stohl (2005) es posible que los propios profesores no sean conscientes de estos sesgos y por tanto de a que es debido las dificultades de los alumnos. Por tanto si profesores no son capaces de identificar estos razonamientos erróneos, puede ser debido a que ellos mismos los cometan y por tanto podrían transmitirlos a sus alumnos.

Los resultados de las diferentes muestras indican, que la formación influye, pero que en muchos casos los sesgos perviven en el razonamiento probabilístico. Ya que como hemos visto, los porcentajes de futuros profesores de matemáticas en cada uno de los sesgos es preocupante, principalmente porque en ese momento estaban a punto de finalizar su formación. Pero es importante destacar que este tipo de problema es frecuente, no su carácter irresoluble, en las pruebas de acceso a la universidad en España, y sobre todo en el distrito andaluz donde se llevó a cabo. Por tanto, todos los estudiantes de la muestra, dado el carácter de los requisitos de acceso a sus titulaciones descritos anteriormente, han debido de superar en su etapa preuniversitaria, y superar una prueba de acceso con problemas parecidos, contenidos probabilísticos similares a los aquí evaluados.

El problema en sí, dado su carácter irresoluble, puede ser debido a un deficiente razonamiento probabilístico por parte de los coordinadores encargados del diseño de la prueba de evaluación, dado que en un análisis reciente de los diferentes problemas probabilísticos en pruebas de evaluación, Carretero (2014), todos los problemas relacionados con la probabilidad condicional son resolubles y más aún en la resoluciones de la prueba que evaluación proporcionadas por la Consejería de educación, cultura y deporte de la Junta de Andalucía (2014), aparece una frase nueva que da sentido a la resolución del problema. Todo ello nos lleva a replantear la importancia de este tipo de sesgos, ya que, como es este caso, puede afectar a la nota que alcance el alumno para acceder a la universidad.

Para finalizar, sería recomendable fomentar la realización de situaciones didácticas para profesores que les permita concienciarse de sus propios sesgos y les ayuden a superarlos. Y recordar la necesidad de seguir investigando sobre los componentes esenciales en la preparación de los profesores y los métodos adecuados para enseñar en cualquier campo, pero en especial en la probabilidad, ya que aunque en la educación matemática se ha realizado un esfuerzo importante centrado en la investigación en el desarrollo profesional del docente (Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Wood, 2008), este no se han reflejado en la educación probabilística. Todo ello contribuirá a mejorar la educación estadística a todos los niveles.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (Ministerio de Economía y Competitividad) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

ANECA (2010). *Informe Verifica para la titulación del Grado de Primaria de la Universidad de Granada*. Recuperado de http://grados.ugr.es/primaria/.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.

Batanero, C.; Contreras, J. M.; Díaz, C. (2011) Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Revista del Centro de Investigaciones Educacionales PARADIGMA*, *32*(2), 51-66.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet. 12*(2), 1-13.

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C. y Cañadas, G. (2013). Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: Un estudio con futuros profesores. *Revemat, 8*(1), 75-91.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 151–169.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12*(1). On line: www.amstat.org/publications/jse/.

Carretero, M. (2014). *Análisis de problemas de probabilidad en las pruebas de acceso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Andalucía*. Trabajo fin de máster. Universidad de Granada.

Consejería de educación, cultura y deporte de la Junta de Andalucía (2014). Recuperado de la web http://www.juntadeandalucia.es/innovacioncienciayempresa/sguitg_b_examenes_anteriores.php?tipo_asig=M25.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Contreras, J.M. (2014) ¿Existe la necesidad de evaluación de sesgos probabilísticos en futuros profesores? Andrade, L. (Ed.). (2014). Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica. Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C. y Arteaga, P. (2012). Evaluación de la Falacia del Eje Temporal en Futuros Profesores de Educación Secundaria. *Acta Scientiae*. *14*(3), 346-362.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2007). Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. *Rema, 12*(1), 1-15.

Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de Sesgos en el Razonamiento sobre Probabilidad Condicional en Futuros Profesores de Educación Secundaria. *Bolema*. *26*(44), 1207-1225.

Einhorn, H. J. y Hogart, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin. 99*, 3–19.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

Hill, H., Ball, D. L., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers topic-specific knowledge of students, *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics, 8,* 96-100.

Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes*. Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II.

MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO, 5*, 37-55.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics.* Voorburg, The Netherlands.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes, 40*, 255–269.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma, 36*, 23-32.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). New York: Springer.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confi dence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*, 305-337.

Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education.* Rotterdam: Sense Publishers.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

Evaluación del conocimiento del profesorado de matemáticas para enseñar probabilidad a través del Cuestionario CDM-Probabilidad

Claudia Vásquez Ortiz[1] *y Ángel Alsina*[2]

[1]cavasque@uc.cl, Pontificia Universidad Católica de Chile
[2]angel.alsina@udg.edu, Universidad de Girona

Resumen

El estudio que se presenta en este artículo da a conocer resultados globales sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad de los profeosres de Educación Primara. Para evaluar las distintas facetas que involucra este tipo de conocimiento se analizaron las respuestas y producciones de 93 profesores de Educación Primaria en activo otorgadas a las distintas preguntas que conforman el Cuestionario CDM-Probabilidad. Los resultados evidencian un conocimiento didáctico-matemático muy insuficiente, por lo que consideramos que urge elaborar programas de intervención que permitan desarrollar el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad de los profesores de Educación Primaria.

Palabras clave: Profesorado, educación primaria, conocimiento didáctico-matemático, probabilidad.

1. Introducción

El dominio del profesor de matemáticas sobre los conocimientos que debe enseñar es un elemento clave, con efectos directos en el aprendizaje de sus alumnos, pues un profesor no debe enseñar lo que no sabe bien. En consecuencia, para mejorar el aprendizaje de los alumnos es indispensable elevar el nivel de preparación de los profesores, sobre todo en temas recientemente incorporados en el currículo como la probabilidad.

Muchos profesores de Educación Primaria tienen poca o ninguna preparación para enseñar probabilidad, lo que ha provocado que en algunos casos ésta se omita (Serradó, Azcárate, Cardeñoso, 2005). Asimismo, en los casos en que se aborda, se reduce a la enseñanza de fórmulas, dejando de lado la experimentación con fenómenos aleatorios y la resolución de problemas (Batanero, Ortiz, Serrano, 2007). Además, ni los currículos ni los libros de texto ofrecen el apoyo suficiente al profesor, presentando en su mayoría una visión incompleta de la probabilidad (Serradó, Azcárate, Cardeñoso, 2006). Estos factores limitan el desarrollo de una experiencia estocástica adecuada, basada en una metodología activa y exploratoria de fenómenos aleatorios que permita desarrollar un razonamiento probabilístico desde la infancia. Se requieren, pues, estudios para caracterizar y evidenciar el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad, dado que las actividades que el profesorado realiza en el aula depende de sus conocimientos (Ball, Lubienski, Mewborn, 2001). Bajo esta mirada, la evaluación de las fortalezas y debilidades es el punto de partida para diseñar planes de formación específicos que permitan comprender la probabilidad y los aspectos relacionados con su enseñanza (Sthol, 2005).

Desde esta perspectiva, nuestro objetivo es indagar en el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad del profesorado de Educación Primaria.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 289-297). Granada, 2015.

Para llevar a cabo la investigación se asume el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013), que se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Desde este referente teórico de la Didáctica de las Matemáticas, construimos el cuestionario CDM-Probabilidad que nos permitió evaluar aspectos parciales e iniciales del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad que poseen los profesores de Educación Primaria (Vásquez y Alsina, en prensa).

2. Fundamentación teórica

Durante las últimas décadas la probabilidad se ha incorporado en los currículos de primaria y secundaria desde muy temprana edad (Batanero, Arteaga y Gea, 2012). Un aspecto clave para asegurar que las nuevas propuestas curriculares tengan éxito es la formación de los profesores. Sin embargo, la mayoría de los profesores, sobre todo de primaria, tienen poca o ninguna preparación en relación a probabilidad y su didáctica, lo que les proporciona inseguridad para tratar dichos temas y en consecuencia para lograr una enseñanza idónea de la probabilidad (Pierce y Chick, 2011).

Aún cuando hay algunos estudios sobre el conocimiento que los profesores necesitan para enseñar probabilidad (Fischbein, 1975; Steinbring, 1990 y Kvatinsky y Even, 2002), las investigaciones son todavía escasas. Por esta razón, el *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) *Study 18,* "*Statistics Education in School Mathematics, Challenges for Teaching and Teacher Education*" (Batanero, Burrill, Reading y Rossman 2008; Batanero, Burrill, Reading, 2011) ha impulsado una línea de investigación sobre la formación del profesorado para enseñar estadística y probabilidad, trayendo consigo un aumento paulatino de las investigaciones, que pueden clasificarse en dos grupos: a) las actitudes y creencias y b) el conocimiento disciplinar y didáctico.

Nuestro estudio se centra en el análisis del conocimiento disciplinar y didáctico de los profesores de Educación Primaria para enseñar probabilidad, puesto que investigaciones recientes evidencian concepciones erróneas y dificultades que comportan una enseñanza inadecuada (Ortiz, Mohamed y Serrano, 2010). Para realizar este análisis se asume el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Godino, 2009), que se entiende como el conocimiento didáctico y las competencias profesionales que el profesor debe poner en juego a la hora de enseñar matemáticas para promover aprendizajes en sus alumnos. Los inicios del modelo CDM se remontan al análisis de los principales modelos del conocimiento matemático para la enseñanza (Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008), identificando en ellos ciertas limitaciones, por lo que estos autores elaboran un modelo teórico integrador sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor a partir del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008) y la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Más tarde, el modelo CDM evoluciona reinterpretando y refinando las premisas iniciales planteadas en Godino (2009), proponiendo una reestructuración más acabada de los componentes del MKT, en las que queda de manifiesto el vínculo e interacción entre ellas y las seis facetas o dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (figura 1).

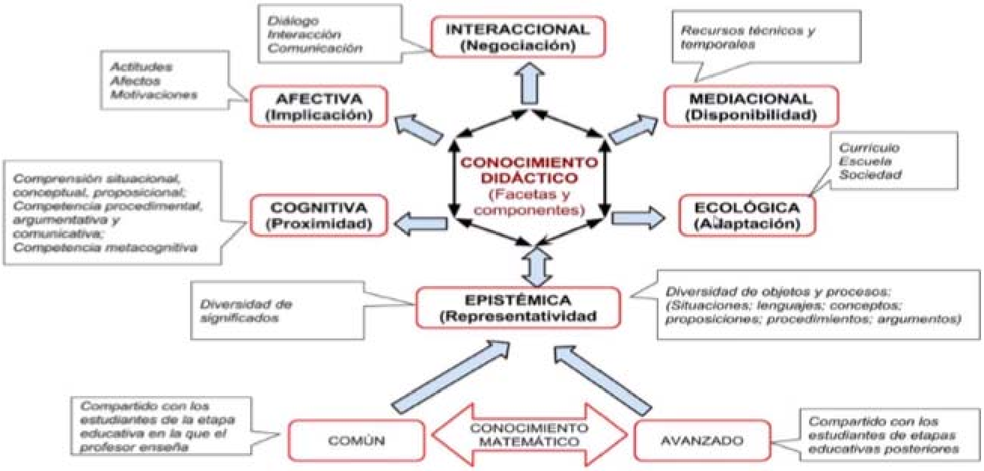


Figura 1: Conocimiento Didáctico-Matemático basado en el EOS (Godino y Pino-Fan, 2014, p. 21)

En base a esta reestructuración, Pino-Fan, Godino y Font (2013) proponen las siguientes tres categorías globales de conocimiento sobre el contenido matemático:

- *Conocimiento común del contenido*: se analiza a través de la faceta epistémica y se refiere a los conocimientos matemáticos, no necesariamente orientados a la enseñanza, que el profesor debe poner en juego para resolver situaciones problemáticas.
- *Conocimiento ampliado del contenido*: es también un conocimiento de tipo matemático que se analiza a través de la faceta epistémica, y se refiere a que el profesor además de saber resolver las situaciones problemáticas, debe poseer conocimientos más avanzados del currículo.
- *Conocimiento especializado*: se interpreta por medio de la faceta epistémica y se refiere al conocimiento adicional que el profesor debe saber, que lo diferencie de otras personas que saben matemáticas pero que no son profesores. Este conocimiento especializado además de implicar conocimiento común y parte del conocimiento ampliado, “debe incluir la pluralidad de significados del objeto, la diversidad de configuraciones de objetos y procesos inherentes a tales significados y las necesarias articulaciones inherentes entre los mismos” (Pino-Fan et al., 2013, p. 6). El conocimiento especializado incluye cuatro subcategorías: conocimiento del contenido especializado; conocimiento del contenido en relación con los estudiantes; conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y conocimiento del contenido en relación con el currículo.

Para el análisis de estas categorías se emplean herramientas teóricas del EOS. Por ejemplo, para las categorías "conocimiento común del contenido" y "conocimiento ampliado del contenido", y de la subcategoría "conocimiento del contenido especializado", se usa la guía para el reconocimiento de objetos y procesos (Godino, Gonzato y Fernández, 2010). Mientras que las categorías restantes pueden ser analizadas, más detalladamente, mediante las herramientas teóricas y metodológicas que el EOS entrega para las distintas facetas: cognitiva y afectiva (conocimiento del contenido en relación a los estudiantes), interaccional y mediacional (conocimiento del contenido en relación a la enseñanza), y ecológica y epistémica (conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto), sin olvidar que por medio de la guía para el enunciado de consignas propuesta en Godino (2009) es posible orientar la formulación de ítems de evaluación o propuestas de actividades que permitirían obtener información sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor.

3. Método

Para analizar el conocimiento disciplinar y didáctico de los profesores de Educación Primaria para enseñar probabilidad se ha usado el cuestinario CDM-Probabilidad (Vásquez y Alsina, en prensa), fundamentado en el modelo CDM y en la metodología que este modelo propone. Se trata de un cuestionario de respuesta abierta, ya que este tipo de instrumento permite obtener una estimación de los conocimientos didáctico-matemáticos de quienes han respondido al cuestionario, conocimientos a los que no siempre es posible acceder por simple observación o encuesta (Dane, 1990; Barbero, 1993; Godino, 1996). Durante el proceso de construcción del cuestionario se puso especial atención en la selección y formulación de situaciones problemáticas que cubrieran los contenidos vinculados al estudio de la probabilidad en el currículo chileno de Educación Primaria, y que permitieran acceder tanto al conocimiento matemático como didáctico del profesor (en el caso de este último tipo de conocimiento, se buscaron preguntas cuyas respuestas no fueran obvias, es decir, que no pudieran ser respondidas sólo desde el conocimiento matemático por personas que no tengan la experiencia de enseñar en Educación Primaria). Es importante señalar, además, que el cuestionario incluye situaciones problemas de elaboración propia y otros que se han extraído o reformulado de Cañizares (1997), Green (1983) y Fischbein y Gazit (1984).

El instrumento fue sometido a un proceso de validación que contempló dos aspectos: la validez del contenido, garantizada a partir de la selección de contenidos de los currículos involucrados (MINEDUC, 2012 y NCTM, 2000). Y la contrastación de la validez de los ítems, es decir, si éstos realmente miden lo que se pretende medir, para lo cual se consideró el juicio de expertos y el análisis de los ítems a partir de una aplicación piloto del instrumento. Por medio del juicio de expertos fue posible realizar una evaluación cualitativa de los ítems vinculada al grado de correspondencia, formulación y pertinencia. Esto nos permitió desechar los ítems con una baja valoración, seleccionar los que mejor se ajustan al contenido didáctico-matemático que se pretende evaluar, y también incluir y reformular algunos con base en los comentarios de los expertos. Con la nueva versión refinada del instrumento se realizó una aplicación piloto a 8 profesores de Educación Primaria en activo, lo que permitió obtener información empírica sobre las posibles limitaciones del instrumento en relación a aspectos como el lenguaje, comprensión de enunciados y preguntas, extensión, adecuación del tiempo, etc. A partir del análisis del procedimiento de pilotaje, se realizaron algunos cambios y se elaboró la versión definitiva para evaluar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad de los profesores de Educación Primaria (Vásquez y Alsina, en prensa).

4. Resultados

El cuestionario CDM-Probabilidad se aplicó a 93 profesores de Educación Primaria que imparten clases de matemática en los distintos cursos (1º a 6º año). Una vez recogidos los datos se codificaron y se analizaron las puntuaciónes totales. Para el análisis de la puntuación total se categorizaron las respuestas dadas según su grado de corrección, asignándoles las siguientes puntuaciones: “2” si la respuesta es correcta, “1” si la respuesta es parcialmente correcta, y “0” si la respuesta es incorrecta o no contesta (la puntuación máxima es de 44 puntos, puesto que está compuesto por 22 subítems).

Los puntajes totales obtenidos por los profesores fluctúan entre 1 y 28 puntos, de lo que se desprende que no hay ningún profesor que haya resuelto correctamente el cuestionario en su totalidad. Además, obtuvieron una puntuación media de 10,92 lo cual es muy bajo si consideramos que las puntuaciones totales del cuestionario pueden variar de 0 a

44 puntos, dado que dicha puntuación considera tanto las respuestas correctas como las parcialmente correctas. Asimismo, en la tabla 1 se observa que las puntuaciones totales se concentran, mayoritariamente, en torno a la puntuación media de los resultados que es de 10,92 con una desviación típica de 5,398 puntos.

Tabla 1: Estadísticos descriptivos de las puntuaciones totales

	Estadístico	**Error típ.**
Media	10,92	0,560
Mediana	11	
Moda	10	
Desviación típica	5,398	
Varianza	29,136	
Asimetría	0,489	0,250
Curtosis	0,595	0,495
Mínimo	1	
Máximo	28	
Rango	27	
Recuento	93	
Percentiles		
25	7	
50	11	
75	14,5	

Para poder establecer una comparación entre las distintas categorías de conocimiento, hemos recodificado las puntuaciones totales para cada tipo de conocimiento de acuerdo a una escala normada de 0 a 100, ya que en cada una de las categorías evaluadas mediante el Cuestionario CDM-Probabilidad el número de ítems y subítems difieren, por lo que las puntuaciones totales también difieren. Los primeros resultados globales evidencian que los profesores que han respondido al Cuestionario CDM-Probabilidad poseen un deficiente conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad, puesto que el 50% de los profesores no logra superar el 34% de las puntuaciones normadas (figura 2). Además se observa que estos profesores muestran tener, de manera leve, un mayor conocimiento común del contenido que de conocimiento ampliado del contenido y especializado.

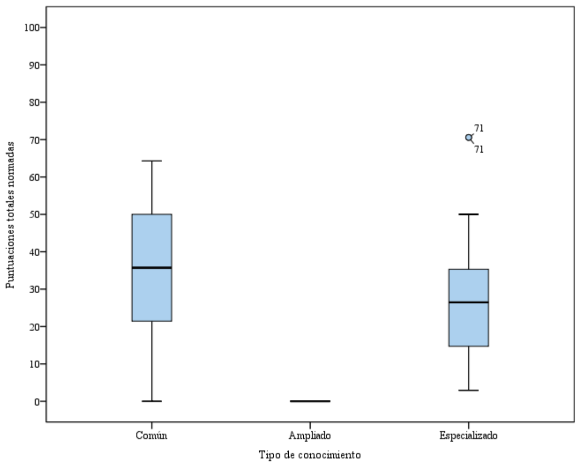


Figura 2:Distribución de las puntuaciones totales normadas según categorías del conocimiento didáctico-matemático

En síntesis, pues, los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario CDM-probabilidad indican, a nivel general, que estos profesores de primaria presentan grandes dificultades en relación al conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad.

5. Reflexiones finales

Los resultados obtenidos en esta investigación evidencian un conocimiento didáctico-matemático muy insuficiente, pues los participantes no logran superar el 23% de respuestas correctas en ninguno de los distintos aspectos evaluados. Dentro de los conocimientos que muestran un mejor nivel se encuentra el conocimiento común del contenido, pero aun así este es muy bajo e insuficiente. Por lo tanto, estos profesores no cuentan con un nivel de conocimientos adecuados que les permita desempeñar de manera exitosa la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Es más, de acuerdo a lo presentado en el capítulo 5, éstos presentan a nivel de conocimiento común del contenido sobre probabilidad más errores y dificultades para resolver las situaciones problemáticas, que alumnos españoles de 10-14 años que han participado en estudios en que se presentan situaciones problemáticas bastantes similares a las nuestras (Cañizares, 1997) o que futuros profesores de educación primaria que han participado en estudios similares al nuestro. Quizás esto se deba a la poca preparación que han recibido durante su formación inicial, pues sólo un 31,2% de los profesores declaró haber recibido formación disciplinar sobre probabilidad durante su formación inicial.

Asi, a partir de los resultados obtenidos, se evidencia que la situación, en términos de conocimientos, es alarmante por lo que urge realizar una intervención que permita mejorar, adquirir y desarrollar los conocimientos didáctico-matemáticos sobre probabilidad de los profesores de educación primaria en activo, en sus distintas facetas. Dicho programa de intervención deberá considerar el desarrollo de conocimientos vinculados a la probabilidad como objeto matemático, conocimientos vinculados directamente con la didáctica de la probabilidad, así como promover la integración entre ambos tipos de conocimientos. De modo tal que permita contribuir al mejoramiento de la preparación para enseñar probabilidad de los profesores de educación primaria.

Referencias

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers` mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), Handbook of Research on Teaching (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Barbero, M. (2003). Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas. Madrid: UNED.

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, Mª.M (2012). El currículo de estadística. Reflexiones desde una perspectiva internacional. Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 59, 9-17.

Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (2008). Joint ICMI and IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI and IASE.

Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (Eds.) (2011). Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study. New York: Springer.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teacher to teach probability. Journal of Statistics Education [en línea], 12 (1). Recuperado el 20 de diciembre de 2012, de www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

Batanero, C., Ortiz, J.J., y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. UNO, 44, 7-16.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cañizares, M. J., Ortiz, J. J., Batanero, C., y Serrano, L. (2002). Probabilistic language in Spanish textbooks. En B. Phillips (Ed.), ICOTS-6 papers for school teachers (pp.207-211). Cape Town: IASE.

Dane, F. C. (1990). Research methods. Thompson. Pacific Grow. CA.

Fischbein (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. Educational Studies in Mathematics. 15, 1-24.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En, L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 2-417-424), Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques 22, (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (pp. 3325 – 3326). Antalya, Turkey: CERME.

Godino, J. D. y Pino-Fan, L. (2014). Del "Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) al "Conocimiento Didáctico - Matemático" (CDM). Disponible en, vimeo.com/95495193

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), Joint ICMI/IASE Stud: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI and IASE.

Godino, J. D., Gonzato, M., y Fernández, L. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.

Green, D. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, 2, Teaching Statistics Trust. (pp. 766-783).

Hill, H. C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372-400.

Kvatinsky, T. y Even, R. (2002). Framework of teacher knowledge and understanding of probability. In B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. [CD-ROM]. Voorburg, Netherlands: International Statistical Institute.

Ministerio de Educación (2012). Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Ortiz J. J. (1999). Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Mohamed, N. y Serrano, L. (2010). Probabilidad frecuencial en profesores en formación. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII. Santander: SEIEM. CD ROM.

Pierce, R. y Chick, H. (2011). Teachers' beliefs about statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education (pp. 151-162). New York: Springer.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 1). REVEMAT, 8 (2), 1-49. http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p1

Pino-Fan, L., Font, V., y Godino, J. D. (2013). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), Matemática Educativa: La formación de profesores (pp. 137-151). México, D. F. : Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Serradó, A., Azcárate, P., y Cardeñoso, C. (2005). Randomness in textbooks: the influence of the deterministic thinking. Proceedings of CERME 4. Disponible en: http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/SerradAzcarCarde.pdf

Serradó, A., Azcárate, P., y Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. Salvador de Bahía, Brasil.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.), Training teachers to teach statistics (pp. 2-19). Voorburg: ISI.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 297–324). New York: Springer.

Vásquez, C., y Alsina, A. (2014). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: Diseño, Construcción y Validación de un Instrumento de Evaluación. BOLEMA. (En prensa).

Evolución de las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes para profesor de secundaria: el caso de biología

José María Cardeñoso[1] *y Amable Moreno*[2]

[1]josemaria.cardenoso@uca.es, Universidad de Cádiz
[2]amoreno@fce.uncu.edu.ar, Universidad Nacional de Cuyo

Resumen

En este trabajo se analiza la evolución de las tendencias de pensamiento probabilístico de 325 estudiantes para profesor de biología para la educación secundaria, de la provincia de Mendoza, Argentina. Se aplicó el análisis de clusters, análisis discriminante, test de Pearson, y el gráfico de líneas. El marco de referencia es el sistema de categorías para la determinación de las tendencias de pensamiento probabilístico propuesto por Moreno (2014). La caracterización de las mismas está asociada a la capacidad para reconocer la aleatoriedad, siendo los argumentos para justificarla: causalidad, multiplicidad e incertidumbre; los argumentos para justificar la estimación subjetiva de la probabilidad: contingencia, laplaciana, frecuencial, equiprobabilidad y experiencial. Pero no se ha encontrado asociación estadísticamente significativa entre las tendencias de pensamiento probabilístico con la edad y con el nivel propedéutico de los estudiantes; pero si se ha encontrado dependencia con el instituto educativo. Se encontró mayor presencia de las tendencia *contingencia* en los dos primeros años; y de *incertidumbre* en los dos últimos años.

Palabras clave: educación probabilística, formación del profesorado de biología, evolución de las tendencias de pensamiento.

.

1. Introducción

En este trabajo se analizan las características asociadas a las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes para profesor de biología de la provincia de Mendoza, Argentina. Las tendencias encontradas son: Determinista, Incertidumbre, Personalista y Contingente (Moreno y Cardeñoso, 2014). La caracterización de las mismas está asociada a ciertos factores, como es la capacidad para reconocer sucesos aleatorios, los argumentos que utilizan para justificarlos: causalidad, multiplicidad e incertidumbre; los argumentos que emplean para justificar la estimación de la probabilidad: contingencia, laplaciana, frecuencial, y equiprobabilidad.

Sin embargo, no se ha encontrado asociación entre las tendencias de pensamiento probabilístico con la edad y el nivel propedéutico de los estudiantes; no ocurriendo lo mismo con el instituto educativo. Lo que nos hace reflexionar acerca de la necesidad de una profunda revisión del currículo del profesorado de biología, con miras a lograr una formación que les permita concretar la enseñanza de la probabilidad en el nivel de secundaria, cuestión que desde nuestro punto de vista, se ha de afrontar, trabajando desde las ideas y significados que estos estudiantes le dan a la probabilidad, cuestión desarrolla ampliamente por Batanero (2005).

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 299-306). Granada, 2015.

2. Marco Teórico

Los ciudadanos de una sociedad del siglo XXI, como la nuestra donde la información y su interpretación relativa es imprescindible, deben poseer capacidades y habilidades que le acerquen a lo que podem os llamar la cultura estadística de un estudiante universitario, claramente inferior a lo podríamos desear (Nikiforidou; Lekka y Pange, 2010). De aquí que un objetivo de la formación de los futuros profesores de secundaria, encargados de formar estudiantes en Biología, es la alfabetización estadística.

Un estudiante de ciencias biológicas requiere poseer habilidades vinculadas a la selección y organización de información pertinente para el conocimiento que se pretende construir. Para el logro del desarrollo de la alfabetización estadística, es imprescindible que los estudiantes para profesor de Biología logren la comprensión de las ideas fundamentales de la misma (Garfield y Ben-Zvi, 2004).

Así entendemos que el razonamiento estadístico es la manera en la cual las personas razonan con ideas estadísticas y el sentido que le dan a la información estadística, como afirma Garfield (2002), lo cual implica hacer interpretaciones basadas en conjuntos de datos y sus representaciones, imprescindible para una constucción significativa del conocimiento biológico. En definitiva, un docente de biología, requiere razonar estadísticamente, lo cual significa entender y explicar los procesos estadísticos e interpretar completamente los resultados estadísticos.

El razonamiento estadístico como afirma Azcárate (1996), puede ser necesario para conectar un concepto con otro y combinar ideas sobre los datos y el azar o la incertidumbre que los fenómenos biológicos conllevan. Por tanto, del análisis de estas ideas, se puede inferir que la noción de probabilidad es una de los constructos relebantes para el futuro profesor de biología, involucrando a su vez, la noción de aleatoriedad.

Para Moreno (2014), la aleatoriedad es modelizable como una magnitud que caracteriza la incertidumbre de ciertos fenómenos y la probabilidad es una medida relativa, al menos ordinalmente considerada, del grado de certeza en la verificación de un evento. Desde esta visión, como marco sintetico de referencia, Cardeñoso (2001) ha propuesto; un sistema de categorías para la determinación de las tendencias de pensamiento probabilístico. En la investigacion de Moreno (2014), hemos utilizado como marco de utilizado este sitema de categorías que detallamos a continuación, y además compartimos con el autor su perspectiva epistemológica socio constructivista, según la cual entendemos el conocimiento como sistemas de ideas con diferentes formas de concreción y articulación, que está sometido a evolución, reestructuración y reorganización continua, producto de la interacción con el medio.

Desde dicho marco conceptual, y apoyandose en la investigación exploratoria de Azcárate (1996) se organiza el mencionado sistema de categorías, donde se recoge las diferentes argumentaciones que en la historia del conocimiento de referencia se han utilizado para argumentar el reconocimiento de la aleatoriedad y la estimación de la probabilidad.

Presentamos a continuación dichas categorías, aportando una breve caracterización de las misma, donde las cuatros primeras se relacionan con la dimensión del reconocimiento de la incertidumbre de un suceso y las cinco siguientes con la estimación de la probabilidad de ocurrencia de un suceso en un determinado fenomeno de referencia.

Este está compuesto por:

- ***Causalidad****:* Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad explicaciones en función de los diversos factores causales o en la ausencia de posibilidad de su control.

- ***Multiplicidad:*** Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la existencia de múltiples posibilidades en el desarrollo del fenómeno.
- ***Incertidumbre:*** Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la propia imprevisibilidad del suceso, sin profundizar en su explicación o análisis.
- ***Subjetiva:*** Argumentaciones en las que utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad consideraciones referidas a la propia vivencia o creencia subjetiva.
- ***Contingencia:*** Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la comparación entre los casos favorables y desfavorables de un suceso.
- ***Laplaciana:*** Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la proporción entre los casos favorables y desfavorables del fenómeno.
- ***Frecuencial:*** Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la lectura frecuencial del fenómeno o de la información aportada.
- ***Equiprobabilidad:*** Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en justificaciones desde la equiposibilidad entre los resultados del fenómeno.
- ***Experiencial:*** Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en criterios fruto de la experiencia personal.

3. Metodología

Se aplicó un cuestionario con cuarenta y ocho ítems; veinticuatro relativos a las características sociodemográficas de los estudiantes; doce al reconocimiento de la aleatoriedad con sus respectivas argumentaciones y otros veinticuatro ítems relativos a la estimación de la probabilidad. Las respuestas de los estudiantes se analizaron a la luz de técnicas estadísticas: Transformación de las respuestas en variables cuantitativas; análisis de clusters, análisis discriminante, Test de Pearson y Gráfico de líneas. También, se calcularon los índices de dificultad y de discriminación, obteniéndose resultados satisfactorios.

4. Resultados y Discusión

Los estudiantes que participaron del estudio se distribuyen en distintos institutos de formación docente de la provincia de Mendoza, Argentina.

En el Instituto de Formación Docente 9-002 de la Capital de Mendoza, respondieron al cuestionario 154 estudiantes (47,38 %); del instituto de gestión privada TP-13 contestaron 21 estudiantes (6,5 %); del instituto 9-001 ubicado en el departamento de San Martín contestaron 60 estudiantes (18,46 %); del instituto 9-011 del departamento de San Rafael contestaron 55 estudiantes (16,92%); del instituto 9-004 del departamento de Tunuyán, contestaron 35 estudiantes (10,77%).

En primer lugar se determinaron las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes mediante el análisis de clusters y el discriminante; donde se determinaron cuatro tendencias de pensamiento: Determinista, Incertidumbre, Personalista y Contingencia.

La tendencia al *Determinismo*, es la que logra el menor reconocimiento de la aleatoriedad, hecho que motivó la denominación del grupo. Cuando niegan la aleatoriedad lo hacen desde la causalidad, incertidumbre y desde la multiplicidad (Moreno, Cardeñoso & González-García, 2014d). Cuando estiman la probabilidad lo hacen desde la equiprobabilidad, como sesgo y no como una categoría apropiada.

La tendencia hacia la *Incertidumbre*, es la que logra el mayor reconocimiento de la aleatoriedad. Fundamentan este reconocimiento desde la imprevisibilidad del suceso; es decir desde la categoría que hemos denominado incertidumbre, lo que motivó la denominación de grupo. En segundo lugar argumentan desde la multiplicidad, es decir que consideran los posibles resultados en la ocurrencia del suceso; no por esto descartan los argumentos causales, ya que los mismos tienen cierta relevancia, dado que alcanzan un valor superior a la media de la categoría. En cuanto a la estimación de la probabilidad, la equiprobabilidad alcanza el valor máximo en este grupo, mientras que la categoría laplaciana alcanza el valor mínimo.

Tabla 1 Características asociadas a las tendencias de pensamiento probabilístico

Variable	Chi cuadrado de Pearson	Valor p	Conclusión
Nivel Propedéutico	$\chi^2_{(9)} = 9{,}587$	0,385	Independencia
Edad de los estudiantes	$\chi^2_{(12)} = 13{,}736$	0,319	Independencia
Instituto Educativo	$\chi^2_{(12)} = 22{,}345$	0,034	Dependencia
Reconocimiento de la aleatoriedad	$\chi^2_{(36)} = 223{,}534$	0,000	Dependencia
Reconocimiento de la aleatoriedad desde la causalidad	$\chi^2_{(24)} = 55{,}958$	0,004	Dependencia
Reconocimiento de la aleatoriedad desde la multiplicidad	$\chi^2_{(21)} = 42{,}468$	0,000	Dependencia
Reconocimiento de la aleatoriedad desde la incertidumbre	$\chi^2_{(33)} = 161{,}598$	0,000	Dependencia
Reconocimiento de la aleatoriedad desde la Subjetividad	$\chi^2_{(6)} = 69{,}549$	0,000	Dependencia
Estimación de la probabilidad desde la Contingencia	$\chi^2_{(24)} = 69{,}381$	0,000	Dependencia
Estimación de la probabilidad desde la Laplaciana	$\chi^2_{(21)} = 78{,}467$	0,000	Dependencia
Estimación de la probabilidad desde la Frecuencial	$\chi^2_{(27)} = 60{,}713$	0,000	Dependencia
Estimación de la probabilidad desde la Equiprobabilidad	$\chi^2_{(30)} = 243{,}545$	0,000	Dependencia
Estimación de la probabilidad desde la Experiencial	$\chi^2_{(18)} = 275{,}583$	0,000	Dependencia

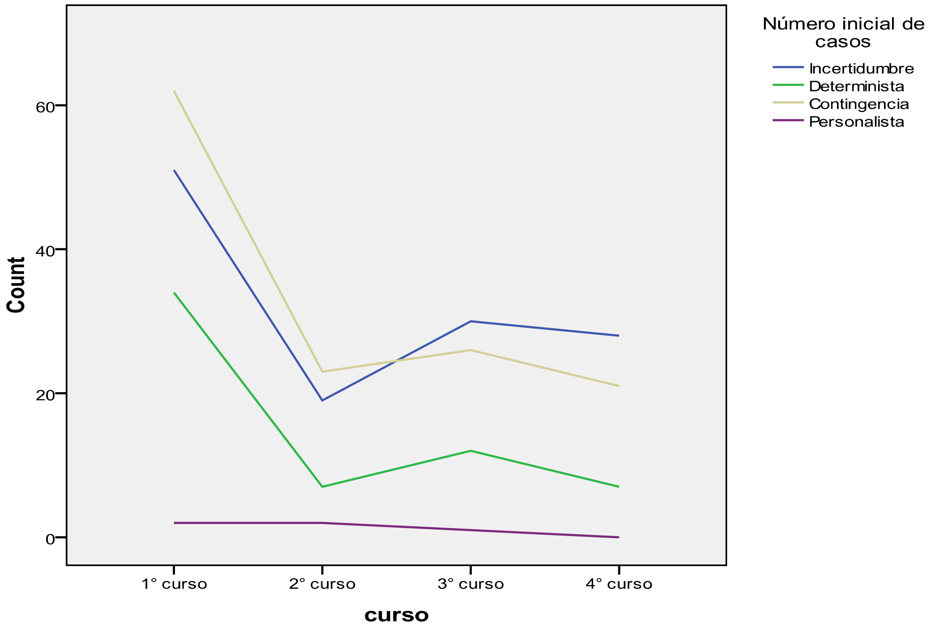
La tendencia hacia el *Personalismo* es el tercer grupo en el reconocimiento de la aleatoriedad, y es el grupo que más emplea la subjetividad para argumentar el reconocimiento de la aleatoriedad, si bien es superado por el argumento incertidumbre. Cuando niegan la aleatoriedad, también argumentan desde la subjetividad; y en cuanto a la estimación de la probabilidad se destaca el uso de la categoría experiencial, en relación con los otros tres grupos.

La tendencia hacia la *Contingencia,* es el segundo grupo en el reconocimiento de la aleatoriedad, se destaca el uso de argumentos basados en la multiplicidad y en la causalidad; sin embargo la categoría más usada es la incertidumbre. Cuando estiman la probabilidad lo hacen fundamentalmente desde las categorías contingencia, laplaciana y frecuencial con valores máximos.

Luego, se aplicó el test de Pearson para analizar la asociación entre las tendencias de pensamiento probabilístico y las variables, como se muestran en la Tabla 1.

Estos resultados nos pueden ayudar a dilucidar la complejidad del pensamiento probabilístico.

A pesar de la falta de asociación entre las tendencias de pensamiento probabilístico y los niveles propedéuticos de los estudiantes, hemos realizado un análisis pormenorizado de la presencia de cada una de ellas por nivel.



-
- Figura 1: Gráfico de líneas de las tendencias de pensamiento probabilístico en función del nivel propedéutico
-

En el Gráfico de líneas y la Tabla 2, se muestra que en el primer curso de la carrera, la tendencia hacia la *Contingencia* es la que tiene mayor presencia; que es el grupo de los estudiantes de menor edad y menor formación académica. En segundo lugar, se presenta en menor medida, la categoría *Incertidumbre*, cuya característica fundamental es el reconocimiento de la aleatoriedad desde la imprevisibilidad del suceso (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2014a, 2014c); mientras que la estimación de la probabilidad es argumentada desde la equiprobabilidad, denotando la falta de ideas formales acerca de la probabilidad (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2012b, 2014d).

Tabla 2. Tabla de contingencia del "nivel propedéutico" y "tendencia de pensamiento"

Nivel Propedéutico	Incertidumbre	Determinista	Contingencia	Personalista
1° curso	34,20 %	22,80 %	**41,60 %**	1,30 %

2° curso	37,20 %	13,70 %	**45,10 %**	3,90 %
3° curso	**43,50 %**	17,40 %	37,70 %	1,40 %
4° curso	**50,00 %**	12,50 %	37,50 %	0,00 %

En el segundo curso, la tendencia con mayor presencia es la *Contingencia* y en segundo lugar la *Incertidumbre,* de manera similar al primer curso.

En el tercer curso, se destaca la tendencia *Incertidumbre*, Esta tendencia se caracteriza por alcanzar el mayor reconocimiento de la aleatoriedad y estimar la probabilidad desde la equiprobabilidad (Lecoutre, 1985, 1992; Lecoutre & Durand, 1992; Lecoutre y Cordier, 1990; Lecoutre, M.P.; Rovira, K.; Lecoutre, B. & Poitevineau, J., 2006), como sesgo; es decir, que no representa un argumento apropiado.

Finalmente, en el cuarto curso, aparece en primer lugar la tendencia *Incertidumbre* y luego la tendencia *Contingencia*, de manera similar al tercer curso.

5. Conclusiones

Desde nuestra visión ontológica y holística del pensamiento probabilístico, podemos concluir que en los dos primeros niveles; donde predomina la presencia de los estudiantes más jóvenes; la tendencia dominante es la *Contingencia*.

Las concepciones que tienen los estudiantes del Profesorado de Biología en Formación; probablemente influenciadas por la conceptualización que le brindan las disciplinas biológicas, logran un importante desarrollo de la capacidad que les permite reconocer la aleatoriedad; y pierden presencia las nociones propiamente probabilísticas. Por otra parte, se ha encontrado una relación de dependencia entre las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes y el instituto donde se cursa la carrera. Creemos que la razón de este hecho es la formación académica diferenciada del profesorado que tiene a su cargo la preparación de los estudiantes, pero es algo que requiere una mayor investigación para confirmarlo.

Por lo tanto, queda planteada la necesidad de la revisión del currículo del profesorado de Biología de la provincia de Mendoza (Argentina), acorde con las directrices internacionales para la educación superior siguiendo a la UNESCO (1998), y más concretamente las orientaciones que realiza de cara al desarrollo sostenible la UNESCO (2005), a través de lo que hoy en día, desde el campo educativo, se conoce como sostenibilidad curricular (Cardeñoso, Azcárate y Oliva, 2013).

Necesitamos que se transforme la existencia de aulas donde se trabaja la probabilidad y, donde a menudo ocurre, que no se desarrollan concepciones sostenibles de probabilidad, como herramientas estratégicas que se pueden activar, para las tomas de decisiones en situaciones aleatorias cotidianas (Moreno, Cardeñoso y Gonzaléz-García, 2012a).

Debemos superar lo que ya Shaughnessy, afirma (1992: 465) "como personas prototípicas para las cuales el aula no logró anclar el concepto de probabilidad en su pensamiento individual como herramienta estratégica que se activa de decisiones en situaciones de azar fuera de la escuela". Este fenómeno es un obstáculo epistemológico, ya que estas personas no podían alcanzar el objetivo central de la alfabetización estadística, es decir, la adquisición de conceptos, estructuras e ideas "como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental" en palabras de Freudenthal, (1983: IX). Confirmando lo que Batanero, Contreras y Díaz (2011) proponen; debemos investigar acerca de los componentes esenciales en la preparación de los profesores para enseñar la probabilidad y el método adecuado en el que cada componente debe ser enseñado.

Referencias

Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Editorial Comares.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. En R. Farfán y cols. (Eds.) *Relime*, 8 (3), 247-263.

Batanero, C.; Contreras, J.M. y Díaz, C. (2011). Experiencias y Sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Paradígma*, 32 (2). Recuperado el 12/12/2014 http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Paradigmanuevo.pdf

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad.* Tesis Doctoral (leída 1998). Cádiz: Universidad de Cádiz. Ed: Servicio de Publicaciones de la UCA.

Cardeñoso, J. M.; Azcárate, P y Oliva J. M. (2013). La sostenibilidad en la formación inicial del profesorado de Secundaria: incidencia en los estudiantes de Ciencias y Matemáticas. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* 10 (extra), pp. 780-796

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer: Dordrecht

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2004). Research on statistical literacy, reasoning, and thinking: issues, challenges, and implications. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 397-409). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lecoutre, M. P. (1985). Effect d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur le judgments probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*, 193.213.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Lecoutre, M. P. y Cordier, J. (1990). Effect du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP, 372*, 9-22.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: etude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 357-368.

Lecoutre, M. P.; Rovira, K.; Lecoutre, B. & Poitevineau, J. (2006). People´s Intuitions about randomness and probability: an empirical study. *Statistics Education Research Journal,* Alexandria, v.5, n.1, p. 20-35.

Moreno, A. (2014). *Un estudio comparativo de las tendencias de pensamiento probabilístico de los profesores de biología y de matemática en formación.* Tesis Doctoral Inédita, leída en Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Granada.

Moreno, A. & Cardeñoso, J. M. (2014). Overview of prospective mathematics teachers´probabilistic thinking. *ICOTS 9. 9th. International Conference on Teaching Statistics.* Flagstaff, Arizona, USA, 13-18 July 2014. "Sustainaility in statistics education".

Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2012a). Las dificultades detectadas en un grupo de estudiantes del profesorado de educación primaria cuando afrontan la asignación de probabilidades. En M. Marín-Rodíguez y N. Climent (Eds.) *Actas Investigación en*

Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM XV, Simposio de la SEIEM, (pp. 153-178) Ciudad Real: SEIEM. Recuperado el 15/11/2013 http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXVSimposio.pdf

Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2012b). Un estudio exploratorio de las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes del profesorado de biología. *SEIEM, Simposio de la Sociedad Española De Investigación En Educación Matemática,* 16 th, (pp. 153-180) celebrado Baeza, España. Recuperado el 15/03/2014 http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXVSimposio.pdf

Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2014a). La Aleatoriedad en los Profesores de Biología y de Matemática en Formación: Análisis y Contraste de Significados. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,* 11(2), 198-215.

Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2014b). Los significados de la aleatoriedad de los profesores de matemática y de biología en formación. *ALME 27. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Mexicano de Matemática Educativa. A.C.* Vol. 27, pp. 1963-1972.

Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (en prensa 2014d, Volumen 28, número 50). El Pensamiento Probabilístico de los Profesores de Biología en Formación. *Bolema: Boletim de Educação Matemática.*

Nikiforidou, Z.; Lekka, A. y Pange, J. (2010). Statistical literacy at university level: the current trends. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 9, 795–799.

UNESCO (1998). *Informe final. Conferencia Mundial sobre la Educación Superior. La Educación Superior y el desarrollo humano sostenible. La Educación superior en el siglo XXI. Visión y acción.* UNESCO: París.

UNESCO (2005). *Education for Sustainable Development. United Nations Decade (2005-2014).* (Consultado el 2 de septiembre de 2011). http://www.unesco.org/new/en/education/themes/leading-the-international-agenda/education-for-sustainable-development

Exigencia cognitiva de las actividades de estadística en textos escolares de Educación Primaria

Audy Salcedo

audy.salcedo@ucv.ve, Universidad Central de Venezuela

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar la exigencia cognitiva de las actividades de estadística propuestas para el estudiante en los libros de matemáticas para la educación Primaria de la Colección Bicentenario de Venezuela. Se analizan los 46 enunciados propuestos a los estudiantes en todos libros de la colección en el tema de estadística, que podrían ser considerados actividades. Se descartaron 25 enunciados por no estar relacionado con el contenido estadístico o tratarse de información. Se utilizó el modelo de Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000), ajustado para el contenido estadístico, para analizar los 21 enunciados restantes y se encontró que 17 de ellos pertenecen a las categorías de baja demanda cognitiva del modelo utilizado.

Palabras clave: Estadística; actividades para el estudiante; exigencias cognitivas, texto escolar de Matemáticas.

1. Introducción

El texto escolar es uno de recursos más utilizados en la enseñanza de la matemática en las instituciones escolares de la mayoría de los países. Para muchos docentes, el texto escolar es la representación del currículum en el aula; es el saber docto transformado en saber a enseñar, de allí que en muchas ocasiones es quien determina el currículo a ser enseñado, el currículo real. Investigaciones sobre las características de los textos escolares de matemática han evidenciado que las actividades para los estudiantes o tareas, como también se les denomina, son uno de los elementos invariantes de esos textos (Monterrubio y Ortega, 2012). Esas actividades pueden ser ejercicios, problemas, propuestas de investigación, u otras sugerencias, pero en todas se busca brindar al estudiante un espacio para su trabajo sobre los contenidos estudiados o por estudiar. Grouws, Smith y Sztajn (2004) señalan que en la clase de matemática se invierte un tiempo importante para que los estudiantes realicen actividades, generalmente, tomadas del texto escolar.

En este trabajo se presenta el análisis de las actividades de estadística propuestas para el estudiante, en los libros de matemática para la educación primaria de la Colección Bicentenario de Venezuela, para determinar el nivel de exigencia cognitiva, según el modelo de Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000), ajustado para el contenido estadístico. La educación primaria venezolana comprende seis años, lo más frecuente es que se curse desde los seis hasta los doce años de edad, y conduce a la obtención del certificado de educación primaria. La Colección Bicentenario es una serie de textos escolares para la educación primaria y media; diseñados, producidos, publicados y distribuidos (de forma gratuita) por el Ministerio del Poder Popular para la Educación de Venezuela. El análisis de las actividades propuestas en los libros de matemática, desde la perspectiva de las exigencias cognitivas, puede ayudar a conocer el tipo y nivel de aprendizaje que auspicia el texto analizado.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 307-315). Granada, 2015.

2. Las actividades en los textos escolares de matemáticas

Las actividades para el estudiante son un elemento característico del texto escolar de matemáticas. En ocasiones, se utilizan para que el estudiante evoque definiciones, establezca diferencias entre conceptos o verifique su destreza para desarrollar procedimientos, pero también se utilizan para promover la síntesis conceptual y procedimental, la aplicación de las matemáticas en otras áreas y profundizar los conocimientos. Las actividades pueden presentarse al comienzo del libro, en medio o al final. En el primer caso, suele usarse para motivar el estudio del tema o como un problema del cual se deriven los conceptos y procedimientos a estudiar. Cuando se encuentran en el medio, se utilizan para practicar los algoritmos, conceptos o procedimientos previamente estudiados, y cuando están al final, tienden a ser actividades de recapitulación, donde el estudiante pone a prueba lo estudiado en toda la unidad o para que enfrente situaciones de aplicación en nuevos contextos.

Para Hsu (2013) la enseñanza de las matemáticas en el aula se centra, fundamentalmente, en las tareas y su ejecución normalmente implica la interacción profesor – alumno con el fin de facilitar el aprendizaje. El texto escolar de matemáticas suele ser el principal recurso del profesor al momento de plantear actividades para los estudiantes, por lo que analizar las actividades que contienen los textos escolares parece una forma adecuada de aproximarse al tipo de actividades que pueden plantear los profesores en el aula.

Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000) proponen un modelo para clasificar las actividades propuestas al estudiante en matemáticas. El modelo centra su atención en la demanda cognitiva, entendiendo por esta el nivel de pensamiento que la actividad exige al estudiante para desarrollarla y resolverla con éxito. Los autores definen cuatro niveles de demanda cognitiva de las actividades, sin embargo para su aplicación en este trabajo, se han realizado algunos ajustes en los niveles para circunscribirlos al caso del contenido estadístico:

Tareas de memorización. Actividades para reproducir reglas, definiciones, formulas sin que implique la comprensión de los conceptos estadísticos involucrados. Resolver la actividad solo necesita del recuerdo de un conocimiento estadístico previamente estudiado, no la comprensión de un procedimiento o de los conceptos. La interpretación de gráficos se remite a la lectura literal del gráfico: dónde hay más, donde hay menos. No se trata de una real interpretación. En la tarea no hay ambigüedad sobre lo que se debe realizar y cómo se debe hacer, la actividad es clara y directa.

Tareas de procedimiento sin conexión. Son actividades algorítmicas, buscan el uso de procesos rutinarios. La utilización del procedimiento estadístico es evidente, descrito por la instrucción de la actividad, no hay ambigüedad sobre lo que hay qué hacer y cómo hacerlo. Exige una limitada demanda cognitiva para completar con éxito la actividad. Se utilizan los instrumentos de la estadística sin mayor comprensión de los conceptos. Aunque utilice el lenguaje estadístico no lo hace con propiedad, no hay conexión con los conceptos estadísticos o significados que subyacen en el procedimiento. No se necesitan explicaciones sobre el procedimiento que se utiliza para dar respuesta a la actividad. Se centran en la producción de respuestas correctas en lugar del desarrollo de la comprensión de los conceptos estadísticos. En la interpretación de gráficos compara los datos presentes en el gráfico y realiza conclusiones simples, directas.

Tareas de procedimiento con conexión. Exigen la atención de los estudiantes sobre el uso de procedimientos con el fin de desarrollar niveles más profundos de la comprensión de ideas y conceptos estadísticos. Los enunciados sugieren, explícita o implícitamente, el procedimiento a seguir, pero son procedimientos generales que buscan cerrar las conexiones con los conceptos estadísticos. El estudiante debe utilizar las ideas y conceptos estadísticos para determinar cuál procedimiento se ajusta mejor a la situación. Por lo general, están representados en varias formas, como diagramas, manipulaciones, símbolos y situaciones problemáticas, ya que se considera que las conexiones entre varias representaciones ayudan a desarrollar el significado. Requieren de cierto grado de esfuerzo cognitivo. Las actividades se enmarcan en un contexto particular donde el estudiante debe utilizar las ideas estadísticas y desarrollar la comprensión. La interpretación de gráficos exige la extracción de información a partir de los datos en su contexto.

Tareas para hacer estadística. Son actividades que requieren de un pensamiento complejo y no algorítmico. La actividad exige comprender los conceptos, los procedimientos y las relaciones estadísticas. Las instrucciones de la actividad no sugieren explícitamente la vía por la cual se puede encontrar la solución, por lo cual exige del estudiante explorar y comprender la naturaleza de los conceptos estadísticos, procesos o relaciones. Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. En el trabajo con gráficos el estudiante debe hacer inferencia, considerando los datos y el contexto analizándolos de forma crítica.

Stein y Smith (1998) sostienen que las actividades que realiza el estudiante en su aprendizaje de las matemáticas no sólo determinan lo qué aprenden, sino también cómo lo aprenden, pero además influye en cómo llegan a pensar, desarrollar, utilizar y dar sentido a la matemática. Esto es interesante, ya que sugiere, ajustando al caso de esta investigación, las actividades planteadas al estudiante tienen influencia en el aprendizaje que pueden lograr de la estadística. De allí la importancia de examinar la demanda cognitiva de esas actividades, particularmente las que se encuentra en los textos escolares.

3. La investigación

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que se realizan sobre los textos escolares de matemáticas. En este caso, se presenta un estudio de tipo exploratorio, el cual permite una aproximación al problema del análisis textos escolares de matemáticas y, en particular, de las actividades de estadística propuesta para los estudiantes de primaria en los textos de la Colección Bicentenario (CB) del Ministerio del Poder Popular para la Educación. La escogencia de los textos escolares de la CB se debe a que son producidos por el Ministerio de Educación venezolano, por lo que se puede presumir que son los textos escolares que mejor responden a los planes y programas de estudios oficiales.

Se consideraron todas las secciones de los textos que podrían contener actividades propuestas para los estudiantes en los seis libros de educación primaria de la CB. La tabla 1 muestra el número de enunciados, posibles actividades para el estudiante, distribuidas por secciones que se encuentran en los seis grados de educación primaria.

Tabla 1. Actividades para estudiantes clasificadas por sección

Sección	Frecuencia
¡Algo para conversar!	10
¡Algo para pensar!	2
¡Algo para investigar!	8
¡Algo para conocer!	17
Ejercicios	9
Total	46

Para realizar la clasificación de las actividades se les proporcionó a tres profesores de estadística las 46 actividades propuestas para los estudiantes, una copia del libro y las definiciones utilizadas para la clasificación. Los profesores colaboradores trabajan en la asignatura Estadística Aplicada a la Educación, con una experiencia mínima de 5 años dictando la asignatura para la formación de futuros maestros de primaria. Los docentes colaboradores realizaron de forma individual su propia clasificación de las actividades, luego se compararon las clasificaciones. Posteriormente, se sostuvo una reunión con los profesores colaboradores para discutir las divergencias y se logró una clasificación única.

En primer lugar se estableció la vinculación de las actividades con los contenidos de estadística estudiados en las unidades donde se encuentra. Asimismo se revisaron los enunciados para verificar si eran realmente una actividad para estudiante o solo se presentaba información. Esto se debe a que la revisión inicial, develó la presencia de actividades que no se relacionaban con estadística, así como de informaciones colocadas en las secciones de actividades. Se encontraron 13 actividades no relacionadas con el tema de estadística y 12 enunciados que solo presentaban información. La figura 1 es un ejemplo de las actividades excluidas por no estar relacionadas con estadística.

Figura 1. Ejemplo de actividad no relacionada con el tema de estadística. (3er grado, pág. 165)

Los 21 enunciados que efectivamente son actividades de estadística para el estudiante se clasificaron mediante modelo de Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000), ajustado para el contenido estadístico. Es importante destacar el caso de las actividades que tenían varias preguntas. En principio se le consideraban por separado, estableciendo el nivel de exigencia cognitiva para cada subparte, pero al final se le colocaba un único nivel de demanda cognitiva, el que correspondía a la actividad de mayor exigencia.

4. Resultados

A continuación se presenta la distribución, por grado, de las 21 actividades planteadas para el estudiante que quedaron luego de eliminar las no relacionadas con el tema de estadística y las que solo presentaban información.

Tabla 2. Número de actividades de estadística para estudiantes, clasificadas por sección y grado

Sección	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	Total
¡Algo para conversar!	0	1	0	1	0	2	4
¡Algo para pensar!	0	0	0	0	0	1	1
¡Algo para investigar!	1	1	0	2	1	1	6
¡Algo para conocer!	0	0	0	0	1	0	1
Ejercicios	6	0	1	1	0	1	9
Total	7	2	1	4	2	5	21

Lo primero que se debe destacar es que el mayor número de actividades se encuentra en primer grado con siete, seguido por sexto grado con cinco. El programa vigente indica que el objetivo general de estadística en primer grado es: *Recolecta y representa datos obtenidos en experiencias y encuestas simples*. El niño debe utilizar de forma adecuada la palabra *frecuencia* y los términos *más frecuente* y *menos frecuente*, además, de elaborar tablas y gráficos sencillos. Las actividades planteadas en el texto escolar se corresponden con esas metas y su número podría ser apropiado para un primer acercamiento con la estadística, aunque sin duda, demanda del docente un conjunto de actividades que permitan al estudiante consolidar lo estudiado en el texto.

En sexto grado, los estudiantes continúan con el trabajo de la recolección, organización y análisis de datos: utilizan, además de tablas y gráficos, las medidas de tendencia central y elaborando interpretaciones y conclusiones. En el texto escolar, no se trabaja con las medidas de tendencia central y solo se utilizan gráficos de barras; aun cuando en el programa se indica que también se debe trabajar con gráficos de líneas, de sectores circulares e histogramas. Esto, en parte, puede explicar el bajo número de actividades propuestas en ese grado. Algo similar ocurre en los otros grados donde el número de actividades varía entre 1 y 4. El bajo número de actividades, que presenta el texto escolar de matemática de la CB, plantea a los docentes una mayor exigencia en cuanto a las actividades que debe realizar en el aula para que el estudiante logre los aprendizajes deseados.

La siguiente tabla muestra la distribución de las actividades clasificadas según el nivel de demanda cognitiva y grado al que pertenecen.

Tabla 3. Actividades de estadística clasificadas según el nivel de demanda cognitiva y grado

Tareas	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	Total
De memorización	6	0	0	2	0	0	8
De procedimiento sin conexión	1	2	1	1	2	2	9
De procedimiento con conexión	0	0	0	1	0	3	4
Total	7	2	1	4	2	5	21

Las ocho actividades ubicadas en la categoría de *Tareas de Memorización* se encuentran en dos grados, 1ro y 4to. Se podría pensar que actividades con esta demanda cognitiva deberían encontrarse en todos los grados o solo en los grados iniciales, por el tratarse de educación primaria. Llama la atención que su presencia sea casi exclusiva del primer grado.

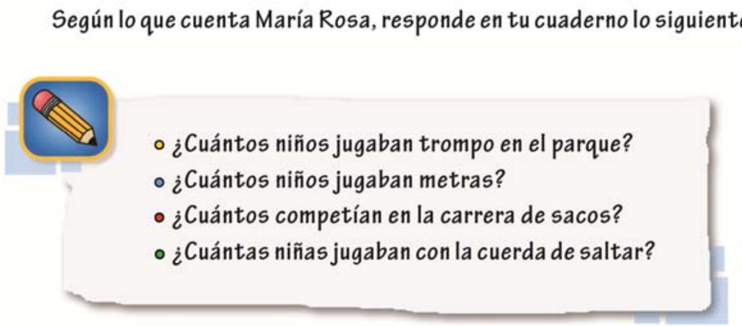
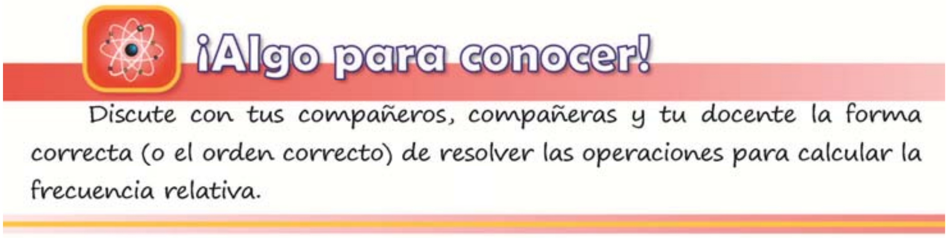


Figura 2. Ejemplos de *Tareas de memorización*. (1er grado, pág. 163)

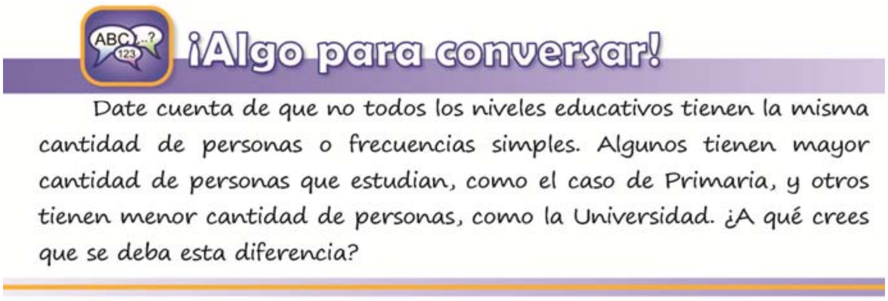
Las *Tareas de procedimiento sin conexión* aparecen en todos los grados, aunque el mayor número de actividades en un grado es dos. Estas son actividades donde se busca que el haga uso de uso de procesos estadísticos rutinarios, pero donde no hay vinculación entre las ideas estadísticas y el procedimiento utilizados.


¡Algo para conocer!

Discute con tus compañeros, compañeras y tu docente la forma correcta (o el orden correcto) de resolver las operaciones para calcular la frecuencia relativa.

Figura 3. Ejemplos de *Tareas de procedimiento sin conexión*. (5to grado, pág. 165)

En cuanto a las *Tareas de procedimiento con conexión* llama la atención su poca presencia en los textos escolares. Solo cuatro actividades de este tipo en los seis textos, concentradas en 4to y 6to grado. Se podría esperar un mayor número de *Tareas de procedimiento con conexión* en los grados finales de la primaria. En el análisis de los textos escolares, no se encontraron actividades que pudieran ser clasificadas de cómo de *hacer estadística*, es probable que los autores consideraran que es un nivel de exigencia elevado para la educación primaria.


¡Algo para conversar!

Date cuenta de que no todos los niveles educativos tienen la misma cantidad de personas o frecuencias simples. Algunos tienen mayor cantidad de personas que estudian, como el caso de Primaria, y otros tienen menor cantidad de personas, como la Universidad. ¿A qué crees que se deba esta diferencia?

Figura 4. Ejemplos de *Tareas de procedimiento con conexión*. (6to grado, pág. 155)

5. A manera de cierre

El análisis realizado sugiere que los textos escolares de matemática de la Colección Bicentenario presenta un bajo número de actividades para los estudiantes, en lo que respecta al contenido estadístico. Además un número importante de actividades fueron consideradas como no relacionadas con el contenido estadístico estudiado.

En relación con la demanda cognitiva de las actividades de estadística presentes en los textos escolares, predominan las de bajo nivel de exigencia. Esto significa que las actividades demandan que el estudiante muestre qué sabe, en algunos casos indicando que recuerda definiciones y fórmulas y en otros que puede reproducir procedimientos explicados en el texto. Se exige que el estudiante evidencie que tiene los conocimientos básicos de la estadística, pero sin que muestre la comprensión de ellos. Al considerar que los libros analizados corresponden a la educación primaria, parece adecuado que buena parte de las actividades busque el incremento del conocimiento, no obstante, se considera que se brindan pocas oportunidades a las actividades de procedimiento con conexión. Pareciera entonces que se busca que los estudiantes aprendan definiciones y procedimientos pero sin darle sentido estadístico.

El currículo de matemática de la educación primaria venezolana es de tipo espiral, por lo cual, un mismo contenido es tratado en varios grados y se aumenta el nivel de profundidad con que se estudia a medida que el estudiante avanza en la primaria. Por ello, podría esperarse que el nivel de exigencia cognitiva de las actividades propuestas a los estudiantes aumente de forma gradual desde el primer grado. Los resultados sugieren que los autores no ubicaron las actividades de tal manera que el nivel de exigencia cognitiva aumentara a medida que el estudiante avanzara en la primaria, tal como lo exige el programa.

La poca presencia de actividades para el estudiante en los textos escolares analizados, así como el sesgo hacia los niveles de baja demanda, colocan una mayor exigencia al trabajo de los docentes. Ellos deberán formular actividades que complementen las que se encuentran en los textos y que permitan la comprensión de los conceptos estadísticos y el cumplimiento de los objetivos planteados. Un problema que se puede presentar es que las actividades de los libros generalmente son tomadas por los docentes como referencia, en cuanto a demanda cognitiva. Investigaciones indican (por ejemplo, Stein, Grover, y Henningsen, 1996) que con frecuencia los docentes utilizan en sus clases las actividades que encuentran en los materiales curriculares y las planteadas por ellos son de un nivel de demanda cognitiva igual o menor a las que se hallan en esos materiales. Considerando además que los libros analizados no tienen una versión para el docente (con sugerencias didácticas), ni se encontraron materiales complementarios dirigidos al maestro, es probable que en el aula ellos planteen actividades semejantes a las aquí analizadas. Este material complementario para el docente puede ser fundamental en el caso de la estadística, por cuanto las investigaciones señalan que los maestros tienen problemas de formación en esta área, tanto en el contenido como en su didáctica (Zapata-Cardona y Rocha, 2013; Sanoja y Ortiz, 2013).

La resolución de problemas es un punto esencial en la enseñanza de las matemáticas. En el caso de la estadística, Franklin, Horton, Kader, Moreno, Murphy, Snider y Starnes (2005) plantean que la resolución de problemas es un proceso de investigación que involucra cuatro componentes: (a) la formulación de una pregunta, (b) la recolección de datos, (c) el análisis de los datos y (d) la interpretación de los resultados. Estos componentes deben trabajarse en todos los niveles previos a la educación universitaria para así lograr el fin último que es la formación estadística del ciudadano. También destacan que la variabilidad es un punto fundamental y debe estar presente en cada uno de los componentes antes mencionados. De acuerdo con el análisis realizado, en las actividades propuestas para los estudiantes, no parecieran considerar los cuatro componentes recomendados por Franklin et al. (2005), ya que la mayoría de las actividades son de tipo de memorización y de práctica de tareas algorítmicas, con lo cual, se favorece menos la comprensión conceptual de las ideas estadísticas y las posibilidades del desarrollo de la formación estadística del ciudadano venezolano.

Agradecimientos

Investigación financiada por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela bajo el número PI-07-8667-20131.

Referencias

Franklin, C., Kader, G., Newborn, D.S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Schaeffer, R. (2005), A Curriculum Framework for pre K-12 Statistics Education. Disponible en: http://www.amstat.org/education/gaise/

Grouws, D. A., Smith, M. S., y Sztajn, P. (2004). The preparation and teaching practice of U.S. Mathematics teachers: Grades 4 and 8. In P. Kloosterman, & F. Lester (Eds.), *The 1990 through 2000 mathematics assessments of the National Assessment of Educational Progress: Results and interpretations.* 221 – 269. Reston, VA: NCTM.

Hsu, Wei-Min (2013). Examining the Types of Mathematical Tasks Used to Explore the Mathematics Instruction by Elementary School Teachers. En: *Creative Education*, 4 (6), 396–404.

Monterrubio, M.C., Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación*, 358. Mayo-agosto 2012, pp. 471 – 496

Sanoja, J. E., y Ortiz, J. (2013). El conocimiento didáctico del contenido estadístico del maestro. En: A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas.* 153 – 166. Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela. Disponible en: http://saber.ucv.ve/jspui/handle/123456789/4666

Stein, M. K., Grover, B. W., y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), pp. 455 – 488.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M., y Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, pp. 268 – 275.

Zapata-Cardona, L., y Rocha, P. (2013). La clase de estadística más allá del currículo: un estudio de caso en la escuela primaria colombiana. En: A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas.* 153 – 166. Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela. Disponible en: http://saber.ucv.ve/jspui/handle/123456789/4666

Anexo 1: Textos escolares utilizados en el análisis

Duarte C., A., Moya R., A., Silva A., D., Gil G., D., Vásquez H., E., Vásquez S., F., Paredes A., H., Bustamante P., K., Gracia A., M., Reaño O., N., Mendoza G., O., Becerra H., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *La patria buena. Matemática Quinto Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Duarte C., A., Moya R., A., Silva A., D., Vásquez S., F., Torrealba M., H., Bustamante P., K., Gracia A., M., Márquez, M.Y., Serrano G., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *Triángulos, rectángulos y algo más. Matemática Segundo Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Moya R., A., Silva A., D., Vásquez S., F., Bustamante P., K., Gracia A., M., Márquez, M.Y., Serrano G., R., Becerra H., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *Aventuras de patacalientes. Matemática Tercer Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Moya R., A., Torrealba M., H., Márquez, M.Y., Becerra H., R., Serrano G., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *Contemos ... 1,2,3 y 4. Matematica Primer Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Rojas O. A., Duarte C., A., Moya R., A., Torres S., C., Silva A., D., Gil G., D., Vásquez H., E., Vásquez S., F., Paredes A., H., Bustamante P., K., Fernández, L.R., Gracia A., M., Reaño O., N., Becerra H., R., Rodríguez D., V. y Millán B., Z. (2011). *Contando con los recursos. Matemática Cuarto Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Rojas O. A., Duarte C., A., Moya R., A., Torres S., C., Silva A., D., Gil G., D., Vásquez H., E., Vásquez S., F., Paredes A., H., Bustamante P., K., Gracia A., M., Reaño O., N., Mendoza G., O., Becerra H., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *Hecho en Venezuela. Matemática Sexto Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Experiencia pedagógica de construcción de un blog por estudiante

Joan Fernando Chipia Lobo

joanfchipia@ula.ve, Universidad de Los Andes

Resumen

La investigación tuvo como propósito desarrollar una experiencia pedagógica de construcción de un blog por estudiante, en la asignatura de Bioestadística de la carrera de Medicina, Facultad de Medicina, Universidad de Los Andes, durante el semestre U-2013. La práctica educativa buscó que el estudiante universitario alcance un conocimiento más allá de la memorización de procedimientos algorítmicos de Bioestadística, se solicitó una serie de actividades aplicativas, analíticas y críticas relacionadas con salud, en su carrera y cotidianidad, abarcando conceptos básicos de Estadística, Estadística Descriptiva y Probabilidad, se utilizó un blog para que así el participante pueda determinar la utilidad formativa de internet, además de emplear la información de manera consciente. La experiencia se llevó a cabo bajo una teoría de aprendizaje constructivista, con un enfoque de aprender haciendo. El método desarrollado se fundamenta en un enfoque cualitativo; un alcance descriptivo y un diseño transversal descriptivo. El proceso de enseñanza y aprendizaje por medio del blog generó nuevas maneras de producción sistemática utilizando actividades educativas que buscan desarrollar el pensamiento reflexivo, lo cual fue mostrado en los resultados obtenidos. Finalmente se recomienda la realización de experiencias más amplias que integren recursos tecnológicos de utilidad en la futura actividad laboral del discente.

Palabras clave: Blog, Bioestadística, Aprender haciendo.

1. Introducción

La investigación muestra una experiencia de aprendizaje basada en las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como medio de aprendizaje y de innovación educativa, para que el estudiante de Bioestadística de la carrera de Medicina, Escuela de Medicina, Facultad de Medicina, Universidad de Los Andes (Mérida, Venezuela) desarrolle el pensamiento crítico y pueda utilizar los conocimientos adquiridos sobre TIC en su futura actividad profesional, además de que su aprendizaje sea un detonante para su creatividad.

Lo anterior fue mostrado en los resultados cualitativos y cuantitativos, lo cual se concretó en la producción de un blog por participante, lo que permitió enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje, por cuanto se elaboró la experiencia educativa de manera planificada, con la constante intervención, aportación y colaboración de los estudiantes en las diferentes entradas asignadas, buscando cambiar la concepción educativa de la Bioestadística en la Facultad de Medicina y acoplándose con la actual sociedad.

Este trabajo de investigación se divide en: tema de interés; marco referencial; desarrollo de la experiencia educativa; método; resultados; conclusiones y recomendaciones.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 317-323). Granada, 2015.

1.1. Tema de interés

Los temas de Bioestadística han sido presentados en la Facultad de Medicina, Universidad de Los Andes (Mérida, Venezuela), basados en teorías y conceptos, sin llevar lo estudiado a un nivel aplicativo, analítico, crítico lo cual ocasiona dificultades al momento de llevar a cabo su futura actividad profesional, en relación a la realización de cálculos e interpretación de indicadores descriptivo y probabilísticos.

El Área de Bioestadística de la Cátedra de Ciencias Instrumentales y de Investigación del Departamento de Medicina Preventiva y Social, por lo general se establecían procesos repetitivos y memorísticos, con la utilización de muchos procedimientos algorítmicos y poca aplicación de los cálculos efectuados. Por ello, se estructuraron estrategias que fomenten la creatividad de los estudiantes y el desarrollo del pensamiento crítico, partiendo de los conocimientos previos para la construcción sistemática del aprendizaje por medio de actividades que estimulen la reflexión.

En vista de lo anterior Salinas (2004) señala que las Instituciones de Educación Universitaria deben cambiar los procesos de formación, considerando ámbitos diferentes a los convencionales y así los estudiantes obtengan un aprendizaje que se desarrolle de acuerdo a la actual sociedad, la cual está a un ritmo vertiginoso, utiliza los medios digitales y se identifica con el cambio de manera constante.

En el marco de un proceso de cambio y tomando en cuenta la producción como aspecto fundamental durante el período lectivo U-2013, en la materia de Bioestadística se empleó las Tecnologías de Información y Comunicación para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo cual se efectuó de manera sistemática con la construcción de un blog por estudiante, a partir de lo señalado por Onrubia (2007), incentivando el carácter activo del participante basado en la autonomía y autorregulación de su aprendizaje, hacia el logro de los objetivos planteados para la asignatura.

2. Marco Referencial

La Educación del presente es un proceso complejo, multidireccional y dinámico que incluye el proceso de enseñanza y aprendizaje, el cual tiene por objetivo la construcción, cooperación, colaboración, producción y sociabilización de conocimientos, habilidades, costumbres, valores, actitudes que conllevan a la evolución íntegra del estudiante, por ello, se debe cultivar de manera permanente en la actual sociedad llena de dificultades, incertidumbre y contradicciones (Melendro, 2005).

Resulta oportuno mencionar la importancia del binomio existente entre la Educación y el uso de las tecnologías, lo cual es una de las necesidades del presente que intenta desarrollar un modelo de pensamiento que relaciona el "pensar" con el "hacer", en otras palabras, busca el logro de capacidades prácticas que permitan resolver problemas complejos que entrañan incertidumbre, con efectos concretos en la realidad (Ramírez, Escalante y León, 2008).

Por ello la incorporación de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje tiene desafíos por enfrentar, puesto que educandos y maestros tendrán la responsabilidad en la construcción de una sociedad del conocimiento; de allí parte la necesidades de una alfabetización digital integral, que apunte tanto al aprendizaje de la utilización de las aplicaciones informáticas, como a la comprensión de los contenidos de la materia específica (Borello, 2010).

Cabe mencionar que para alcanzar una integración e innovación tecnológica es preciso considerar un medio educativo que forje habilidades cognitivas y procedimentales específicas y transformadoras de la realidad educativa. Entonces es menester la realización de un proyecto pedagógico potenciador del aprendizaje, el cual depende de las estrategias didácticas utilizadas y el diseño de medios de enseñanza. El proceso requiere tomar en cuenta las características de los sujetos en estudio, el contexto de uso, los objetivos y contenidos de aprendizaje, los recursos y los conocimientos que el profesor intenta desarrollar (Fernández, 2007).

El uso de las TIC en el mundo ha sido uno de los principales factores de inducción al cambio y adaptación de las nuevas formas de hacer y de pensar, iniciadas a partir de los años ochenta en los distintos sectores de la sociedad (Riascos, Quintero y Ávila, 2009) en sus comienzos no se consideraba la importancia que llegaría a tener la incursión de las TIC en el entorno de la Educación y especialmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo las TIC no sólo ayudan a optimizar la acción educativa, sino buscan nuevas formas de abordarlos, diseñarlos, desarrollarlos, para promover la calidad educativa (González, 2007).

En cuanto al éxito o fracaso de la inclusión de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje depende, en gran parte, de la forma como los diferentes actores educativos interpretan, redefinen, filtren y den forma a los cambios propuestos (González, 2008). Para alcanzar ese cambio, es necesario buscar la participación activa y de ese modo obtener un cambio genuino que traiga como consecuencia beneficios tangibles (Chipia, Rivas y Mousalli-Kayat, 2010).

En vista de la importancia que reviste la utilización de las TIC en el proceso educativo y teniendo como principio didáctico la innovación a partir del cambio, se presenta un resumen de una experiencia de aprendizaje sistemática y planificada, la cual tuvo como objetivo la producción de un blog por estudiante durante el período U-2013, en la asignatura de Bioestadística.

3. Objetivo de la experiencia educativa

Desarrollar una experiencia educativa sobre la construcción de un blog por estudiante, para la asignatura Bioestadística de la carrera de Medicina, Facultad de Medicina, Universidad de Los Andes.

4. Desarrollo de la experiencia educativa

La planificación de la experiencia educativa, se fundamenta en la teoría de aprendizaje constructivista, porque se toma en consideración los conocimientos previos del sujeto, además, es un proceso de construcción personal, a partir de la interacción con el aprendizaje, por medio de objetos que explican una realidad particular y dinámica, para la solución de problemas y tareas específicas (Pozo, 2006).

Cabe agregar que la práctica pedagógica se estructuró a través del aprender haciendo, lo cual se asienta en el pensamiento de Jhon Dewey, sobre la necesidad de examinar el pensamiento a través de la acción si se quiere que este se transforme en conocimiento. Sus trabajos sobre la educación tenían por finalidad estudiar las consecuencias que tendría su instrumentalismo para la pedagogía y determinar su validez mediante la experimentación (Westbrook, 1993).

El aprender haciendo propugna el diálogo, la interacción, la reflexión y la experiencia vivida de los participantes, por lo tanto, es un aprendizaje activo, entendido como formulación y experimentación de hipótesis de significado por parte del estudiante. En la práctica educativa, existe una inversión del proceso de enseñanza y el aprendizaje tradicional, porque se revierte la secuencia habitual que va de la teoría a la práctica.

La experiencia de aprendizaje utilizó como recursos de información y comunicación: Correo electrónico (joanfernando130885@gmail.com), cuenta en Facebook (https://www.facebook.com/bioestadistica.ula/), cuenta en Twitter (@joanfchipial), Página Web (http://www.webdelprofesor.ula.ve/ciencias/joanfchipia/), Blog para la asignatura (http://bioestadisticaula.blogspot.com/).

La planificación de la experiencia de construcción de un blog por estudiante, fue organizada de manera progresiva en la asignación de actividades, se basó en seis entradas de Bioestadística a realizar de manera independiente y después le correspondía enviar un correo electrónico al profesor con el enlace de la entrada.

Se le asignó la construcción del blog, para lo cual se le solicitó abrir una cuenta en Gmail si no la tenían, posteriormente revisar un vídeo de construcción de blog, el cual se incrustó en la Página Web (http://www.webdelprofesor.ula.ve/ciencias/joanfchipia/?p=282). En la primera entrada se les asignó el resumen cuatro presentaciones relacionadas con la historia de la Estadística, los conceptos básicos de Bioestadística: población, muestra, dato, unidad estadística, estadístico, parámetro, escalas de medición y variables estadísticas, además de una noción de la planificación y ejecución de investigaciones médicas.

En la segunda entrada se les asignó la elaboración de un análisis crítico de los capítulos 8, 12 y 14 de la serie de vídeos “Una mirada a la Estadística”, que podían ser vistos en http://www.webdelprofesor.ula.ve/ciencias/joanfchipia/?page_id=164 o en el CD suministrado para la asignatura (http://www.webdelprofesor.ula.ve/ciencias/joanfchipia/?p=344).

En la tercera entrada se les fijó relacionar la Probabilidad con la salud. En la cuarta entrada se les asignó plantear un problema de salud donde se aplique la Probabilidad. En la quinta entrada debían investigar las principales propiedades de la esperanza matemática, varianza y desviación estándar y después que la muestren por medio de ejemplos. En la sexta entrada tenían que explicar por qué y para qué utilizar las distribuciones de Probabilidad de la Salud y luego explicar un ejemplo.

La evaluación del blog era parte de cada una de las calificaciones parciales de Bioestadística, la primera entrada estaba incluida en la primera evaluación parcial, segunda entrada en la segunda evaluación parcial, tercera y cuarta entrada en la tercera evaluación parcial, cada una de las entradas tuvo el valor de un punto, mientras que la quinta y sexta fue evaluada en la cuarta evaluación parcial de la materia, con una ponderación de 1,5 puntos por entrada. Resulta de interés mencionar que la revisión de las entradas se efectuó de manera individual con envío de correcciones por el correo electrónico. En cada una de las entradas evaluadas se tomó en consideración una escala de estimación de 0 a 5, siendo 0 no presentó, 1 deficiente, 2 regular, 3 bien, 4 muy bien y 5 excelente, dividiendo el valor correspondiente de la entrada para asignar el puntaje.

5. Método de investigación

Esta investigación está basada en un enfoque cualitativo porque se estudia la construcción de un blog por estudiante, para la materia de Bioestadística de manera interpretativa, por medio de cualidades específicas y organizadas de la experiencia de aprendizaje (Tamayo, 2009).

El estudio fue de campo, debido a que se recolectaron datos de la realidad donde ocurren los hechos, por medio de instrumentos con la presencia del investigador directamente de la fuente, es decir, se recoge la información de los individuos en estudio para ser analizada (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

El alcance de la indagación es descriptivo, porque se busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de la construcción del blog de Bioestadística, narrando las tendencias de los estudiantes sujetos de investigación (Hernández y otros, 2010).

Es un diseño transversal descriptivo, porque tiene por objetivo indagar la incidencia del blog de Bioestadística en el aprendizaje de la asignatura, además del manejo del servicio Blogger en los estudiantes de un grupo intacto de sujetos en estudio (Hernández y otros, 2010).

Participantes de la investigación, el conjunto de dos secciones de estudiantes de Bioestadística de la Escuela de Medicina, Facultad de Medicina, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, durante el período lectivo U-2013.

Se utilizó como técnica la observación y como instrumento, el registro anecdótico de la experiencia educativa, para el análisis del proceso directo de intervención didáctica en el aula de clases.

6. Resultados

En el transcurso de la asignatura se realizaron 529 conversaciones en Gmail, para un total de 1780 correos electrónicos entre el facilitador y los participantes para dar información de la asignatura, aclarar dudas y hacer propuestas, la cantidad de conversaciones y correos electrónicos fueron guardados en el servicio de Gmail por medio de una etiqueta. El 91% de los estudiantes construyeron un blog y el 83% efectuaron las 6 entradas, lo cual se fue publicando en el blog de la materia.

Más allá de los logros cuantitativos se observó una participación activa y continua que muestra la relevancia de emplear procesos diferentes a los tradicionales con apoyo de las Tecnologías de la Información y Comunicación, con una constante colaboración de los estudiantes, lo que indica un cambio.

También se pudo notar un pensamiento analítico y crítico, puesto que se observó el aprendizaje de conocimientos de Bioestadística más allá de los procesos algorítmicos y curriculares establecidos por la asignatura, además de tener el valor agregado de un manejo instrumental del blog, lo que evidencia la transversalidad que se alcanzó con un medio de la Web, por lo tanto, el blog se convirtió en un gestor del aprendizaje.

Cabe señalar que durante el desarrollo de las seis actividades se observó ayuda entre los participantes, reforzando su compañerismo, lo cual se alcanzó a través de la utilización de los medios de comunicación establecidos desde el comienzo.

Se pudo determinar que el aprender haciendo generó mayor interés, reflexión y creatividad en el momento de elaborar las entradas del blog, porque se manifestó un manejo instrumental y aplicativo de los contenidos, con opiniones personales y críticas de las temáticas asignadas.

Los estudiantes manifestaron que durante el desarrollo del blog, lograron aprendizajes significativos sobre temas que no conocían de Bioestadística y lo relacionaron con su futura actividad profesional. Obtuvieron conocimientos de la Web sobre la construcción de un blog, búsqueda y resumen de información, además de analizar lo encontrado para asociar más y mejor los temas de Bioestadística con la investigación en Salud.

En términos generales, a los discentes les gustó la experiencia educativa, pues les permitió organizar la información y aprender el uso de una herramienta que les puede ser de utilidad no solo para Bioestadística, sino para otras asignaturas y en su próxima actividad profesional.

7. Conclusiones

Resulta necesario elaborar un proceso planificado desde el diseño, desarrollo hasta la evaluación para integrar las TIC en una actividad de aprendizaje y una asignatura, en el cual se consideren a los participantes y las condiciones específicas donde se van a aplicar.

Es importante utilizar varios medios de comunicación en internet, porque se genera una mayor relación entre docente-estudiante y entre estudiantes, para buscar el cambio de actitud de un educando pasivo a un discente activo y responsable de su aprendizaje.

El docente que plantee actividades de aprendizaje con la utilización de la Web debe transformarse en un facilitador que guía el proceso de enseñanza y aprendizaje, para ello requiere de un mayor compromiso con la labor que está efectuando.

En la Educación Universitaria es menester enfocarse en procesos aplicativos y críticos para que el estudiante pueda construir aprendizajes, que le sean de utilidad ante situaciones prácticas para su futura actividad profesional.

El enfoque de aprender haciendo permite generar aprendizajes ante situaciones prácticas, lo que le ayuda al participante a resolver problemas de manera analítica y reflexiva, lo cual le hace estructurar nuevos esquemas mentales.

La construcción de un blog como medio educativo produjo resultados cualitativos y cuantitativos interesantes, pues se notó las diferencias en el cambio de actitud hacia el manejo de la tecnología y el aprendizaje de la Bioestadística.

La experiencia educativa evidencia que lo más importante no consiste en utilizar las TIC, sino buscar que los estudiantes puedan autorregular su aprendizaje y puedan pensar críticamente en el por qué, para qué y el cómo utilizar las tecnologías en el marco de una sociedad colmada de incertidumbre, tratando de saber cómo actuar ante la infoxicación.

8. Recomendaciones

Elaborar experiencias educativas en la Educación Universitaria más amplias sobre la utilización de los blogs empleando una planificación que considere a los estudiantes, el contexto y el programa de la materia.

Hacer talleres de capacitación para docentes universitarios que les muestren la utilidad e importancia de emplear el blog para sus asignaturas y el aprendizaje de los estudiantes en el marco de la sociedad del conocimiento.

Incentivar a docentes a emplear medios educativos basados en la Web como los blog, mostrando su potencialidad y cómo pueden ser usadas en su actividad laboral, lo cual les servirá para un mejor desenvolvimiento en su futura actividad profesional.

Referencias

Borello, M. (2010). Educación y TIC. Líneas para caracterizar sus relaciones. *TE & ET*, 5, 13-20.

Chipia, J., Rivas, F. y Mousalli-Kayat, G. (2010). Education Blog: Institutional Technological Change Manager. *WSEAS: Advances in E-Activities, Information Security and Privacy*, 97-101.

Fernández, C. (2007). El diseño y la producción de medios aplicados a la enseñanza. En Cabero, J. (Coord.) *Tecnología educativa*, México, McGraw-Hill, 105-123.

González, M. (2007). Las TIC como factor de innovación y mejora de la calidad de la enseñanza. En Cabero, J. (Coord.) *Tecnología educativa*, México, McGraw-Hill, 219-232.

González, J. (2008). TIC y la transformación de la práctica educativa en el contexto de las sociedades del conocimiento. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento,* 5 (2), 1-8.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación* (5a. Ed.). México: Mc Graw Hill.

Melendro, M. (2005). La Globalización de la Educación. *Revista Teoría Educativa,* 17, 185-208.

Onrubia, J. (2007). Las tecnologías de la información y comunicación como instrumento de apoyo a la innovación de la docencia universitaria. *Revista interuniversitaria de Formación del Profesorado,* 21 (1), 21-36.

Pozo, J. (2006). *Teorías cognitivas del aprendizaje* (9a. Ed.). España: Morata.

Ramírez, A.; Escalante, M. y León, A. (2008). La Educación en Tecnología: Un Reto para la Educación Básica Venezolana. *Revista EDUCERE* 12 (43): 731-740.

Riascos, S., Quintero, D. y Ávila, G. (2009). Las TIC en el Aula: percepciones de los profesores universitarios Educación y Educadores. *Revista: Educación y Educadores* 12 (3): 133-157.

Salinas, J. (2004). Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria. *Revista Universidad y Sociedad del Conocimiento* 1(1): 1-16.

Tamayo, M. (2009). *El proceso de la investigación científica: incluye evaluación y administración de proyectos de investigación* (5a. Ed.). México D. F.: Limusa.

Westbrook, R. (1993). Jhon Dewey (1859-1952). *Perspectivas: revista trimestral de educación comparada*, 23 (1-2), 289-305.

Experimento de enseñanza para la superación de dificultades y errores referidos a la variable estadística y sus escalas de medición

Maritza Méndez Reina[1], *Nydia Beyanira Valero Romero*[2], *y Ingrith Álvarez Alfonso*[3]

[1]maritzamendez@pensadoresmatematicos.com, Colegio Cafam (Colombia)
[2]nydival@hotmail.com, Colegio San Bernardino I.E.D. (Colombia)
[3]ialvarez@pedagogica.edu.co, Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)

Resumen

Esta comunicación reporta los resultados del Trabajo de Grado de Maestría enmarcado en la línea de investigación en Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional, el estudio es generado a partir de un experimento de enseñanza alrededor de dificultades y errores asociados con la variable estadística y sus escalas de medición. En el presente reporte se describe el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis del experimento de enseñanza siguiendo las fases propuestas por Molina, Castro, Molina y Castro (2011) articuladas con elementos del análisis didáctico propuesto por Gómez (2002) que orientaron el experimento de enseñanza y la secuencia de tareas seguidas en la intervención en el aula. Los resultados de este estudio se muestran en relación a la contribución del experimento de enseñanza a la superación de dificultades y errores.

Palabras clave: Variable estadística, Escalas de medición, Errores y Dificultades, Experimento de enseñanza.

1. Introducción

Investigadores concuerdan en que el proceso de medición y las propiedades de medición de los datos sean analizados a fondo, especialmente en relación con los cuestionarios y escalas de medición que se utilizan para recoger la información (Svensson, 2009). En efecto, la relación entre las propiedades de los datos y la elección de los métodos estadísticos para la recolección, descripción y análisis de los mismos, son aspectos que deben tenerse en cuenta al momento de llevar a cabo un análisis de datos, pues tal y como lo plantea Merli (2010) para entender y usar apropiadamente las diferentes técnicas del análisis estadístico, es necesario identificar previamente la escala de medición correspondiente al tipo de datos a analizar, ya que cada escala tiene propiedades matemáticas que determinan el análisis estadístico propicio para cada caso. Esto hace pertinente la reflexión sobre la incorporación del estudio de las escalas de medición en el currículo escolar de matemáticas, puesto que al llevar al aula dicho objeto se podrán reconocer características del proceso pedagógico referido a éste, de tal suerte que dichas características aporten herramientas para el diseño de tareas que posibiliten, en los estudiantes, la activación de capacidades y el alcance de objetivos de aprendizaje relacionados con la variable estadística y sus escalas de medición y el desarrollo de competencias en matemáticas.

Este trabajo pretende dar cuenta de los siguientes cuestionamientos: ¿cuáles son las dificultades y errores relacionados con la variable estadística y sus escalas de medición en estudios estadísticos, que presentan estudiantes de la educación básica?, ¿qué elementos se deben tener en cuenta en el diseño de tareas para estudiantes de grado noveno, que busquen la superación de las dificultades y errores asociados a la variable estadística y sus escalas de medición?, ¿qué capacidades deben activar estudiantes de grado noveno de la educación básica al momento de desarrollar tareas que aborden variables estadísticas y sus escalas de medición?,

¿cómo analizar las actuaciones de los estudiantes de grado noveno en términos de la superación de dificultades y errores relacionados con la variable estadística y sus escalas de medición?

Se presenta entonces, el diseño y análisis de una secuencia de tareas cuyo fin es aportar en la superación de dificultades y errores relacionados con la variable estadística y sus escalas de medición, se analiza la contribución del experimento de enseñanza en la superación de dificultades y errores que se evidenciaron en estudiantes de grado noveno y se presentan las conclusiones que se derivan del desarrollo de este estudio, atendiendo a la consecución de los objetivos y describiendo paralelamente los aportes de este trabajo a la Educación Estadística.

2. Objetivos

Para estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de un experimento de enseñanza que aborda dificultades y errores referidos a la variable estadística y sus escalas de medición, se toman como objetivos específicos, la implementación de un análisis didáctico que orienta el experimento de enseñanza y la secuencia de tareas para estudiantes de grado noveno de la educación básica; el diseño, implementación y análisis de una secuencia de tareas, que permitieran la superación de dificultades y errores relacionados con la variable estadística y sus escalas de medición; y el análisis de la contribución del experimento de enseñanza a través de las actuaciones de los estudiantes, manifestadas en el desarrollo de las tareas propuestas en relación con la variable estadística y sus escalas de medición.

3. Marco de referencia

Para el desarrollo de la propuesta se considera el marco de referencia estadístico en torno al objeto de estudio variable estadística y sus escalas de medición, orientado por el análisis de contenido, como uno de los elementos del análisis didáctico. El marco metodológico se fundamenta en las fases propuestas por Molina, et al. (2011) que hacen parte del experimento de enseñanza, en este segmento se presenta las principales características de este tipo de estudio.

3.1. Marco de referencia estadístico

El análisis didáctico (Gómez, 2002) se compone entre otros elementos del análisis de contenido que se describe a continuación como producto de la exploración, profundización y estudio del objeto escolar variable estadística y sus escalas de medición. Éste brinda herramientas para analizar y organizar el significado de dicho objeto escolar, con miras al planteamiento de las tareas que descritas en el análisis de instrucción.

3.1.1 Variable estadística

Batanero y Godino (2001) afirman que “la Estadística Descriptiva, se utiliza para describir los datos, resumirlos y presentarlos de forma que sean fáciles de interpretar” (p. 4), por ende en el análisis de datos se requiere prestar atención al tipo de variables estadísticas inmersas en el estudio y las escalas de medición relacionadas con las mismas. Las variables estadísticas, según Batanero y Godino (2001, p. 13) son utilizadas para representar los distintos tipos de características o atributos de la población, y por su naturaleza pueden ser categóricas o numéricas, también llamadas cualitativas o cuantitativas respectivamente.

3.1.2 Escalas de medición

Las variables estadísticas se pueden medir con cuatro tipos de escalas de medida, las cuales están relacionadas con los valores que toma la variable y determinan los posibles análisis estadísticos. El nivel de medida de una variable estadística, también llamado escala de medición, es una clasificación que permite describir la naturaleza de la información contenida dentro de los objetos de estudio y por tanto, dentro de una variable estadística. Las escalas de medición son: nominal, ordinal, de intervalo y de razón. Teniendo en cuenta las propiedades matemáticas y estadísticas, la escala de medición más rudimentaria es la nominal y la más completa es la escala de razón (Merli, 2010, p. 245). Un resumen de las características y propiedades de las escalas de medición se presentan en la Tabla 1, tomada de Merli (2010).

Tabla 1. Principales características y propiedades de las escalas de medición.

Escala de Medición	***Propiedad Sistema Numérico***	***Operación Matemática***	***Operación Estadística***	***Ejemplos***
Nominal	Identidad	Contar	Frecuencias Moda	Sexo
Ordinal	Magnitud	Ordenar	Mediana Rango	Nivel Educativo Dureza Minerales
Intervalo	Distancia	Suma Resta	Media Varianza	Temperatura
Razón	Cero Absoluto	Multiplicación División	Coeficiente Variación	Peso, Longitud Ingreso, Precio

*Tabla acumulativa. Las propiedades de una escala incluyen todas las propiedades de la escala anterior

El análisis de contenido realizado se representa a través de la estructura conceptual (Anexo A) que considera las relaciones entre las estructuras matemáticas involucradas en la variable estadística y sus escalas de medición, las relaciones conceptuales y las relaciones entre los sistemas de representación asociados a dicho objeto de estudio.

3.2. Marco de referencia metodológico

Este estudio se enmarca en la metodología de diseño, específicamente en el experimento de enseñanza, pues este se considera como un modelo cercano a la "práctica habitual del docente al [atender al] diseño, puesta en práctica y análisis de un conjunto de intervenciones en un aula, que persiguen un aprendizaje" (Molina, et al. 2011, p. 86). Este estudio asume una perspectiva cualitativa que articula fases del experimento de enseñanza con elementos del análisis didáctico (figura 1).

4. Preparación del experimento

Se muestran a continuación, algunas acciones propias del análisis didáctico consideradas como herramientas de planificación que enuncian aspectos didácticos a tener en cuenta en la preparación del experimento de enseñanza.

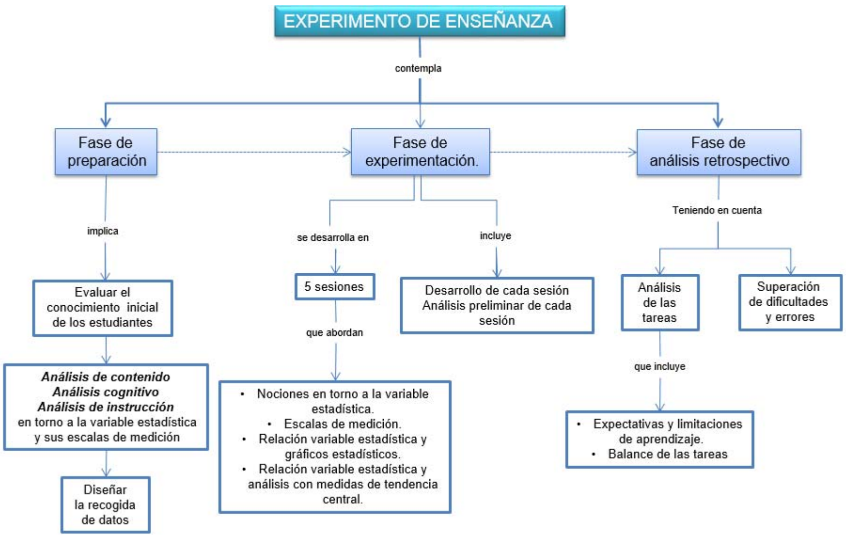


Figura 1. Metodología seguida en el estudio.

4.1. Análisis cognitivo

Luego del análisis de contenido presentado en el marco de referencia estadístico, se realiza el análisis cognitivo. En este el foco de atención es el aprendizaje del estudiante (González y Gómez, 2013), razón por la cual se especifican las expectativas de aprendizaje que son concretadas a través de competencias (Anexo B), objetivos (Anexo C) y capacidades (Tabla 2). De igual forma, como lo afirma Gómez (2007) el análisis cognitivo también tiene en consideración las limitaciones que surgen en el proceso de aprendizaje, las cuales se concretan en las dificultades y los errores (Tabla 3). Dado que este experimento de enseñanza toma como punto de partida las dificultades y errores evidenciados tanto en el estudio experimental, la prueba diagnóstico aplicada a los estudiantes con los que se implementa el experimento, y los reportados por la literatura (Méndez y Valero, 2014); se plantean las expectativas de aprendizaje en términos de la superación de las dificultades y errores.

Tabla 2**.** Capacidades para realizar tareas relacionadas con variables estadísticas y sus escalas de medición

Código	**CAPACIDADES**
CA1	Identificar la variable involucrada en el estudio estadístico.
CA2	Identificar los valores de la variable estadística
CA3	Identificar la naturaleza de la variable involucrada en el estudio estadístico.
CA4	Identifica la frecuencia de un valor de la variable en un estudio estadístico presentado en gráficas o en tablas de frecuencia.
CA5	Reconocer propiedades de variables cualitativas medidas con la escala ordinal
CA6	Reconocer propiedades de variables cuantitativas medidas con la escala de intervalo (clasificación, orden y cero relativo).
CA7	Reconocer propiedades de variables cuantitativas medidas con la escala de razón (clasificación, orden, comparación y cero absoluto).
CA8	Determinar la escala de medición que se adecúa a la variable presentada.
CA9	Reconocer propiedades de variables cuantitativas continuas.
CA10	Reconocer propiedades de variables cuantitativas discretas.
CA11	Clasificar las variables cuantitativas en continuas o discretas.
CA12	Identificar las representaciones graficas adecuadas para variables cualitativas (Diagrama de barras y gráficos de sectores).
CA13	Identificar las representaciones graficas adecuadas para variables cuantitativas discretas para

	datos no agrupados (Diagrama de barras y polígonos de frecuencias).
CA14	Identificar las representaciones graficas adecuadas para variables cuantitativas discretas y continuas para datos agrupados (histograma y polígonos de frecuencias).
CA15	Diferenciar diagramas de barras, gráficos de sectores, histogramas y polígonos de frecuencias.
CA16	Identificar la pertinencia de utilización entre el diagrama de barras y el histograma de acuerdo a los datos presentados.
CA17	Identificar la(s) medida(s) de tendencia central que puede(n) ser calculadas para variables cualitativas medidas en escala nominal (Moda).
CA18	Identificar la(s) medida(s) de tendencia central que puede(n) ser calculadas para variables cualitativas medidas en escala ordinal (Moda, Mediana).
CA19	Identificar la(s) medida(s) de tendencia central que puede(n) ser calculadas para variables cuantitativas medidas en escala de razón (Moda, Mediana y Media)
CA20	Identifica errores en la elección de la medida de tendencia central elegida de acuerdo a la variable.

Tabla 3. Dificultades y errores referidos a la variable estadística y sus escalas de medición

DIFICULTADES	ERRORES
Confusión de nociones en torno a la variable estadística.	**E1** Confundir conceptos como: caso, variable, frecuencia. (Pinto, 2010) **E2** Confundir dato con variable. **E3** Confusión entre frecuencia y valor de la variable (Wu, 2004). **E4** Clasificación incorrecta de la variable estadística considerando la naturaleza de los datos **E5** No identificar la escala de medición en la cual se encuentra la variable de un estudio estadístico.
Elección incorrecta del tipo de gráfico de acuerdo con la variable estadística involucrada y la escala en la cual se encuentra.	**E6** No logra establecer la relación entre el tipo de variable y el tipo de gráfico, es decir que no logra reconocer que no son adecuados todos los gráficos para un mismo tipo de variable. **E7** No diferenciar entre los rectángulos de un gráfico de barras y del histograma. (Pinto, 2010)
No correspondencia entre medidas de análisis y el tipo de variable estadística.	**E8** Calcular la media y la mediana en datos cualitativos nominales. **E9** No relacionar la naturaleza de los datos con el análisis que puede hacerse a través de las medidas de tendencia central.

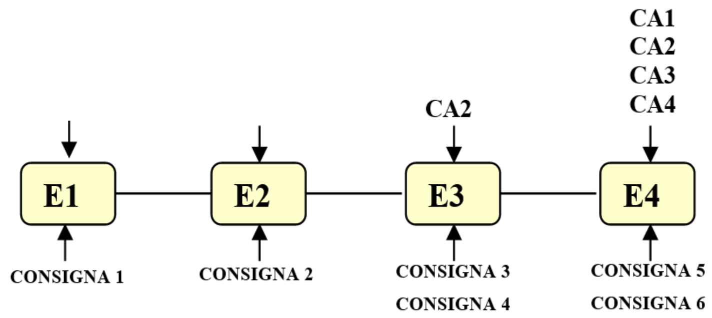
4.2. Análisis de instrucción

El análisis de instrucción consiste en el diseño, selección, identificación y descripción de las actividades de enseñanza, se realiza teniendo en cuenta el análisis de contenido y el análisis cognitivo (Gómez, 2002, 2007). El experimento de enseñanza que se propone se nutre a través de la trayectoria hipotética de aprendizaje, la cual está formada por los objetivos de aprendizaje, las tareas que se usan para promover el aprendizaje y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje que llevaran a cabo los estudiantes (Gómez, 2007, citando a Simón y Tzur (2004)); se plantea en torno a la conexión entre los errores, los objetivos de aprendizaje y las capacidades que ha de usar el estudiante para resolver cada una de las consignas que hacen parte de las actividades. La tabla 4 muestra un ejemplo de la trayectoria hipotética planteada para la tarea 1.

Tabla 4. Trayectoria Hipotética Tarea 1: Nociones en torno a la variable estadística

TAREA 1	
NOCIONES ESTADÍSTICAS TRABAJADAS	Variable, dato, población, muestra, frecuencia, clasificación de las variables según la naturaleza de los datos (cualitativa y cuantitativa).

ERRORES ABORDADOS	**E1, E2, E3** y **E4**
OBJETIVO DE APRENDIZAJE	**OA1**
CAPACIDADES	**CA1, CA2, CA3** y **CA4**



HIPÓTESIS	El estudiante identifica las variables estadísticas involucradas en estudios y las clasifica de acuerdo a la naturaleza de los datos.

5. Experimentación y análisis retrospectivo

La implementación del experimento se lleva a cabo con estudiantes de grado noveno (13-14 años). La Tabla 5 presenta la distribución de las sesiones en términos de la secuencia de tareas y el número de estudiantes participantes.

Tabla 5. Distribución de las sesiones de experimentación

Sesión	Tareas	Nº de estudiantes
1	**Tarea 1.** Nociones en torno a la variable estadística	16
2	**Tarea 2.** Escalas de medición de las variables estadísticas	13
3	**Tarea 3.** Relación variables estadísticas y gráficos estadísticos	13
4	**Continuación de la Tarea 3.** **Tarea 4.** Escala de medición de intervalo y escala de razón	13
5	**Tarea 5.** Relación variables estadísticas y análisis con medidas de tendencia central	12

En el análisis retrospectivo del experimento, que tuvo en consideración las actuaciones de los estudiantes en términos de la superación de dificultades y errores relacionados con la variable estadística y sus escalas de medición, fue necesario ampliar la lista de errores previstos en la fase de preparación del experimento, ya que al analizar las evidencias, estas permiten detallar con mayor precisión errores en que incurren los estudiantes al abordar tareas relacionadas con la variable estadística y sus escalas de medición. De igual forma, estas evidencias posibilitaron la identificación de errores adicionales no previstos durante el proceso de diseño. La Tabla 6 recoge los errores previstos durante la fase de preparación (resaltados en negrilla) y los errores evidenciados: previstos, precisados y emergentes durante la gestión y análisis de las tareas.

Tabla 6. Errores evidenciados en el experimento de enseñanza en la fase de análisis retrospectivo

ERRORES EVIDENCIADOS
E1 Confundir conceptos como: caso, variable, frecuencia (Pinto, 2010).
E1.1 Confundir la variable estadística con la(s) frecuencia(s). E1.2 Confundir la muestra de un estudio estadístico con la variable estadística. E1.3 Confundir la variable estadística con los valores de la variable.
E2 Confundir dato con variable.
E3 Confusión entre frecuencia y valor de la variable (Wu, 2004).
E4 Clasificación incorrecta de la variable estadística considerando la naturaleza de los datos. E4.1 Clasificar las variables cualitativas como cuantitativas cuando los valores de la variable son números utilizados como códigos.
E5 No identificar la escala de medición en la cual se encuentra la variable de un estudio estadístico.
E5.1 No reconoce las propiedades de las variables cualitativas medidas en escala nominal. E5.2 No reconoce las propiedades de las variables cualitativas medidas en escala ordinal. E5.3 No reconoce las propiedades de las variables cuantitativas medidas en escala de intervalo. E5.4 No reconoce las propiedades de las variables cuantitativas medidas en escala de razón.
E6 No se tiene claridad de la relación que existe entre la naturaleza de los datos y los diferentes gráficos estadísticos que son apropiados utilizar.
E7 No diferenciar entre los rectángulos de un gráfico de barras y del histograma (Pinto, 2010).
E8 Calcular la media y la mediana en datos cualitativos nominales.
E8.1 Calcular la media en variables cualitativas medidas en escala nominal. E8.2 Calcular la mediana en variables cualitativas medidas en escala nominal.
E9 No relacionar la naturaleza de los datos con el análisis que puede hacerse a través de las medidas de tendencia central.
E9.1 Calcular la media en variables cualitativas medidas en escala ordinal. E9.2 Hallar la mediana en variables cualitativas medidas en escala ordinal con número de datos par y valores medios diferentes.
E10 Clasificación incorrecta de variables estadísticas cuantitativas en discretas o continuas sin considerar como se presentan los valores de la variable.
E11 Hallar la media de las frecuencias de los valores de la variable estadística.
E12 No reconocer la posibilidad de cálculo de la mediana en distribuciones para datos agrupados de variables cuantitativas.

Además de los errores listados anteriormente, las puestas en común durante la gestión del experimento permite visibilizar una dificultad en relación con el lenguaje propio de las matemáticas escolares que utilizan los estudiantes, asimismo se evidencia una dificultad relacionada con los significados asociados que tiene algunas palabras en Estadística, tal y como se listan en la Tabla 7.

Tabla 7. Errores asociados al lenguaje

Errores asociado al lenguaje matemático
E13 Confundir la variable algebraica con la variable estadística. **E14** Confundir los valores de las variables estadísticas cualitativas con los datos numéricos presentes en la situación (frecuencias absolutas, frecuencias relativas, tamaño de la muestra, etc.), puesto que la palabra “valor” es asociada únicamente a un número que representa una cantidad. **E15** Relacionar la escala de medición de intervalo con un intervalo como subconjunto de números reales.
Errores asociados al lenguaje estadístico
E16 Asociar la escala de medición de intervalo a variables estadísticas cuantitativas cuando los valores de la variable se encuentran agrupados en intervalos de clase. (La causa del error se debe al uso de la palabra “intervalo”, la cual es empleada en Estadística de dos formas diferentes: “intervalo de clase” y “escala de intervalo”).

Las herramientas de sistematización de las actuaciones de los estudiantes empleadas en el análisis retrospectivo (Méndez y Valero, 2014, pp. 67-91) constituyen un modo eficaz de visualizar el cumplimiento de las expectativas de aprendizaje y la no superación de las limitaciones. Por consiguiente, las planillas de observación de cada tarea (Anexo D) vinculan para cada consigna las capacidades que se requerían, y en caso de no activarse las mismas, se especificaba el error en el cual se incurre. De esta forma se puede hacer seguimiento a la superación de los errores abordados en cada tarea. Así mismo, las planillas de observación de evolución de cada dificultad (Anexo E) presentan de la Tarea 1 a la Tarea 5 la superación de los errores relacionados con las mismas, con lo que se pudo realizar un pronunciamiento en relación a la contribución del experimento de enseñanza para la superación de dificultades y errores referidos a la variable estadística y sus escalas de medición, presentes en el grupo de estudio.

Teniendo en cuenta que el alcance de los objetivos de aprendizaje propuestos para la secuencia de tareas, se valora de acuerdo a la superación de las tres dificultades, es posible concluir que: en cuanto al OA1, la mayoría de los estudiantes (85%) identifican la variable estadística involucrada en un estudio estadístico, el 77% de los estudiantes clasifica la variable de acuerdo a su naturaleza y el 23% reconoce la escala de medición en la cual se encuentra la variable estadística distinguiendo sus propiedades. Con relación al OA2, la mayoría de los estudiantes (23% totalmente, 69% parcialmente) reconocen que hay una relación entre el conjunto de datos de la variable estadística, su naturaleza y su representación en gráficos estadísticos. Frente al OA3, el 58% de los estudiantes eligen los métodos estadísticos de análisis adecuados al tipo de datos, a la naturaleza de los mismos y a la escala de medición en la cual se mide la variable estadística involucrada en el estudio, el 42% lo hace de forma parcial, es decir que no en todas las situaciones elige los métodos estadísticos apropiados.

6. Conclusiones

Al realizar el estudio teórico del análisis didáctico, se encuentra que éste aporta elementos para concretar acciones propias de las etapas del experimento de enseñanza, logrando establecer que son dos teorías complementarias (Anexo F), puesto que el experimento de enseñanza requirió una teoría (en este caso del análisis didáctico) que orientara la planificación de una secuencia de tareas respaldada por un proceso de análisis que tuviera en cuenta los intereses de este estudio y promoviera la superación de dificultades y errores, para retornar luego con el análisis preliminar del experimento sesión a sesión y con el análisis retrospectivo del mismo (etapas del experimento de enseñanza), haciendo uso del análisis de actuación. Se reconoce además, que la utilización conjunta del experimento de enseñanza y el análisis didáctico hizo que este estudio se valiera de un proceso cíclico al requerir que el diseño, puesta en práctica y análisis fuera revisado de forma reiterativa, conjugando de forma cíclica el análisis del proceso de aprendizaje y el análisis de los elementos del diseño instruccional (Molina, et al, 2011), generando además la necesidad de revisión de las versiones previas de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción (Gómez, 2007) propios del análisis didáctico.

La secuencia constituida diseñada en pro de la superación de dificultades y errores descritos en el análisis cognitivo, ha de ser abordada de manera paulatina y acumulativa con el fin de trabajar desde la Tarea 2 y en cada tarea los errores abordados en las tareas anteriores. La secuencia de tareas propuesta en el experimento de enseñanza, se constituye por otro lado, en un material didáctico que puede ser llevado al aula de clase de Estadística considerando los ajustes que se proponen en el balance de las tareas.

Las herramientas de sistematización de las actuaciones de los estudiantes empleadas en el análisis retrospectivo, constituyen una forma eficaz de visualizar el cumplimiento de las expectativas de aprendizaje y la no superación de las limitaciones; éstas permiten advertir que: i) la mayoría de los estudiantes logran superar la dificultad relacionada con la confusión de nociones en torno a la variable estadística, en tanto que identifican la variable estadística involucrada, diferenciándola de otros elementos propios de un estudio estadístico y la clasifican de acuerdo a la naturaleza de los datos, sin embargo algunos estudiantes persisten en errores relacionados con la incorrecta identificación las escalas de medición específicamente la escala de intervalo y la de razón; ii) la mayoría de los estudiantes lograron superar de manera parcial la dificultad relacionada con la elección incorrecta del tipo de gráfico de acuerdo con la variable estadística involucrada y la escala en la cual se encuentra, debido a que logran distinguir cuando los rectángulos debían presentarse separados (gráficos de barras) y cuando no (histogramas), sin embargo algunos presentan confusiones en la pertinencia de la utilización de diagramas de barras, gráficos de sectores, histogramas y polígonos de frecuencias; iii) respecto a la no correspondencia entre el tipo de variable estadística y las medidas de tendencia central, la mayoría reconocen y eligen las medidas de tendencia central adecuadas al tipo de datos, a la naturaleza de los mismos y a la escala de medición en la cual se mide la variable estadística involucrada.

Los aportes de este estudio pueden ser útiles tanto para la enseñanza como para la investigación en Educación Estadística, en términos que la secuencia de tareas, la descripción sistemática de las relaciones entre las competencias, objetivos de aprendizaje, capacidades, dificultades y errores, y la definición de los errores utilizados en el análisis retrospectivo, constituye información relevante para el formador en Educación Estadística.

Referencias

Batanero, C. y Godino, J. (2001). Análisis de datos y su didáctica. Grupo de Investigación en Educación Estadística Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Granada, España. Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Apuntes.pdf

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular. *Revista EMA*, 7(3), 251–292. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/375/.

Gómez, P. (2007). *Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las Matemáticas. (Capítulo 2).* En Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

Gonzalez, M. y Gómez, P. (2013). *Apuntes sobre análisis cognitivo*. Módulo 3. (Documento no publicado). Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2041/1/Apuntes_Modulo3.pdf

Méndez, M. y Valero, N. (2014). Experimento de enseñanza para la superación de algunas dificultades y errores referidos a la variable estadística y sus escalas de medición. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Merli, G. (2010). Escalas de medición en Estadística. *Telos*, *12(2)*, 243–247. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/993/99315569009.pdf.

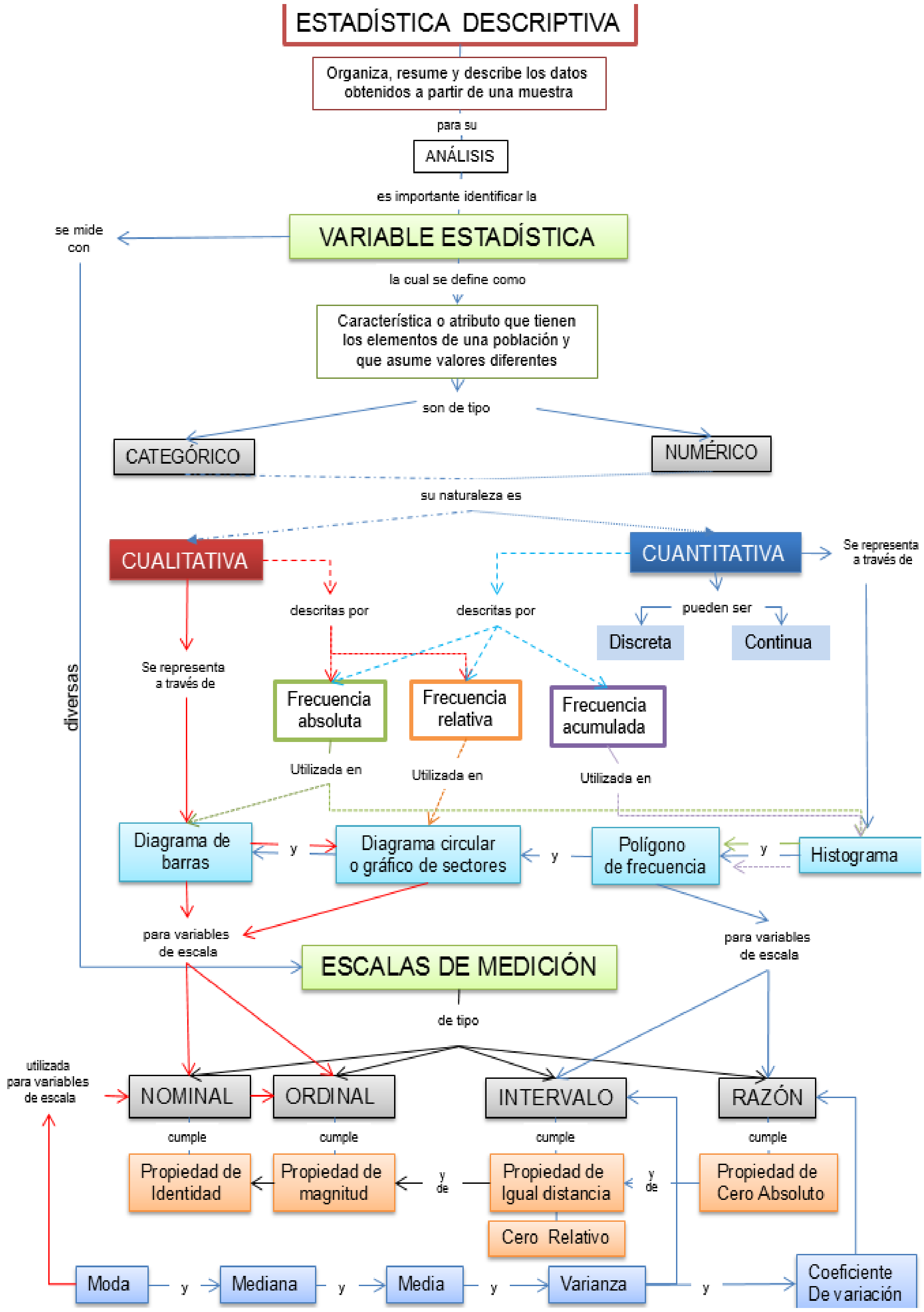
Molina, J., Castro, E., Molina, M. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29*(1), 75–88. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1568/.

Pinto, J. (2010). Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de Estadística en carreras de psicología y educación. Tesis de doctorado para la obtención del título de Doctor en Educación Matemática. Universidad de Salamanca, España.

Svensson, E. (2009). Experiencing the complexity of reality before graduation. *Next steps in statistics education IASE/ISI Satellite*. Recuperado de http://iase-web.org/documents/papers/sat2009/2_2.pdf.

Wu, Y. (2004). Singapore Secondary School Students. Understanding of Statistical Graphs. National Institute of Education. Nanyang Technological University, Singapore. Trabajo presentado en el 10th International Congress on Mathematics Education. Copenhagen, Denmark.

Anexo A. Estructura conceptual de la variable estadística y sus escalas de medición



Anexo B. Competencias seleccionadas en relación con la variable estadística y sus escalas de medición

Código	COMPETENCIAS
CO1	Resolver problemas de estadística descriptiva con el análisis unidimensional de la variable involucrada.
CO2	Modelar procesos y fenómenos de análisis estadísticos a través de los diferentes registros de representación.
CO3	Comunicar, razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos referidos a la pertinencia de utilizar o no resúmenes estadísticos a través de las medidas de tendencia central de acuerdo a la escala de medición en la que se encuentre medida la variable presentada.

Anexo C. Objetivos de aprendizaje en pro de la superación de errores

Código	OBJETIVOS DE APRENDIZAJE
OA1	Identificar adecuadamente la variable estadística involucrada en el estudio estadístico, clasificarla de acuerdo a su naturaleza y reconocer la escala de medición en la cual se encuentra distinguiendo propiedades de las escalas de medición de las variables
OA2	Reconocer la relación entre el conjunto de datos de la variable estadística presentada, su naturaleza y la escala de medición en la cual se encuentra, seleccionando la(s) representación(es) apropiada(s) para presentar la información.
OA3	Elegir y utilizar algunos métodos de análisis estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y a la escala de medición de la variable estadística (nominal, ordinal, de intervalo o de razón).

Anexo D. Planilla de observación: Tarea 1. Expectativas de aprendizaje y limitaciones

Consigna / Capacidad / Estudiante	Consigna 1	Consigna 2	Consigna 3	Consigna 4	Consigna 5			
					A		B	
	CA1	**CA1**	**CA2**	**CA2**	**CA1**	**CA3**	**CA1**	**CA3**
Est. 1	*	E2	E3	*	E1.1	E4.1	E1.1	E4
Est. 2	E1.1	E2	E3	*	E1.1	E4.1	**	**
Est. 3	*	E2	E3	*	*	*	E1.1	E4
Est. 4	***	E2	E3	*	E1.1	E4.1	E1.1	E4
Est. 5	*	*	E3	*	E1.1	E4.1	**	**
Est. 6	E1.1	*	E3	*	E1.1	E4.1	**	**
Est. 7	E1.2	E2	E3	*	*	E4.1	*	*
Est. 8	*	*	*	*	E1.1	E4.1	E1.1	E4
Est. 9	*	E2	E3	*	E1.1	E4.1	E1.1	E4
Est. 10	*	E2	E3	*	E1.1	E4.1	*	*
Est. 11	E1.1	E2	E3	*	E1.1	E4.1	**	**
Est. 12	*	*	*	*	E1.1	E4.1	E1.1	E4
Est. 13	*	E2	E3	*	E1.1	E4.1	E1.1	***

* El estudiante responde en forma correcta la consigna (en caso contrario se especifica el error en el cual incurre el estudiante)

** El estudiante no responde la consigna

*** La respuesta dada por el estudiante a la consigna no tiene relación con la capacidad que se debía activar o no permite visualizar algún error

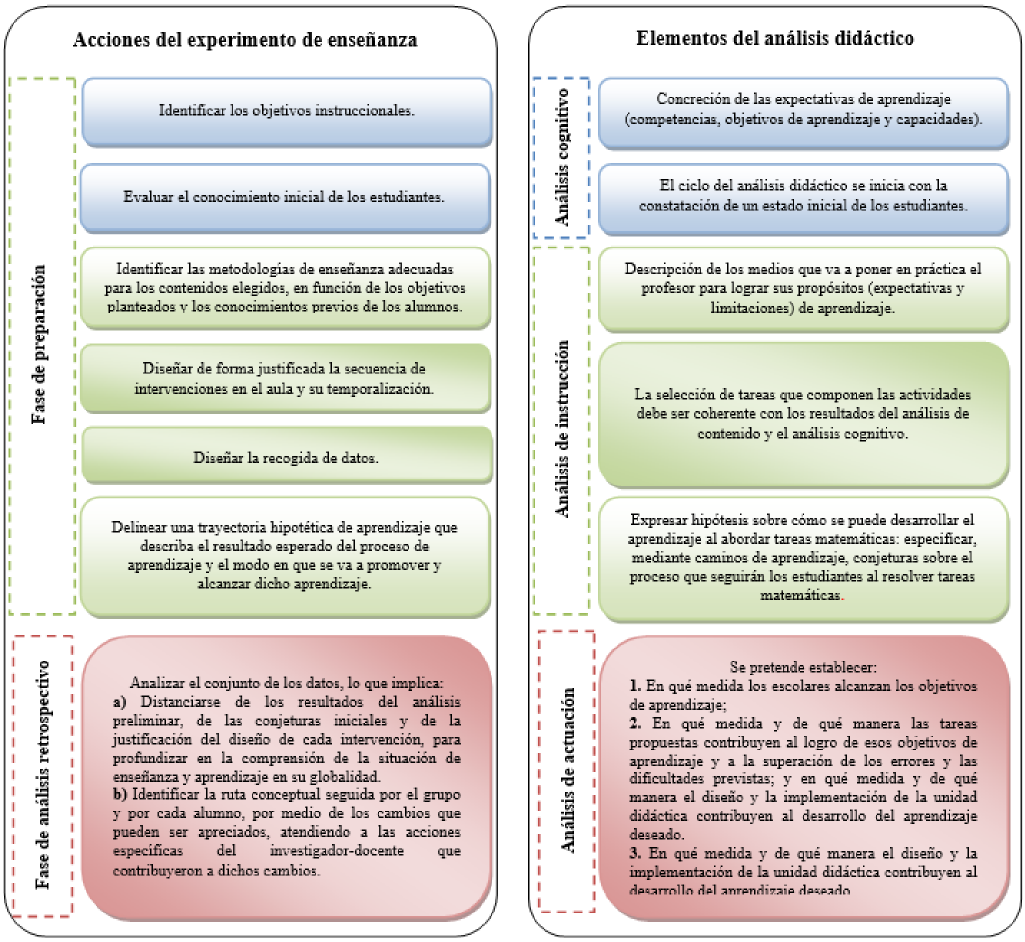
Anexo E. Planilla de observación evolución de la Dificultad 1.

Dificultad	D1. Confusión de nociones en torno a la variable estadística

Estudiante \ Error / Tarea	E1						E2					E3				
	Dg	T1	T2	T3	T4	T5	T1	T2	T3	T4	T5	T1	T2	T3	T4	T5
Est. 1	✓	✓×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓
Est. 2	×	✓×	✓	**	✓	✓	✓	✓	**	✓	✓	×	✓	**	✓	✓
Est. 3	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓
Est. 4	×	✓	**	✓	✓	✓	✓	**	✓	✓	✓	✓	**	✓	✓	✓
Est. 5	×	✓×	**	✓	✓	✓	✓	**	✓	✓	✓	×	**	✓	✓	✓
Est. 6	✓×	✓	**	✓	✓	✓	✓	**	✓	✓	✓	✓	**	✓	✓	✓
Est. 7	×	✓×	✓	✓	✓×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓
Est. 8	✓×	✓×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓
Est. 9	✓×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Est. 10	×	✓×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Est. 11	×	✓×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	✓
Est. 12	**	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Est. 13	✓×	✓	×	✓	✓	**	✓	✓	✓	✓	**	✓	✓	✓	✓	**

✓ El estudiante avanza en la superación del error
× El estudiante persiste en el error
✓× El estudiante continúa incurriendo en algunos de los errores asociados al error previsto en la fase de preparación del experimento de enseñanza º
** El estudiante no asiste a la sesión.

Anexo F. Relación acciones del experimento de enseñanza con elementos del análisis didáctico



Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa

Hernán Rivas[1] *y Juan D. Godino*[2]

[1]hrivasa@uc.cl, Pontificia Universidad Católica de Chile, Campus Villarica
[2]jgodino@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

Se ejemplifica el uso de las nociones de configuración didáctica y hecho didáctico significativo para describir un proceso formativo sobre nociones probabilísticas elementales realizado con un grupo de 58 estudiantes de magisterio. La experiencia de enseñanza está basada en la resolución de una secuencia de cuestiones relativas al lanzamiento de dos dados y al comportamiento de la suma de puntos obtenidos en series cortas y largas de tales lanzamientos. La metodología de análisis aplicada ha permitido caracterizar el modelo didáctico implementado, identificar conflictos de significado manifestados en el proceso de estudio y el modo en que son abordados. Estos hechos didácticos pueden explicar las limitaciones de aprendizaje de las nociones y técnicas probabilísticas pretendidas.

Palabras clave: Formación de profesores, Probabilidad, Análisis didáctico, Enfoque Ontosemiótico.

1. Introducción

Una de las fases de las investigaciones orientadas al diseño didáctico es el análisis de la implementación de los procesos formativos bajo estudio. En ella se trata de realizar, en las condiciones reales del aula, las actividades docentes y discentes previamente planificadas. Este tratamiento es uno de los principales factores o variables independientes que influyen en el aprendizaje. Por tanto, la descripción y análisis de la implementación de un proceso de estudio es una fase clave de la ingeniería didáctica, junto con el análisis preliminar, el diseño y el análisis retrospectivo (Godino, Rivas, Arteaga y Wilhelmi, 2014).

En este trabajo vamos a ejemplificar el uso de algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) para analizar la fase de implementación de un proceso formativo de futuros profesores de educación primaria sobre nociones probabilísticas elementales. Las nociones específicas que vamos a aplicar son las de configuración didáctica, hecho didáctico significativo (HDS) e idoneidad didáctica.

La aplicación de las nociones de configuración y trayectoria didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006) permite realizar análisis detallados de: a) el progresivo despliegue de los significados institucionales implementados; b) de los aprendizajes y de su dependencia de los formatos de interacción que efectivamente tienen lugar; c) del uso de los recursos y del tiempo asignado. En este tipo de análisis el foco de atención es la descripción de: 1) el contenido efectivamente tratado; 2) los patrones de interacción docente – discentes; 3) el reconocimiento de los conflictos cognitivos e interaccionales que tienen lugar y la forma en que éstos son abordados por el docente y los estudiantes.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 339-346). Granada, 2015.

La noción de idoneidad, componentes e indicadores empíricos, resulta útil para seleccionar e interpretar unidades de análisis que representan los HDS.

2. Problema, marco teórico y metodología

La cuestión que nos planteamos en este trabajo es, *¿cómo identificar en la implementación de un proceso instruccional hechos y fenómenos didácticos relevantes que potencialmente pueden condicionar y explicar los aprendizajes logrados por los estudiantes?*

Esta cuestión emerge y cobra sentido dentro del marco de análisis de los procesos de instrucción matemática iniciado por Godino, Contreras y Font (2006) bajo la perspectiva del EOS y complementado con la visión ampliada de la ingeniería didáctica presentada en Godino, Rivas, Arteaga y Wilhelmi (2014). En estos trabajos se han introducido las nociones de configuración didáctica, trayectoria didáctica y hecho didáctico significativo que sintetizamos a continuación. Aludimos también a la noción de idoneidad didáctica sus componentes e indicadores, ya que se utiliza para identificar e interpretar los HDS.

Una *configuración didáctica* es un segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación – problema diseñada o implementada. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea. La situación – problema sobre la cual se delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtareas cada una de las cuales se puede considerar como una subconfiguración.

El análisis detallado de un proceso de estudio matemático requiere dividir la crónica del mismo en unidades de análisis, siendo útil para ello la noción de configuración y subconfiguración. No obstante, en el transcurso de una subconfiguración didáctica pueden ocurrir *hechos didácticos* que interesa analizar. En Wilhelmi, Font y Godino (2005) se define un *hecho didáctico* como cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en el devenir de los procesos de instrucción matemática y que, por alguna razón, se considera como una unidad (por ejemplo, resolver una ecuación en la pizarra). Los hechos que implican una cierta *regularidad explicable* en el marco de una teoría constituyen un *fenómeno*; pero también pueden carecer de esa regularidad en cuyo caso se tiene un fenómeno singular (dan pie a "teoremas de existencia y a contraejemplos").

A partir de las nociones anteriores Godino et al. (2014), introducen la noción de hecho didáctico significativo (HDS). Estos autores consideran que un *hecho didáctico* es significativo (HDS) si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido. La significatividad se puede entender desde el punto de vista del docente, del estudiante, o bien desde un punto de vista institucional externo al sistema didáctico, es decir, del sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional. Se pueden asimilar a fenómenos singulares ya que la interpretación se hace siempre desde una cierta teoría.

Una de las teorías que permite categorizar y analizar HDS es la teoría de la idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores empíricos Godino (2011). Esta noción se define como un criterio sistémico y coherente compuesto por las dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional (interaccional y mediacional. Para cada una de estas dimensiones se definen componentes y criterios que resultan útiles para identificar y analizar HDS que se manifiestan en el desarrollo de una trayectoria didáctica.

El uso de estas nociones lo vamos a ejemplificar mediante la descripción de la trayectoria didáctica de un proceso formativo sobre nociones probabilística con futuros maestros de educación primaria realizado con un grupo de 58 estudiantes en la Facultad de Educación de la

Universidad de Granada. Este proceso se realiza en dos sesiones de clase (una de 1 hora, y otra de 2 horas) mediante la resolución de una situación - problema que pone en juego los conceptos y procedimientos probabilísticos elementales: experimento aleatorio, espacio muestral, probabilidad, regla de Laplace, ley de los grandes números (Figura 1).

Enunciado de la situación – problema: proyecto "lanzamiento de dos dados"

Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha.

a. ¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona la respuesta.
b. ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego? ¿Quién tiene más probabilidades de ganar? Razona las respuestas.
c. Simula el lanzamiento de dos dados. Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes.
d. ¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué? Razona las respuestas.

Una vez recogidos los datos para el conjunto de las parejas formadas en la clase se plantean las siguientes cuestiones:

a. ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar? ¿Qué puede hacer un profesor en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?
b. Construir un diagrama de barras adosadas en el que se represente la distribución de frecuencias relativas de la tabla 4.3 y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "suma de puntos al lanzar dos dados". ¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10000 veces?

Figura 1. Enunciado de la situación problema

3. Trayectoria didáctica generada. Hechos didácticos significativos

Este proyecto fue implementado en dos sesiones, siendo el profesor quien presentó los temas facilitando la comprensión de los contenidos teóricos, guiando las reflexiones y moderando instancias de debates. La actividad didáctica realizada conjuntamente entre profesor y estudiantes para dar respuesta a cada una de las cuestiones y los medios utilizados constituye una configuración didáctica, y la secuencia de dichas configuraciones la trayectoria didáctica implementada.

Describimos aquí una de las clases teniendo en cuenta algunos HDS que fueron observados y posteriormente, se incluye una síntesis de los HDS que caracterizan la totalidad de la trayectoria didáctica implementada.

3.1. Sesión de clase 1 (una hora)

La clase comienza con la presentación del proyecto, con el cual se pretende motivar y justificar el estudio de las nociones básicas de probabilidad orientadas a la toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre. Seguidamente, se propone resolver la "actividad 1" y responder las cuestiones planteadas. Para resolver la actividad, la simulación del lanzamiento de dos dados se realiza físicamente mediante el uso de trozos de papel de igual tamaño numerados de uno a seis; estos son tomados aleatoriamente por los estudiantes y luego anotan la suma de los valores obtenidos.

Durante el desarrollo de la actividad, el profesor interviene con frecuencia para evaluar y retroalimentar el trabajo de los grupos. Durante sus intervenciones, se ponen en evidencia algunas dificultades que manifiestan los estudiantes para responder y justificar la pregunta "¿Qué prefieres ser jugador A o B?". A continuación incluimos un HDS donde se recoge la respuesta de uno de los grupos.

P: […] Vamos a compartir y discutir las respuestas planteadas a la primera cuestión. Teresa, nos va explicar cómo han resuelto la tarea en su grupo (Figura. 2). Teresa, ¿qué prefieres ser jugador A o jugador B?
Teresa: Prefiero ser el jugador A.
P: ¿Están de acuerdo los demás? ¿Qué prefieren ser jugador A o B?
E_{12}: No, es mejor ser B.
E_{13}: Yo opino que A (hay opiniones divididas).
P: ¿Por qué opinas que es mejor ser B? (se dirige a E_{12}).
E_{12}: Porque de 11 resultados posibles (espacio muestral del experimento), el jugador A puede obtener 6, 7, 8 ó 9; entonces, tiene cuatro posibilidades. En cambio B tiene todas las demás posibilidades, que son siete.
P: ¿Y tú por qué prefieres ser A? (se dirige a Teresa)
Teresa: Porque el jugador A tiene 11 posibilidades, que son las que he anotado arriba. En cambio B tiene 10, que son las que aparecen abajo.

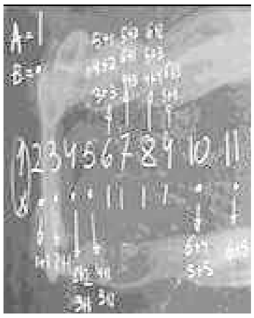


Fig.2.Solución a la cuestión a

Desde la teoría de la idoneidad didáctica este HDS puede ser interpretado bajo los criterios de idoneidad cognitiva (Godino, 2011), en tanto se observan discrepancias entre el significado personal y el significado institucional pretendido. En efecto, la justificación dada por E12 se realiza a partir de los resultados en que gana cada jugador, en lugar de tener en cuenta las sumas posibles para cada resultado (sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992)); y en la respuesta de Teresa, se representan erróneamente las sumas posibles, interpretando dos sumas que aparecen en distinto orden como un único suceso.

Una vez que la mayoría de los estudiantes respondieron las cuestiones "a", "b", "c" y d", el profesor interviene para discutir algunas respuestas y sistematizar los contenidos tratados. El siguiente HDS es una de las unidades de análisis que fueron seleccionadas en esta parte de la actividad.

P: […] Vamos a sistematizar este contenido. Aquí tenemos la suma de puntos (casos posibles) de lanzar los dos dados. Tenemos los dos dados, dado uno y dado dos; si se lanzan los dados y se suman los puntos salen 36 casos posibles de sumar. Las sumas son estas: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 4,… El espacio muestral del experimento aleatorio de lanzar dos dados y sumarlos que es, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Son las 11 posibilidades distintas de sumas […].
[…] En este experimento tenemos que ver de los 36 casos posibles, ¿en cuántos casos gana A y en cuántos gana B? Hay 20 casos en que gana A y 16 donde gana B. Hay más casos en los cuales gana A […].

Este HDS se enmarca en el criterio de idoneidad interaccional. El profesor interviene para abordar la respuesta esperada y dar un status oficial al contenido tratado.

Después de esta actividad el profesor plantea algunas preguntas tendientes a evaluar la comprensión lograda respecto al cálculo de probabilidades, observándose que los estudiantes no tienen mayores dificultades para determinar dicha probabilidad. La clase continúa con la sistematización de algunos contenidos (conceptos, técnicas, representaciones,…), sobre los cuales no citamos HDS por razones de espacio.

Después de las explicaciones señaladas, el profesor propone continuar con el desarrollo de las cuestiones “e” y “f” donde, entre otros, se recoge el siguiente HDS:

E27: […] En la pregunta “¿Qué ha ocurrido?”, ¿es lo mismo que antes?
E28: No.
E27: ¿Por qué no? Igual ha salido que ha ganado B. Siempre ganará B.
E28: Pero los experimentos son muy pocos […].

Este HDS alude a un criterio de idoneidad interaccional por el formato dialógico de interacción (hay comunicación entre estudiantes) y también puede ser interpretado con un criterio de idoneidad cognitiva. En efecto, E27 fundamenta su explicación en los resultados obtenidos (frecuencias) al realizar el experimento 100 veces, en lugar de tener en cuenta la ley empírica de los grandes números. Según Kahneman et al. (1982), este fenómeno se conoce como el sesgo de la heurística de representatividad.

En la cuestión “f”, hay estudiantes que utilizan las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas para comparar las dos distribuciones (distribución de probabilidad y de frecuencias) y se manifiestan también dificultades para construir el gráfico de barras adosadas. Este HDS, puede ser asociado a un criterio de idoneidad epistémica por el carácter representacional que tienen los gráficos (lenguaje) y da cuenta también de una discrepancia entre el significado personal y el significado institucional pretendido (idoneidad cognitiva).

Los conflictos anteriores fueron retomados en la fase de institucionalización realizada por el profesor, previo a finalizar la clase.

3.2. Síntesis de hechos didácticos significativos

En la Tabla 1 (Rivas, 2014) incluimos una síntesis de los principales HDS observados en la implementación del proyecto “Lanzamiento de dos dados”, clasificados según las facetas epistémica, cognitiva, interaccional y mediacional.

Tabla 1. Síntesis de hechos didácticos significativos en el estudio del proyecto

FACETAS	HECHOS DIDÁCTICOS SIGNIFICATIVOS
Faceta epistémica (Objetos y procesos)	- El estudio de las nociones elementales de probabilidad se realiza a partir del *proyecto* “Lanzamiento de dos dados”; se incluyen además otras dos tareas (lanzamiento de tres monedas y probabilidad de votar) enfocadas en ejercitar los conocimientos estudiados. - Las *representaciones de uso convencional* en probabilidad (espacio muestral, tabla y gráfico de distribución de probabilidad, casos favorables y casos posibles) son recordadas por el profesor a partir de la presentación de la solución esperada y de la síntesis de los contenidos estudiados. Durante la sesión 2 el profesor muestra algunos programas informáticos que permiten justificar gráficamente la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad; simulando, el experimento del lanzamiento de dos dados y el lanzamiento de una moneda. - Se proponen *procesos de traducción* entre distintas representaciones: representación de las sumas obtenidas de lanzar dos dados en tablas de conteo, representación de los casos posibles en tablas de distribución de probabilidad y de las sumas obtenidas en tablas de frecuencias, representación de la distribución de probabilidad y distribución de frecuencias en gráficos, y, comunicación de conjeturas y conclusiones en lenguaje natural. - Los *conceptos y definiciones básicas* de probabilidad (experimento aleatorio, casos posibles, espacio muestral, casos favorables, regla de Laplace, tabla de distribución de probabilidad, gráfico de distribución de probabilidad, proporción, variable estadística, porcentaje, tabla de distribución de frecuencias, gráfico de barras adosadas, diagrama de árbol) son recordados por el profesor en intervenciones puntuales y durante la presentación de la solución esperada.

	- Los *procedimientos fundamentales* del tema de estudio son mayoritariamente aplicados por los estudiantes para dar respuesta a la cuestiones planteadas (realización del experimento, registro de los resultados, elaboración de tablas de frecuencias, construcción de gráficos de barras adosadas y cálculo de probabilidad). La tabla y el gráfico de distribución de probabilidad del experimento de lanzar dos dados es presentada por el profesor. - Las principales *propiedades* del tema de estudio (regla de Laplace, ley empírica de los grandes números, convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad) son dados por el profesor a través de institucionalizaciones puntuales y de la síntesis de contenidos presentada en la clase 5. El profesor ejemplifica la propiedad de la ley empírica de los grandes números con las estimaciones que hacen las compañías de seguro para establecer las primas. - Los estudiantes *recogen datos* a través de la simulación del *experimento aleatorio* lanzar dos dados, aunque finalmente no son utilizados en el análisis de los datos recogidos en el conjunto de la clase (actividad 2). - Los estudiantes tienen la oportunidad de *comparar* gráficamente la *distribución de probabilidad* del experimento “Lanzamiento de dos dados” con la *distribución de frecuencia* al haber realizado el experimento 100 veces. Para ello realizan gráficos manualmente (sesión 4) y también mediante la hoja de cálculo (sesión5). - Frente a la siguiente pregunta hecha por el profesor “imaginemos ahora que se juega 100 veces, muchas veces, ¿qué pasará?”, los estudiantes se ven enfrentados a *realizar predicciones en base a la probabilidad* de que gane el jugador A o B; aunque, es el profesor quien justifica aplicando la propiedad de la “ley empírica de los grandes números”. - Durante el desarrollo del proyecto el profesor favorece permanentemente la capacidad de *argumentar*, pidiendo a los estudiantes que justifiquen de manera razonada sus respuestas.
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizaje, conflictos)	En el desarrollo del proyecto se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos: - Frente a la cuestión “¿Qué prefieres ser jugador A o B?” Razona tu respuesta, • Todos los resultados del experimento son equiprobables (sesgo de la equiprobabilidad) • Dificultad para determinar las sumas posibles y obtener el espacio muestral del experimento. Estos contenidos son explicados por el profesor durante los procesos de institucionalización. • Justificación en base al número de valores de la variable aleatoria “suma de puntos al lanzar dos dados” asociados a cada jugador, en lugar de considerar las sumas posibles para cada valor. Hay cuatro valores (resultados) donde gana A (6, 7, 8 y 9) y siete donde gana B (2, 3, 4, 5, 10, 11 y 12). El profesor cuestiona esta respuesta y propone que se realice otro tipo de justificación. • Se concluye en base a los resultados obtenidos al simular el lanzamiento de los dados 10 veces (sesgo de la heurística de representatividad). • Dificultad para representar las sumas posibles al lanzar dos dados (uso de tabla de doble entrada y diagrama de árbol). El profesor explica estos modos de representación en sus intervenciones magistrales. • Dos sumas que aparecen en distinto orden se consideran como un único suceso; por ejemplo, 5+1 y 1+5 se contabiliza solo una vez. El profesor no aborda este conflicto durante la clase, en su lugar, alude a la solución esperada para que los estudiantes corrijan su respuesta. - Al responder las cuestiones: “¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar?” • Hay estudiantes que responden que siempre ganará B, justificando en base a los resultados obtenidos al realizar el experimento 100 veces (sesgo de la heurística de representatividad). • Un estudiante señala que “ha ganado más veces el que ha tirado más veces” justificando mediante los valores de la variable asociados a cada jugador (en cuatro casos gana al jugador A y siete a B). En esta respuesta se evidencia una dificultad de comprensión

	con el concepto de distribución de frecuencias (no se reconoce el número de lanzamientos ni se distingue entre el valor de la variable y las frecuencias) y se manifiesta el sesgo de la equiprobabilidad. - En la construcción del diagrama de barras adosadas, • Hay estudiantes que utilizan las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas al comparar las dos distribuciones (distribución de probabilidad y de frecuencias). • Error en el uso de la escala. Se escriben las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas en el eje de ordenada. • Se construyen todas las barras juntas a modo de histograma. • Se construyen todas las barras separadas. • No se incluye título ni etiquetas en el gráfico. En el desarrollo de la tarea “Lanzamiento de tres monedas”, se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos: - Al determinar los casos posibles, se identifican cuatro casos en lugar de ocho. Hay estudiantes que no comprenden que el lanzamiento de cada moneda debe ser visto de manera independiente, considerado los dos resultados que aparecen en distinto orden (cara, cara, cruz con cruz, cara, cara y cruz, cruz, cara con cara, cruz, cruz) como un único suceso. El profesor propone considerar que son tres monedas que se lanzan secuencialmente (moneda 1, moneda 2 y moneda 3) y que se deben tener en cuenta todas las formas en que podrían estar dispuestas las tres monedas. - Dificultad para determinar la equidad en el juego; hay estudiantes que no logran plantear un procedimiento para resolver la situación. Una estudiante propone utilizar la regla de tres y el profesor explica cómo resolver la situación a través del planteamiento de una ecuación con dos incógnitas. En el desarrollo de la tarea “Probabilidad de votar” se ha manifestado como relevante el siguiente conflicto: - Dificultad para calcular la probabilidad de este suceso compuesto. Hay estudiantes que en lugar de calcular el producto de las tres probabilidades multiplican la probabilidad de votar (0,85) por tres. El profesor explica el procedimiento correcto. - Representación del problema mediante un diagrama de árbol. Este contenido es abordado por el profesor en la presentación de la solución esperada.
Faceta interaccional (Procesos didácticos)	La metodología didáctica privilegia las actividades de grupo y las intervenciones magistrales con algunas instancias de trabajo individual que se generan de manera espontánea. - En las actividades de grupo, el profesor apoya permanentemente el trabajo de los estudiantes aclarando dudas y evaluando sus aprendizajes (evaluaciones espontaneas). Frente a algunas dificultades, hay veces en que insinúa la solución rebajando la dificultad inicial del proyecto. - Al finalizar la sesión 1, se recogen los informes del proyecto con los avances de los grupos como parte de un proceso de evaluación formativa. En la siguiente clase (sesión 2), el profesor realiza la retroalimentación a partir de los informes que contienen respuestas correctas sin profundizar mayormente en los errores. - En los procesos de institucionalización, el profesor sistematiza convenientemente los contenidos centrales del tema.
Faceta mediacional (Recursos; tiempo)	- La simulación física de los dados mediante el uso de trozos de papel ha resultado bastante eficaz, aun cuando, en el principio se presentaron algunas dificultades. - El tiempo ha resultado insuficiente para abordar algunas actividades; específicamente, en la actividad 2 no se utilizaron los datos del experimento realizado por los grupos por falta de tiempo y en su lugar, se emplearon datos entregados por el profesor.

El análisis de los HDS identificados, relativos a la faceta epistémica, permite describir la trayectoria epistémica efectivamente implementada, esto es, los conceptos, representaciones, proposiciones, procedimientos y justificaciones probabilísticas que han sido tratados en clase para dar respuesta a las cuestiones planteadas. También se reconoce el papel del profesor y los estudiantes en la gestión de tales conocimientos cuando el foco de atención es la faceta interaccional y mediacional, revelándose un cierto predominio de la transmisión del conocimiento respecto a la indagación autónoma por parte de los estudiantes. La secuencia de HDS relativos a la faceta cognitiva muestra la trayectoria cognitiva, esto es, la progresiva construcción de los conocimientos por los estudiantes, los puntos conflictivos que se presentan y si tales conflictos son reconocidos y abordados por el profesor. En nuestro estudio destacan las dificultades para construir el espacio muestral del experimento, el sesgo de equiprobabilidad y la heurística de representatividad. La comparación mediante diagramas de barras adosadas de las distribuciones de frecuencias relativas y de probabilidad también ha requerido una atención específica.

4. Reflexiones finales

La investigación de diseño o ingeniería didáctica requiere avanzar en el desarrollo de herramientas teóricas que permitan ampliar las posibilidades de análisis que brindan los actuales marcos teóricos en las diferentes fases del proceso investigativo.

A través de este trabajo, hemos mostrado que en la fase de implementación del proceso formativo las nociones de configuración, subconfiguración, hecho didáctico significativo e idoneidad didáctica permiten, por una parte, delimitar y condensar la crónica del proceso de estudio y por otra, realizar una descripción y análisis detallado de los contenidos puestos en juego, los patrones de interacción y los conflictos que han tenido lugar.

Destacamos que la enseñanza de las matemáticas, y en particular la estadística, debe partir y centrarse en el uso de situaciones - problemas (proyectos de análisis de datos), como una estrategia de dar sentido a las técnicas y teorías estudiadas, y de propiciar momentos exploratorios de la actividad matemática. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) (Godino et al, 2007), cuyo estudio, requiere de procesos didácticos de validación, institucionalización y ejercitación. Esto supone un importante desafío para el profesor en el logro de una enseñanza idónea de los contenidos estadísticos, más aún, cuando hay factores sobre los cuales el docente no tiene control, como es el tiempo asignado al estudio.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

Referencias

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 34 (2/3), 167-200.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Wilhelmi, M. R., Font, V. y Godino, J. D. (2005). Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las matemáticas: Reflexiones sobre la Teoría de Situaciones Didácticas y el Enfoque Ontológico y Semiótico. *Colloque International «Didactiques: quelles references epistemologiques»*. Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education. IUFM d'Aquitaine (Bordeaux, France). Versión en español disponible en : www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/bases_empiricas_5junio06.pdf.

Invariantes operatórios mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental ao resolverem situações envolvendo combinatória

Eliana Gomes de Oliveira[1] y Cileda Queiroz e Silva Coutinho[2]

[1]elianac4@yahoo.com.br, Instituto Federal da Bahia-IFBA
[2]cileda@pucsp.br, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Resumo

Na presente comunicação, discutimos os resultados de uma pesquisa de Mestrado em Educação Matemática na qual tivemos como objetivo identificar invariantes operatórios mobilizados de forma estável por professores que lecionam nos anos inicias do ensino fundamental, durante a análise de situações-problema envolvendo combinatória. O estudo realizado é de natureza qualitativa e se caracteriza como um estudo de caso. Os sujeitos foram 14 professores dos anos iniciais da Secretaria Municipal de Guanambi-Ba, que responderam ao um questionário, sendo que cinco foram convidados a nos conceder uma entrevista. Os dados coletados foram analisados à luz da Teoria dos Campos Conceituais, buscando responder à questão norteadora desta pesquisa: Quais invariantes operatórios os professores que lecionam nos anos iniciais do Ensino Fundamental mobilizam de forma estável, durante a análise de situações envolvendo Combinatória? As análises apontaram que esses professores possuem conceitos restritos sobre combinatória, uma vez que não mobilizaram invariantes operatórios que permitem a generalização do principio multiplicativo. A investigação apontou que, em situações que envolvam mais de duas etapas, e que tenham um número maior de possibilidades, esse invariante não era mobilizado em seu domínio de validade. Dessas inferências emerge a necessidade de uma formação que contemple a discussão tanto de conhecimentos didáticos quanto específicos (Combinatória), de forma a desencadear uma reflexão criteriosa sobre prática docente relativa a este conteúdo.

Palavras-chave: Combinatória, Educação Matemática, Teoria dos Campos Conceituais, Invariantes operatórios.

1. Introdução

Este estudo está inserido em um projeto desenvolvido pelo grupo de pesquisa Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática (PEA-MAT) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), em projeto colaborativo com o grupo de pesquisa Didactica de las Matemáticas (DIMAT), da Pontifícia Universidad Católica del Peru (PUCP).

Na revisão de literatura identificamos pesquisas que investigaram saberes de professores em relação aos conhecimentos de combinatória e pudemos observar que os resultados apontam para o fato de que professores desconhecem os currículos prescritos e não tem conhecimentos específicos para ensinar esse objeto matemático-combinatória. A esse respeito podemos citar as pesquisas de Costa (2005), Sabo (2010), Santos (2011) e Rocha (2010). Estes conhecimentos, segundo Ball, Thames e Phelps (2008), são necessários para o exercício da docência.

Pesquisas realizadas por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (2006) com alunos do ensino secundário apontaram que os grupos revelaram dificuldades, mesmo nos exercícios que apresentavam agrupamentos com poucos elementos. Entre os erros, os autores elencaram:

a. Interpretação do enunciado do problema;
b. Ordem (considerar a ordem, quando esta é relevante);
c. Repetição (o aluno não considera a possibilidade de repetir os elementos quando é possível e vice-versa);
d. Confusão em relação ao tipo de objeto (confundir objetos indistinguíveis por objetos distinguíveis e vice-versa);
e. Exclusão (excluir algum elemento na forma da configuração);
f. Enumeração não sistemática (tentar resolver o problema enunciado por tentativa e erro, sem um processo recursivo que conduz à formação de todas as possibilidades);
g. Respostas intuitivas (o aluno dá uma resposta numérica, sem justificativa);
h. Interpretação errada do diagrama de árvore (pouco uso e construção inadequada.)

Esses autores afirmam que o professor deve estar atento às diferentes variáveis, como, o número de possibilidades, de etapas na elaboração de atividades, para conseguir uma evolução do raciocínio combinatório, de forma que os alunos compreendam e tenham concepções corretas para os trabalhos com análise combinatória. Ainda, recomendam que a organização do ensino apresente atividades que abranjam o pensamento recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de centrar o ensino e a aprendizagem apenas na definição e na aplicação de fórmulas.

A discussão desses autores reforça nossa opção por essa pesquisa em desenvolver um projeto e refletir a respeito dos conhecimentos dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais e justifica-se, porque esses docentes não possuem formação na área e, assim, nossa investigação pode, e deve suscitar novas discussões com o intuito de promover a melhoria do ensino de Matemática nesse nível da escolaridade.

Além de as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (Brasil, 1997) destacar que o desenvolvimento do pensamento combinatório deve acompanhar a escolaridade matemática, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Ainda, segundo tais documentos, a abordagem da combinatória tem como objetivo fazer com que os alunos dos anos iniciais tenham contato com situações que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem, sem necessariamente formalizá-los.

Nossa opção por desenvolver uma pesquisa centrada na identificação de invariantes operatórios mobilizados por professores dos anos iniciais do ensino fundamental se deu, basicamente, por nosso intuito de ampliar a discussão, e compará-la com pesquisas anteriores.

As pesquisas analisadas apontaram que grande parte dos professores não ministrava o conteúdo de combinatória e, quando o faziam, não desenvolviam um trabalho que mobilizasse os alunos a desenvolverem um raciocínio combinatório. Esses pesquisadores apontam que o pensamento combinatório merece ser investigado, pois representa uma ferramenta útil para diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicações. Além disso, permite a elaboração de situações que podem ser discutidas por meio da construção de conjecturas e discussões de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação, nos diferentes níveis de ensino.

2. Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), proposta por Vergnaud (1996) visa ao estudo do desenvolvimento das competências para a aprendizagem, em especial, a aprendizagem matemática.

Essa teoria assume como pressuposto que o conhecimento se constrói e se desenvolve no tempo, em interação adaptativa com as situações. Segundo Vergnaud (2009a), quando o indivíduo confronta novas situações, utiliza os conhecimentos adquiridos em suas experiências passadas. Para ele, "conhecimento é adaptação, e esse se dá em diferentes situações, e é por meio de uma evolução da organização de suas atividades que o individuo se adapta" (Vergnaud, 2009a, p.13). Nessa perspectiva, um conceito não pode ser reduzido à sua definição, o mesmo não tem sentido em si mesmo, mas adquire sentido, quando se envolve numa classe de situações a serem resolvidas. Cabe pontuar, ainda, que para esse pesquisador, o domínio de um campo conceitual ocorre num longo período de tempo, por meio de experiência e maturação. Vergnaud define campo conceitual da seguinte maneira:

> Um campo conceitual é ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações. (Vergnaud, 2009, p. 29)

Para os processos de ensino e de aprendizagem, os campos conceituais não são independentes. Dessa forma, em seus estudos, o autor aborda distintos campos conceituais, ressaltando a organização de conceitos em campos de estruturas aditivas (compreendem para sua resolução uma adição, uma subtração ou a combinação das duas operações) e as estruturas multiplicativas (composta por multiplicação, divisão ou combinação das duas operações). Nesta pesquisa não é nosso objetivo estudar as particularidades dessas estruturas, mas sim, sua relação quanto às noções de agrupamentos e contagem.

Para Vergnaud (1996), a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada por meio de diversas situações a ele associadas e destacar os invariantes operatórios que levam o indivíduo a reconhecer que elementos fazem parte dessa situação. O autor considera que uma construção do conceito envolve uma terna de conjunto e, simbolicamente, é representado por C = (S, I, L).

> S é um conjunto de situações, que dão sentido ao conceito; I conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações; L conjunto das representadores linguísticas e simbólicas (algébricas, gráficas) que permitem representar os conceitos e suas relações, e consequentemente as situações e os esquemas que evocam. (Vergnaud, 2009a, p. 29)

Podemos dizer que o esquema é uma organização feita pelo próprio indivíduo, quando ele tem como objetivo conduzir o processo de resolução de uma classe de situação, porém, não consegue expressá-la por meio da linguagem natural. "O esquema não organiza somente a consulta observável, mas também o pensamento subjacente" (Vergnaud, 2009a p. 21)

Em uma dada situação, o sujeito dispõe de vários tipos de conhecimentos para identificar os objetos e suas relações, a partir dos objetivos e das regras de condutas pertinentes que são mobilizados nos esquemas. Esses conhecimentos são derivados de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, aos quais Vergnaud (1996, 2009a) designa pelo termo de "invariantes operatórios".

Podemos dizer que conceitos-em-ação constituem um objeto, ou uma categoria de pensamento considerada relevante e permite retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas-em-ação necessária ao cálculo e, ao mesmo tempo, dos objetivos. Para Vergnaud (2009a), os conceitos em ação permitem identificar os objetos, as propriedades e relações.

É interessante estudar os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação mobilizados pelos alunos no contexto didático. Estes conhecimentos-em-ação podem tornar-se ponto de partida para o avanço da compreensão de conceitos, embora nem sempre façam uso dos mesmos com consciência plena. É fundamental levar aos alunos às reflexões e discussões explícitas das relações e propriedades envolvidas nas situações.

Em nosso estudo, o conjunto de situações é contemplado pelas operações de combinatória (produto cartesiano, combinação, arranjo) e os invariantes operatórios referem-se aos componentes cognitivos que serão mobilizados pelos professores dos anos iniciais frente a essas situações, por meio das quais eles sejam capazes de reconhecer as propriedades do conceito como a relevância da ordem, o número de elementos por agrupamentos, as relações que podem ser reconhecidas por estes professores para analisar e entender estas situações e o conjunto de representações que serão identificados por meio de operações matemáticas, figuras, linguagem e outras representações (esquemas, enumeração).

A Teoria dos Campos Conceituais contribuiu para nossa pesquisa, no sentido de nos auxiliar nas análises dos invariantes operatórios manifestados pelos professores, ao responderem questões de combinatória.

3. Invariantes Operatórios Mobilizados pelos professores pesquisados

Considerado sob o ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais, as competências dos professores se desenvolvem ao longo do tempo, por meio de experiências com uma variedade de situações. Nesta perspectiva, analisamos que competências emergem por meio dos invariantes operatórios mobilizados pelos cinco professores entrevistados, tornando-as explícitas, a partir das operações, das relações, das propriedades referentes aos conceitos de combinatória. Foram propostas aos professores resolverem seis situações, nas quais envolvem diferentes contextos:

Este bloco da entrevista teve por objetivo diagnosticar invariantes operatórios mobilizados pelos professores em contexto de análise de situações envolvendo combinatória. Levantamos a hipótese de que, identificando tais invariantes, poderemos entender em que tipo de conhecimentos o professor se apoia, ao ensinar esse conteúdo e as possíveis dificuldades por eles encontradas. Foram propostas aos professores seis situações envolvendo diferentes contextos. As análises foram realizadas tendo como critério a identificação de configurações:

a. Situações que envolvem dois ou mais conjuntos de partida; e

b. Situações que envolvem um único conjunto de partida.

Discutimos cada contexto, identificando os tipos de situações propostas aos professores pesquisados:

a. As situações 1, 2 e 5 envolvem o mesmo contexto, partem de dois ou mais conjuntos para fazer as combinações. Nas situações 1 e 5, as combinações ocorrem a partir de dois conjuntos de partida e a questão 2 a partir de três conjuntos de partida;

b. As situações 3, 4 e 6 envolvem o mesmo contexto, um conjunto de partida para fazer combinações. As situações 3 e 4 envolvem duas etapas e a 6 três etapas. Em relação à ordem dos elementos nas combinações, na situação 3, a ordem dos elementos não é relevante e nas situações 4 e 6, a ordem é relevante.

A diferenciação entre os contextos das situações foi considerada de modo a garantir sua diversidade. Entretanto, no decorrer da entrevista, não explicitamos tal diferenciação de modo a garantir que os professores identificassem o tipo de contexto de forma autônoma.

- **Situação 1**: Uma loja vende bolsas de dois tamanhos (pequeno e grande), de quatro cores diferentes (preta, marrom, azul e branca). Maria quer comprar uma bolsa nesta loja. Quantos tipos diferentes de bolsa ela pode comprar? Justifique sua resposta;
- **Situação 2**: No café da manhã, Maria tem três opções de comidas (bolo, biscoito e queijo), dois tipos de bebidas (suco e café) e duas opções de complementos (cereais e frutas). De quantas maneiras diferentes Maria poderá tomar o café da manhã, combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de complemento? Justifique sua resposta;
- **Situação 3**: Para ser representante de turma, candidataram-se 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice- representante entre os três candidatos? Justifique sua resposta;
- **Situação 4:** Em uma escola, três alunos (Lucas, Marcos e Pedro) se destacaram em uma Gincana de Matemática, e dois devem representar a escola em uma olimpíada de Matemática. Quantas duplas distintas podem ser formadas? Justifique sua resposta;
- **Situação 5**: Para a festa de São João da escola, 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançar em com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?
- **Situação 6**: Quantas senhas de três algarismos distintos podem se formar com os quatro dígitos: 2, 5, 6 e 7?

Para melhor compreensão das análises, elaboramos dois tabelas: no primeiro, especificamos os invariantes operatórios mobilizados professores entrevistados, ao analisarem e responderem essas situações de combinatória que lhes foram apresentadas. No segundo tabela, identificamos em quais situações esses professores mobilizaram esses invariantes.

Tabela 1. Invariantes Operatórios identificados nas respostas dos professores
Fonte: Oliveira, 2014. p. 198

Invariantes Operatórios	Maria	José	Josy	Sonia	Cassia
I_1- O número de possibilidade é dado pela soma das opções.	x				
I_2- Faz enumeração para saber quantas são as possibilidades.	x	x	x	x	x
I_3- Estrutura multiplicativa: representação por árvore de posibilidades			x		x
I_4- Estrutura multiplicativa: representação por enumeração.					x

O processo de análise a respeito dos invariantes operatórios identificados nas resoluções feitas pelos os professores Maria, José, Josy, Sonia e Cassia evidenciam que, em algumas situações, eles fazem escolhas corretas, embora se evidencie que o conhecimento-em-ação em jogo não foi mobilizado de forma estável pois não ocorre em todas as situações semelhantes.

O resultado das análises nos dão indícios de que esse conteúdo é pouco trabalhado e ainda não apreendido pelos professores. Na verdade, não esperávamos por esse resultado, pois as situações propostas dizem respeito à número reduzido de possibilidades e com, no máximo, três etapas, para que fosse possível representá-las por uma enumeração, tabela de dupla entrada ou diagrama de árvore. Segundo as pesquisas selecionadas para revisão de literatura, e a exemplo das pesquisas desenvolvidas por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Sabo (2010), são representações que encaminham para generalização do princípio multiplicativo e, consequentemente, para a construção do conhecimento de Combinatória.

Em relação aos invariantes operatórios mobilizados pelos professores entrevistados (Quadro 1), percebemos que, com exceção da professora Cassia, os outros quatro professores ainda não construíram os conceitos que permitem a construção de estratégias que para cada situação. No caso da professora Maria, ela mobiliza o invariante operatório I_1 nas situações 1 e 5, mas não mobiliza esse conhecimento para a situação 2, em que se envolve o mesmo contexto, porém, com três conjuntos de partida (não consegue ampliar a estratégia utilizada)

Para Vergnaud (1996), o invariante operatório desenvolvido pelo sujeito pertence a uma classe de situações nas quais nem sempre se dispõe de competências necessárias para resolvê-las, caso que se aplica a esses professores, e inferimos que podem vir a desenvolvê-las.

Também é de parecer de Vergnaud (2009a), quando o sujeito atribui significado à situação, mobiliza esquemas prévios para aplicá-los ao novo contexto que, nem sempre, é válido. Os professores desta pesquisa, de uma forma geral, mobilizam o invariante operatório I_2 na maior parte das situações, como mostra no quadro 2.

Tabela 2: Invariantes mobilizados pelos professores por situação
Fonte: Oliveira, 2014. p. 198

Professores	Situações					
	1	2	3	4	5	6
Maria	I_1	I_2	I_2	I_2	I_1	I_2
José	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2
Josy	I_3	I_2	I_2	I_2	I_3	I_2
Sonia	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2
Cassia	$I_{3.}$	I_3	I_2	I_2	I_3	I_4

Observamos no transcorrer das análises, o invariante I_2 é mobilizado de maneira eficaz em situações que envolvem duas etapas, mas em situações em que se envolvem três etapas, isto não ocorre da mesma forma. Nas situações 2 e 6, os professores Maria, José, Josy e Sonia não tiveram sucesso, uma vez que não conseguiram mobilizar esse invariante de forma eficaz. A esse respeito, Vergnaud (1996) afirma que, quando um esquema é ineficaz para uma determinada classe de situações, a experiência tende a querer mudar de esquema, o que não ocorreu com os professores entrevistados, exceto pela professora Cassia, que mobilizou esse invariante somente nas situações 3 e 4 e, nas demais situações, buscou elementos que permitissem aplicar a multiplicação, como mostra o **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

A esse respeito, Roa (2000) revela que há diversas estratégias intuitivas de enumeração, como, por exemplo, a seleção aleatória dos elementos, tentativas de enumerar todos os agrupamentos, sem utilizar elementos que não foram utilizados em outro agrupamento.

O esquema mobilizado pelas professoras Josy e Cassia, nas situações 1 e 5 pode ser classificado como um conceito-em-ação pertinente, visto que é uma proposição verdadeira para identificar a quantidade de possibilidades. No entanto, a professora Josy não conseguiu adaptar esse invariante operatório I_3 para a classe de situações envolvendo três etapas.

Nas situações 3 e 4, todos os professores mobilizaram o invariante operatório da enumeração. Os professores Josy, Sonia e Cassia tiveram dificuldades para identificar a relevância da ordem, ainda que, as duas situações envolvessem um número reduzido de possibilidades. Diante dos questionamentos do pesquisador, as mesmas conseguiram identificar todas as possibilidades.

Na situação 6, por envolver três etapas e um número maior de possibilidades, somente a professora Cassia desenvolveu uma resolução satisfatória, mobilizando o invariante operatório I_4.

Para Vergnaud (1996), os processos cognitivos e as respostas dos sujeitos são acionados conforme cada situação. Em razão disso, o trabalho com um conjunto de situações, denominado “campo conceitual da combinatória” requer o domínio de uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas.

4. Discussões e Considerações

Neste artigo apresentamos quais invariantes os professores dos anos iniciais do ensino fundamental mobilizam diante de situações envolvendo combinatória. Fundamentamos na Teoria dos Campos Conceituais. Verificamos que a entrevista semiestruturada realizada com esses cinco professores e a fundamentação teórica escolhida nos forneceram subsídios para responder à questão norteadora da pesquisa, pois, conseguimos identificar os invariantes mobilizados por esses professores, diante das diferentes situações de Combinatória. Em outras palavras, foi-nos possível identificar os invariantes que permitiram conjecturar como esses professores abordam esse conteúdo em suas aulas.

Entendemos que sem o conhecimento específico do conteúdo a ser ensinado, torna-se inviável para o professor empregar métodos diferenciados, mobilizar seus alunos a aplicarem técnicas diferenciadas na execução de tarefas.

Os resultados observados nesta investigação implicam a busca por novas pesquisas cujo foco seja a formação continuada de professores, com uma proposta voltada para que eles aprendam a refletir e a discutir sua própria prática, seus conhecimentos didático e matemático, sobre o objeto matemático a ser ensinado aos seus alunos.

Salientamos que não é necessário que os cursos de formação de professores dos anos iniciais se restrinjam apenas a aspectos metodológicos. Entendemos que sem o conhecimento específico do conteúdo a ser ensinado, torna-se inviável para o professor empregar métodos diferenciados, mobilizar seus alunos a aplicarem técnicas diferenciadas na execução de tarefas.

Referências

Ball, D. L., Hill, H. H e Bass, H. (2008). Knowing mathematics for teaching: who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29 (1), 14-46.

Batanero, C., Godino, J. D e Navarro Pelayo, V. (1996). Razonamiento combinatório en alunos nos de secundaria. *Educación Matemática*, México, v.8, p. 26-39.

Batanero, C., Godino, J. D e Navarro Pelayo, V. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school. *Educational Studies in Mathematics 32*, 181-199;

Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*: 1º e 2º ciclos. 3. ed. Brasília: MEC/SEF.

Costa, C. A. (2003). *As concepções dos professores de matemática sobre o uso a modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental*. Dissertação Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Oliveira, E. G. (2014). *Raciocínio combinatório na resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental:* um estudo com professores. 230. Dissertação Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Roa, R. G. (2000) *Razonamiento combinatorio em estudiantes com preparación matemática avanzada*. Tese Doutorado.Universidade de Granada-

Rocha, C. A. (2011). *Formação docente e o ensino de problemas combinatórios*: diversos olhares, diferentes conhecimentos. Dissertação Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Sabo, R D. (2010). *Saberes docentes*: análise combinatória no ensino médio. Dissertação Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Santos, C. R. (2005). *O tratamento da informação*: *currículos prescritos, formação de professores e implementação na sala de aula*. Dissertação Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Vergnaud, G.(1996). *A teoria dos campos conceptuais*. In J. Brun, (Org.) *Didáctica das Matemáticas.* Lisboa: Horizontes Pedagógicos.

Vergnaud, G.(2009a). O *que é aprender*? In M. Bittar e C. Muniz (Org.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.* Curitiba: Ed. CRV.

Vergnaud, G.(2009b). *A criança, a matemática e a realidade*: *problemas do ensino da matemática na escola elementar.* Critiba: UFPRE

La contingencia: la tendencia mayoritaria de pensamiento probabilístico en futuros profesores de matemáticas en secundaria

Amable Moreno[1] *y José María Cardeñoso*[2]

[1]amoreno@fce.uncu.edu.ar, Universidad Nacional de Cuyo
[2]josemaria.cardenoso@uca.es, Universidad de Cádiz

Resumen

En este trabajo realizamos una caracterización en forma descriptiva de las cuatro tendencias de pensamiento probabilístico detectadas en los estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria de la provincia de Mendoza, Argentina; a la tendencia mayoritaria que llamamos hacia la *Contingencia*. Las tendencias de pensamiento detectadas fueron: Determinista, Personalista, Incertidumbre y Contingencia. Si bien la tendencia de pensamiento *Contingencia* es la que alcanza el mayor nivel de complejidad, dista de lo esperado para este grupo de estudiantes. Para concretar nuestra investigación, tomamos como marco teórico de referencia el sistema de categorías propuesto por Cardeñoso (2001), a partir del cual el autor elaboró y aplicó un cuestionario de concepciones probabilísticas en profesores de primaria. Las características más dominantes en la tendencia *Contingencia* son, el uso de las categorías *incertidumbre y multiplicidad en el reconocimiento de la aleatoriedad;* y el uso de las categorías *contingencia y laplaciana en la estimación de la probabilidad* y la escasa presencia del sesgo de equiprobabilidad.

Palabras clave: Tendencias de pensamiento probabilístico, Contingencia.

.

1. Introducción

Nuestro interés es la alfabetización probabilística de nuestra sociedad; por esta razón en este trabajo presentamos la caracterización de una de las cuatro tendencias de pensamiento probabilístico, que fueron detectadas en 583 estudiantes para profesor de matemáticas. Esta tendencia de pensamiento probabilístico, la hemos denominado *tendencia hacia la Contingencia,* y representa el mayor nivel de complejidad entre los estudiantes analizados. La aplicación del análisis de clusters y análisis discriminante permitieron encontrar cuatro tendencias de pensamiento probabilístico, que en orden de complejidad creciente son: *Determinista, Incertidumbre*, *Personalista y Contingencia* (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2014b, 2014c, 2014d, 2014e). Estas tendencias de pensamiento probabilístico dan una idea de cómo se presenta la evolución conceptual de la probabilidad, en los futuros profesores de matemática de la provincia de Mendoza, Argentina. Los estudiantes que presentan esta tendencia poseen concepciones más cercanas a las formales, que mejor los posiciona en el marco de su futuro desempeño docente.

2. Marco Teórico

Desde nuestra perspectiva las concepciones de los estudiantes no se cambian, sino que evolucionan. Así, entendemos el cambio conceptual como Vosniadou (1994); es decir, como una modificación progresiva de los modelos mentales que el alumno tiene sobre el mundo

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 355-362). Granada, 2015.

físico, que logra por medio de enriquecimiento o revisión. Entendiendo enriquecimiento como adición de informaciones, y revisión implica cambios en las creencias o presupuestos individuales en la estructura relacional del modelo.

Como los modelos mentales operan con la abstracción, y los conceptos científicos poseen un alto grado de abstracción y complejidad, de aquí se deriva la consideración de que el aprendizaje de los conceptos científicos requiere de la construcción de un modelo mental de los mismos.

Lograr el conocimiento de los modelos mentales y cómo se construyen, es una prioridad, si pretendemos que el conocimiento científico se construya, porque a partir de ese conocimiento podremos determinar las estrategias y los procesos adecuados para que los estudiantes recorran el camino que va desde los modelos mentales a los modelos conceptuales científicos. Para Johnson-Laird (1994) la construcción de los modelos mentales se basa en el conocimiento, las creencias y las concepciones. La teoría de los modelos mentales es una teoría apropiada para estudiar el pensamiento probabilístico, porque es una teoría que fue pensada para explicar los procesos superiores de la cognición, en particular la comprensión y la inferencia.

En relación con la alfabetización probabilística, consideramos el modelo propuesto por Gal (2005), para quien los componentes básicos de la alfabetización probabilística son ciertos conocimientos y ciertas disposiciones, que interactúan entre sí de manera compleja durante el comportamiento o aprendizaje real. Esto significa que un enfoque de instrucción sólo en uno de los elementos no será suficiente para desarrollar un "comportamiento probabilísticamente alfabetizado". Los elementos de conocimiento son las grandes ideas: variación, aleatoriedad, independencia, previsibilidad e incertidumbre; el cálculo de probabilidades: las distintas maneras de encontrar o estimar la probabilidad de un evento; el lenguaje: los términos y los métodos utilizados para comunicar el azar; el contexto: entender el papel y las implicancias de las cuestiones probabilísticas y los mensajes en diferentes contextos y en el discurso público y personal.

En este trabajo analizamos las respuestas de los estudiantes para profesor de secundaria en matemáticas a un cuestionario. El cuestionario aplicado a los estudiantes para conocer sus concepciones probabilísticas, fue tomado de Cardeñoso (2001); quien plantea la estructura y contenido del instrumento de recogida de la información, al que denomina *Cuestionario de Concepciones Probabilísticas* que elaborara a partir del siguiente sistema de categorías: *Causalidad, Multiplicidad, Incertidumbre, Subjetiva, Contingencia, Laplaciana, Frecuencial, Equiprobabilidad, Experiencial* (Moreno y Cardeñoso, 2014b, 2014e).

3. Metodología

Para realizar dicho estudio se decide que la Población Estudiada esté compuesta por todos los estudiantes de los profesorados de nivel superior no universitario de matemáticas (583 estudiantes) de los institutos 9-002, 9-006, 9-009, 9-011, 9-013, 9-023, 9-024, 9-026, TP-13 de la provincia de Mendoza.

El método aplicado fue la encuesta; y el instrumento un cuestionario que se construyó sobre la base del cuestionario creado por Cardeñoso (2001), sobre el cual se hicieron modificaciones para adaptarlo nuestro contexto sociodemográfico. Estos ítems contemplan las grandes ideas propuestas por Gal (2005); es decir, variación, aleatoriedad, independencia, probabilidad.

En el cuestionario podemos definir tres dimensiones: el contexto (características sociodemográficas de los estudiantes); el reconocimiento de la aleatoriedad de distintos sucesos con sus respectivas argumentaciones, y la estimación de la probabilidad de sucesos con sus argumentaciones. Está conformado por veinticuatro ítems relativos al contexto; doce al reconocimiento de la aleatoriedad y otros doce relativos a la estimación de la probabilidad. Los ítems de las dos últimas dimensiones se refieren a sucesos del ámbito lúdico, cotidiano y físico-natural (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2011, 2012a)

Tabla 1 Las respuestas de los estudiantes se transformaron en las siguientes variables cuantitativas

Variables	Significado
ALEA 11	Cantidad de sucesos reconocidos correctamente como aleatorios y argumentados desde la causalidad por el estudiante para profesor.
ALEA 12	Cantidad de sucesos reconocidos correctamente como aleatorios y argumentados desde la multiplicidad por el estudiante para profesor.
ALEA 13	Cantidad de sucesos reconocidos correctamente como aleatorios y argumentaos desde la incertidumbre por el estudiante para profesor.
ALEA 14	Cantidad de sucesos reconocidos correctamente como aleatorios y argumentados desde la subjetividad por el estudiante para profesor.
ALEA 21	Cantidad de sucesos reconocidos incorrectamente como no aleatorios desde la causalidad por el estudiante para profesor.
ALEA 22	Cantidad de sucesos reconocidos incorrectamente como no aleatorios desde la multiplicidad por el estudiante para profesor.
ALEA 23	Cantidad de sucesos reconocidos incorrectamente como no aleatorios desde la incertidumbre por el estudiante para profesor.
ALEA 24	Cantidad de sucesos reconocidos incorrectamente como no aleatorios desde la subjetividad por el estudiante para profesor.
PRO 5	Cantidad de sucesos argumentados desde la contingencia en la estimación de la probabilidad por el estudiante para profesor.
PRO 6	Cantidad de sucesos argumentados desde la laplaciana en la estimación de la probabilidad por el estudiante para profesor.
PRO 7	Cantidad de sucesos argumentados desde la frecuencial en la estimación de la probabilidad por el estudiante para profesor.
PRO 8	Cantidad de sucesos argumentados desde la equiprobabilidad en la estimación de la probabilidad por el estudiante para profesor.
PRO 9	Cantidad de sucesos argumentados desde la experiencial en la estimación de la probabilidad por el estudiante para profesor.

La aplicación del análisis de clusters y análisis discriminante, permitió obtener cuatro tendencias de pensamiento probabilístico: Determinista, Personalista, Incertidumbre y Contingente; como ocurriera con los estudiantes para profesor de biología (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2012b, 2013a, 2013b, 2014a).

En este trabajo presentamos una caracterización del pensamiento hacia la Contingencia, tendencia de pensamiento mayoritario en esta investigación, igual que en la de Cardeñoso (2001).

Para el análisis de este tipo de pensamiento, hemos comparado al grupo de estudiantes que pertenece a él (152), al que llamaremos grupo *Contingente*, con el resto de los estudiantes (431), grupo *no Contingente* mediante el test de Mann_Witney.

4. Resultados y Discusión

Las respuestas de los estudiantes al cuestionario se transformaron en las variables cuantitativas discretas que se presentan en la Tabla 1. Los valores medios de las mismas en cada una de los dos grupos de estudiantes; *Contingente* y *No contingente*, se han indicado en la Tabla 2. Nuestro interés en conocer al grupo *Contingente*, se fundamenta en el hecho de ser el grupo con mayor nivel de complejidad, entre todos los estudiantes de matemáticas.

Tabla 2. Valores medios de las categorías de los estudiantes de matemática de la tendencia *no contingencia y contingencia*

Categorías	No Contingencia	Contingencia
ALEA 11	**1,54**	**2,40**
ALEA 12	**1,67**	**2,84**
ALEA 13	**3,71**	**4,52**
ALEA 14	0,08	0,07
ALEA 21	**1,94**	**1,02**
ALEA 22	**1,02**	**0,37**
ALEA 23	**1,26**	**0,34**
ALEA 24	**0,15**	**0,22**
PRO 5	**3,05**	**3,67**
PRO 6	**1,93**	**3,77**
PRO 7	1,96	2,11
PRO 8	**4,09**	**1,91**
PRO 9	0,44	0,26

Como se puede apreciar en la Tabla 3, existen diferencias significativas a favor del grupo *Contingente*, en las variables: ALEA11, ALEA12, ALEA 13, ALEA21, ALEA22, ALEA23, ALEA24, PRO5, PRO6 y PRO8.

El grupo *Contingente* representa al 26,07% (152) de todos los futuros profesores. Un estudiante de este grupo reconoce correctamente como aleatorios, en promedio, aproximadamente entre 9 sucesos de los doce sucesos presentados.

Se destaca la presencia de los argumentos basados en la multiplicidad, alcanzando el valor máximo en este grupo, ocurriendo exactamente lo mismo con la causalidad. Sin embargo, la categoría más usada es la incertidumbre, con un valor superior al valor medio del total; superando al grupo de los *no contingentes*. En cuanto a la negación incorrecta de la aleatoriedad, las categorías multiplicidad e incertidumbre alcanzan los valores mínimos en este grupo. Mientras que el uso de la subjetividad en el reconocimiento de la aleatoriedad alcanza un valor similar al obtenido por el grupo *no contingente*.

Tabla 3 Resultados del test de Mann_Witney para la comparación del grupo *contingente* con el *no contingente*

categorías	estadístico U	Valor p
ALEA 11	**23.256,0**	**0,000**
ALEA 12	**17.803,0**	**0,000**
ALEA 13	**25.213,0**	**0,000**
ALEA 14	32.606,0	0,834
ALEA 21	**22.226,0**	**0,000**
ALEA 22	**22.661,5**	**0,000**
ALEA 23	**21.230,0**	**0,000**
ALEA 24	**30.527,0**	**0,000**
PRO 5	**25.948,0**	**0,000**
PRO 6	**13.473,0**	**0,000**
PRO 7	29.711,0	0,078
PRO 8	**12.735,0**	**0,000**
PRO 9	30.942,5	0,165

Cuando tienen que estimar la probabilidad, argumentan desde la contingencia y la laplaciana, categorías que alcanzan los valores máximos en este grupo. También, emplean la categoría frecuencial con un valor similar al del grupo *no contingente*; mientras que la experiencial y la equiprobabilidad son las categorías que alcanzan los valores mínimos en este grupo.

Una característica de este grupo es el bajo uso del sesgo de equiprobabilidad, y el poco uso de las argumentaciones producto de su propia experiencia en la estimación de la probabilidad.

Esta tendencia de pensamiento es la que tiene concepciones más cercanas a las formales. Reconoce el carácter aleatorio de las situaciones presentadas argumentando desde distintas categorías y logra una estimación de la probabilidad con argumentaciones que hacen referencia a una concepción objetiva de la probabilidad.

Una característica de este grupo es el bajo uso del sesgo de equiprobabilidad, y el poco uso de las argumentaciones producto de su propia experiencia en la estimación de la probabilidad.

Esta tendencia de pensamiento es la que tiene concepciones más cercanas a las formales. Reconoce el carácter aleatorio de las situaciones presentadas argumentando desde distintas categorías y logra una estimación de la probabilidad con argumentaciones que hacen referencia a una concepción objetiva de la probabilidad.

Mostramos a continuación las respuestas de un futuro profesor prototípico de este grupo, como es el alumno S146 de tercer año, que responde desde la *multiplicidad*:

Ítem 7: *"Obtener el número 23 en la ruleta de 36 números es un suceso aleatorio porque tengo aproximadamente un 3% de posibilidades de que ocurra, 1 en 36"*

Ítem 13: *"Predecir el color de una bola que se extrae de una urna con bolas de distintos colores es un fenómeno aleatorio porque todas las bolas van a tener la misma probabilidad, va a depender de la cantidad de bolas que hay de cada color"*.

Ítem 21: *"Acertar el número que muestra un dado ya lanzado, pero que no puedo ver es un suceso aleatorio porque tenés cinco números que son erróneos y uno que es verdadero pero no depende de ningún factor que influya"*.

El estudiante contesta desde la *causalidad*, de la siguiente forma:

Ítem 1: *"Durante una tarde jugamos a lanzar dos dados legales y acordamos que gana quien acierta el resultado de sumar los números obtenidos. La confianza que tengo en ganar eligiendo el 7 para toda una tarde de juego es alta porque el 7 es el número que tiene más posibilidades de salir"*.

Ítem 2: *"Que nieve en el cerro Arco dentro de 30 días es un suceso aleatorio porque nevará o no, según las condiciones del tiempo que se den en ese día"*.

Ítem 3: *"Predecir la cantidad de caras que se obtienen en 100 lanzamientos de una moneda es un suceso aleatorio, porque yo no lo puedo saber, pero tal vez alguien que estudie física, las leyes de la gravedad y algo más tal vez si pueda estipular"*.

Ítem 7: *"Obtener el número 23 en la ruleta de los 36 números es un suceso aleatorio porque hay que tener en cuenta quien hace girar la ruleta"*.

El estudiante contesta desde la *Incertidumbre* de la siguiente forma:

Ítem 2: *"Que nieve en el cerro Arco dentro de 30 días es un suceso aleatorio porque puedo predecir si ocurrirá o no ese fenómeno pero no es 100% seguro que ocurra"*

Ítem 3: *"Predecir la cantidad de caras que se obtienen en 100 lanzamientos de una moneda es un suceso aleatorio porque el número de caras en 100 lanzamientos puede variar cada vez que lo repitamos".*

Ítem 5: *"Sufrir un accidente es un fenómeno aleatorio porque en muchas ocasiones puedo impedirlo pero también en muchas no".*

El estudiante contesta desde la *Contingencia* de la siguiente forma:

Ítem 4: *"La confianza que tengo en que me toque algún regalo en una rifa, en la que participo con alguno de los 10.000 números vendidos para el viaje de estudios del colegio, es baja porque son muchos los números que tengo en contra, y de los 10 mil, solamente tengo uno".*

Ítem 11: *"Tengo una confianza media en sacar una bola roja de una urna que contiene 5 bolas blancas, 5 rojas y 1 azul; porque el rojo tiene más probabilidad de salir que el azul e igual posibilidad que la blanca".*

El estudiante contesta desde la categoría *laplaciana* de la siguiente forma:

Ítem 10: *"En una mesa de juego se dispone de una caja de fichas, contiene 29 fichas negras y 16 amarillas. La confianza que tengo en que salga una ficha negra, a lo largo de toda una tarde de juego, es alta, porque hay mayor posibilidad considerando las proporciones 29/45 en relación a 16/45".*

Ítem 19: *"La confianza que tengo en que, en un edificio de seis vecinos, en el primer intento consiga pulsar el timbre del portero automático que corresponde a la puerta de un amigo, sin saber dónde vive, es baja porque las probabilidades y estadísticas me dicen que tengo un 17% para pegarle".*

Ítem 11: *"La confianza que tengo en sacar una bola roja de una urna que contiene 5 bolas blancas, 5 rojas y 1 azul, es media porque hay 5 rojas en un total de 11".*

5. Conclusiones

Aproximadamente un cuarto de los estudiantes para profesor de secundaria en matemáticas, manifiestan tener un pensamiento probabilístico que, si bien dista del esperado, es el que posee modelos mentales más cercanos a los modelos científicos en relación con la aleatoriedad y la probabilidad. Sin embargo, consideramos que debemos trabajar en la formación del profesorado de secundaria, para lograr que nuestros estudiantes, futuros profesores, construyan concepciones que se ajusten al modelo de pensamiento probabilístico propuesto por Gal (2005).

Los sistemas de ideas, nombrados aquí como tendencias de pensamiento, parecen claramente insuficientes para poder afrontar la enseñanza de la probabilidad (Azcárate, Cardeñoso y Porlán, 1998; 2003,; Cardeñoso y Azcárate, 2002; Azcárate, Cardeñoso y Serradó, 2005). Ello nos lleva a plantear la necesaria remodelación del currí cula formativo de los futuros profesores de matemáticas para la enseñanza en la educación secundaria, después de un análisis detallado, por hacer. Pero también se puede intentar afrontar en el curriculum formativo, desde unas perspectivas alternativas, como sugieren Azcárate y Cardeñoso (2011) para el desarrollo profesional del docente Batanero (2005); Batanero, Contreras y Díaz (2011); Contreras, Batanero y Ortiz (2011) y Batanero, Arteaga, Ruiz y Rao (2010).

Referencias

Azcárate, P.; Cardeñoso, J. M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. En *Enseñanza de las Ciencias, 16*(1), 85-97

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2003). Conocimiento profesional de referencia con relación al conocimiento probabilístico. Una aproximación a las ideas de los futuros profesores de primaria sobre el mismo. 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Lleida, 8-11 de abril de 2003.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2011). La Enseñanza de la Estadística a través de Escenarios: implicación en el desarrollo profesional. *Bolema: Rio Claro, 24*(40), 789-810.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. En R. Farfán y cols. (Eds.) *Relime*, 8 (3), 247-263.

Batanero, C.; Contreras, J.M. y Díaz, C. (2011). Experiencias y Sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Paradigma*, 32 (2). Recuperado el 12/12/2014 http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Paradigmanuevo.pdf

Batanero, C.; Arteaga, P.; Ruiz, B. y Rao, R. (2010). Assessing pre-service teachers conceptions of randomness through project work. In C. Reading (Ed.) *Proceedings of the Eight International Conference for Teaching Statistics.* Lbjubjana: IASE.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la Matemática escolar. Modelización de conceptos sobre la aleatoriedad y probabilidad.* Tesis doctoral (leída 1998). Univ. de Cádiz., Servicio de Publica de la UCA

Cardeñoso, J. M.; Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez, y L. Rico, (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P.(2002). Una estrategia de formación de maestros de matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional. In: L. Blanco & L.C. Contreras (Coord.) Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente. Serv. Publicaciones, Universidad de Extremadura, Cáceres, pp.181-226.

Cardeñoso, J. M.; Azcárate, P. y Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal*, 4 (2), 59-81.

Contreras, J.M.; Díaz, C.; Batanero, C. y Ortiz, J.J. (2011). Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo. *Educaçao Matemática e Pesquisa*, 12 (2), 181-198. Recuperado el 06/10/2014.

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, pp. 39-63. New York: Springer.

Johnson-Laird, P. (1994). Mental models and probabilistic thinking. *Cognition*, *50*, 189-209.

Moreno, A; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2011). Las argumentaciones que usan los estudiantes en el reconocimiento de la aleatoriedad. En *Actas Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología 2th.*, Catamarca. Facultad de Ciencias Exactas y

Naturales. Universidad Nacional de Catamarca. CD-ROM.

Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F.(2012a). Las dificultades detectadas en un grupo de estudiantes del profesorado de educación primaria cuando afrontan la asignación de probabilidades. En M. Marín-Rodíguez y N. Climent (Eds.) *Actas Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM XV, Simposio de la SEIEM,* (pp. 153-178) Ciudad Real: SEIEM.

Moreno, A.; Cardeñoso, J.M.; González-García, F. (2012b). Un estudio exploratorio de las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes del profesorado de biología. En A. Estepa; Á. Contreras; J. Deulofeu; M. C. Penalva; F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Actas Investigación en Educación Matemática XVI,* (pp. 407-415)

Moreno, A.; Cardeñoso, J.M. y González-García, F. (2013a). Un análisis sobre las interpretaciones de la aleatoriedad en los estudiantes del profesorado de biología. A. Estepa y N. Climent (Eds.) *Actas Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM XVI, Simposio de la SEIEM*, (pp. 177-189). Jaén: SEIEM.

Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2013b). La aleatoriedad desde la perspectiva de los estudiantes del Profesorado de Matemática. En J.M. Contreras, G.R. Cañadas, M.M. Gea y P. Arteaga (Eds.) *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.* Granada: Departamento Didáctica Matemática de la Universidad de Granada, (pp. 367-372).

Moreno, A.; Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2014a, en prensa). El Pensamiento Probabilístico de los Profesores de Biología en Formación. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*.

Moreno, A. & Cardeñoso, J. M. (2014b). "Overview of Prospective Mathematics Teachers' Probabilistic Thinking". En K. Makar, B. De Sousa & R. Gould (Eds.), *ICOTS-9 Conference Proceedings. Sustainability in statistics education. 9th International Conference on Teaching Statistics*.

Moreno, A., Cardeñoso, J. M. y González-Garcia, F. (2014c). La Aleatoriedad en los Profesores de Biología y de Matemática en Formación: Análisis y Contraste de Significados. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 11*(2), 198-215.

Moreno, A., Cardeñoso, J. M. y González-García, F. (2014d). Los significados de la probabilidad en los profesores de matemática en formación: un análisis desde la teoría de los modelos mentales. En *Actas de la XXVIII Reunión Latinoamericana de MATEMÁTICA EDUCATIVA*. Barranquilla. Colombia.

Moreno, A. y Cardeñoso, J. M. (2014e). Alfabetización Probabilística: Un reto para los profesores de secundaria. *Actas del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.* ISBN 978-84-7666-210-6. Documento 203. Buenos Aires. Argentina.

Vosniasdou, S. & Brewer, W. (1994). Mental models of the day/night cycle. *Cognitive Science, 18*, (7), 123-183.

La Estadística toma protagonismo en la escuela media: estrategias didácticas para el acompañamiento de profesores en formación

AdrianaPérez[1], GerardoCueto[2], Maris Diez Stella[3], María Soledad Fernández[4], Julieta Filloy[5] y CarlosPomilio[6]

[1]aaperez@ege.fcen.uba.ar, Departamento de Ecología, Genética y Evolución, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
[2]gcueto@ege.fcen.uba.ar, Departamento de Ecología, Genética y Evolución, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
[3]smdiez@gmail.com, Universidad de Palermo
[4]sfernandez@ege.fcen.uba.ar, Departamento de Ecología, Genética y Evolución, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
[5]jfilloy@ege.fcen.uba.ar, Departamento de Ecología, Genética y Evolución, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
[6]carlosjpomilio@gmail.com, Departamento de Fisiología y Biología Molecular y Celular, Universidad de Buenos Aires

Resumen

La alfabetización estadística es considerada como una competencia esencial para un pleno desempeño ciudadano. Sin embargo, a pesar de su importancia y de integrar los contenidos curriculares, en Argentina los tópicos estadísticos no son habitualmente desarrollados en la escuela media. Para los profesores de Matemática, la enseñanza de Estadística puede ser un reto explicable en función de su propia formación de carácter abstracto y por la ausencia de formación en didáctica de la Estadística. En este contexto, se diseñó una intervención dirigida a profesores de Matemática en formación consistente en un conjunto de estrategias didácticas aplicables en las clases de nivel medio bajo la modalidad de talleres presenciales orientados a promover la alfabetización y el pensamiento estadísticos. La estructura de los talleres incluyó la revisión conceptual de los tópicos estadísticos, la identificación de los obstáculos epistemológicos, preconceptos e ideas erróneas y el desarrollo de actividades didácticas. Bajo una modalidad participativa, los talleres incluyeron actividades con material manipulativo, juegos, simulaciones y análisis con datos reales. Se dictaron 5 talleres en distintos profesorados de Buenos Aires, con 280 asistentes. Los talleres fueron evaluados positivamente por los mismos en cuanto a contenidos, pertinencia y aplicabilidad. Creemos que la intervención implementada contribuye a mejorar el proceso de formación y las actitudes hacia la Estadística de los futuros profesores. Es de esperar que por ende contribuirá a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Estadística en el nivel medio, favoreciendo la alfabetización y el pensamiento estadísticos de sus estudiantes.

Palabras clave: Formación de profesores, Escuela media, Alfabetización estadística.

1. Introducción

En los últimos años, con el explosivo acceso a la información, la alfabetización estadística es considerada como una competencia esencial para un pleno desempeño ciudadano. En efecto, a pesar de la enorme cantidad de información a la que puede acceder un ciudadano en la sociedad de información en que vivimos, el acceso a la misma no es suficiente para garantizar un adecuado procesamiento y esto inhibe su capacidad para desarrollar una participación efectiva en las decisiones sociales, económicas y políticas. Para ello es necesario desarrollar la habilidad de leer e interpretar datos de forma crítica y usar la Estadística como evidencia en contextos cotidianos o profesionales, es decir lograr una alfabetización estadística (Ridway, Nicholson, & McCusker, 2011). Esta demanda creciente de competencias estadísticas se vio reflejada en Argentina a partir de la incorporación de Probabilidad y Estadística en los diseños curriculares del nivel primario y secundario (Ley Federal de Educación, 1993, Ministerio de Educación). Sin embargo, a pesar de que estas recomendaciones curriculares ya tienen varios años, los contenidos de Estadística no son habitualmente desarrollados en el ciclo lectivo del nivel medio o bien quedan reducidos a unas pocas clases, con un abordaje habitualmente limitado a los aspectos procedimentales. Una encuesta efectuada a 50 profesores de Matemática de establecimientos educativos estatales y privados de Buenos Aires arrojó que, si bien el 80% incluyó nociones de Estadística en la planificación anual, el 70% de los que la incluyeron no alcanzaron a desarrollar los temas en el curso lectivo. Adicionalmente, el 66% manifestó que no se consideraba capacitado para desarrollar exitosamente los temas de Estadística incluidos en los contenidos curriculares (Kucukbeyaz y Batto, 2012). Similares observaciones han sido documentadas en otras universidades nacionales (Fernández de Carrera, 2002), así como en otros contextos (véase por ejemplo Meletiou, 2007, Batanero, 2009).

Una de las posibles razones por las cuales los profesores no abordan habitualmente los contenidos estadísticos puede encontrarse en su formación curricular. Particularmente los profesores de Matemática, responsables del abordaje formal de los tópicos estadísticos en la escuela, poseen solo una materia en su diseño curricular, "Probabilidad y Estadística", con un enfoque en general abstracto, vinculado a la Estadística matemática y generalmente sin entrenamiento en un software estadístico. Esto lleva a que muchas veces las creencias arraigadas sobre la naturaleza determinista y jerárquicamente estructurada de la Matemática sean transferidas a la enseñanza de la Estadística, ignorando la naturaleza estocástica de la misma (Meletiou, 2007). Una prueba sobre conocimientos estadísticos efectuada en estudiantes de último año de 10 de los 26 profesorados de Matemática de la ciudad de Buenos Aires y del Gran Buenos Aires (Fabrizio y cols, 2007) arrojó solo un 42% de respuestas correctas. Los futuros profesores evidenciaron serias dificultades en la interpretación de gráficos, estadísticos de tendencia central y de variabilidad, así como de probabilidades. Sólo un 26% declaró haber utilizado una computadora durante el curso de Probabilidad y Estadística. Tauber et al. (2013) también hallaron dificultades en la resolución de actividades que implicasen razonamiento estadístico por parte de profesores de Matemática en formación y en ejercicio. Adicionalmente, en la formación curricular no existen materias específicas de didáctica de la Estadística. Esta escasa preparación en la disciplina con la que el profesor termina sus estudios hace que cuente con pocos recursos para su enseñanza. Esto genera un círculo vicioso, puesto que, al no impartir Estadística, el profesor no llega a completar sus conocimientos a partir de la práctica docente. Estrada (2004) halló que la actitud hacia la Estadística del profesor en ejercicio se deteriora con la práctica docente, debido a la dificultad que él mismo encuentra en la disciplina, a la escasa importancia que se le otorga o a la dificultad para aprender que aprecia en sus alumnos.

Como consecuencia, no es posible garantizar en el egresado del nivel medio una alfabetización estadística adecuada. Los estudiantes egresan de la escuela media con escasa comprensión de los principios básicos que subyacen en el análisis de datos, lo que explica muchas de las carencias que se manifiestan en el uso posterior de la Estadística en su vida cotidiana o profesional.

En este contexto, se propuso una intervención didáctica cuyo objetivo fue acompañar el trayecto formativo en Estadística de los futuros profesores de Matemática, con la intención de mejorar sus habilidades y actitudes hacia la disciplina. Este proyecto se articula en el marco del programa de Extensión "Exactas con la Sociedad" desde las asignaturas Biometría I y Biometría II de la carrera de Ciencias Biológicas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

2. Metodología

2.1. Población objetivo

La intervención estuvo dirigida a futuros profesores de Matemática del nivel medio, concurrentes a Institutos Superiores de Formación Docente de gestión pública. El diseño curricular del profesorado en Matemática en Argentina contiene, como ya se mencionó, una única materia, "Probabilidad y Estadística", en la que se abordan contenidos estadísticos y que se dicta en el tercero de los cuatro años de la carrera. Los talleres estuvieron dirigidos a estudiantes de profesorado de 3er y 4to año, con conocimientos formales de los tópicos estadísticos desarrollados en los talleres, y a sus docentes.

2.2. Diseño de los talleres

Los talleres abordaron los tópicos estadísticos que integran los contenidos curriculares del nivel medio (Ministerio de Educación, 2011): recopilación de datos, representaciones tabulares y gráficas, estadísticos descriptivos, fenómenos aleatorios y cálculo de probabilidades.

La estructura de los talleres fue la siguiente:

- Revisión conceptual: La misma fue breve, ya que se articuló el dictado de los talleres con los docentes de "Probabilidad y Estadística" de los profesorados, de manera que los estudiantes contaran con al menos las herramientas teóricas previo a la asistencia al taller.
- Identificación de los obstáculos epistemológicos, preconceptos e ideas presentes en los estudiantes: Se discutieron las principales dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje documentadas por la bibliografía (ver por ejemplo Batanero, 2001)
- Desarrollo de actividades didácticas: Se tuvieron en cuenta la propia experiencia y las recomendaciones de la American Statistical Association para la enseñanza de Estadística en el nivel medio (Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) College Report) (Garfield et al., 2005). Las actividades, de modalidad participativa, incluyeron juegos, simulaciones, análisis con datos reales, discusión de casos y uso de TICS y estuvieron orientadas a promover la alfabetización y el razonamiento estadísticos.

Una descripción más exhaustiva de los talleres en su versión última y del material didáctico desarrollado se encuentra disponible en:
https://alfabetizacionestadistica.wordpress.com/nuestros-talleres/

2.3. Dictado de Talleres

Se dictaron 5 talleres en Institutos Superiores de Formación Docente de Capital Federal y provincia de Buenos Aires (Lanús y Monte Grande). Cada taller tuvo una duración de 3 hs. Al finalizar cada taller se estableció un espacio de reflexión con los asistentes, indagando sus pareceres sobre las actividades propuestas, su aplicabilidad y relevancia y sobre la importancia de la formación en Estadística. Este intercambio de saberes entre actores del nivel medio y universitarios permitió un enriquecimiento y reelaboración de las propuestas iniciales.

Al finalizar los talleres se efectuaron encuestas anónimas y voluntarias para indagar la opinión de los asistentes. Las respuestas se plantearon en escala ordinal, con una valoración de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo).

2.4. Difusión

Se diseñó una página web (http://alfabetizacionestadistica.wordpress.com) con el objetivo de difundir la propuesta y acercar a los interesados el material didáctico. Asimismo se generó una base de datos con los correos electrónicos de los asistentes a nuestros talleres.

3. Resultados

Los talleres, dictados en profesorados de Matemática de Capital Federal y provincia de Buenos Aires, contaron con 280 asistentes, estudiantes de profesorado de Matemática de 3er y 4to año y sus docentes. Como ya se mencionó, todos los asistentes contaban con nociones de los temas abordados y el foco de las actividades estuvo puesto en aspectos conceptuales más que procedimentales, relacionados con la alfabetización y el desarrollo del razonamiento estadístico.

La evaluación cualitativa de la intervención fue altamente favorable. Los asistentes mostraron un muy alto grado de participación en las actividades y en los espacios de discusión. Si bien en el desarrollo de los talleres se expusieron las principales dificultades en el apropiamiento de los conceptos estadísticos, las actividades didácticas permitieron poner en evidencia ideas erróneas por parte de los futuros profesores.

La evaluación cuantitativa, mediada por una encuesta anónima efectuada al finalizar los talleres, se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Resultados porcentuales de la encuesta efectuada a los asistentes a los talleres

	Respuesta				
	1 Totalmente en desacuerdo	2 Parcialmente en desacuerdo	3 Ni de acuerdo ni en desacuerdo	4 Parcialmente de acuerdo	5 Totalmente de acuerdo
P1. ¿Consideras que el taller contribuyó a mejorar tu entendimiento sobre los temas estadísticos?	1,4%	2,1%	8,2%	25,3%	63,0%
P2. ¿Consideras que las actividades que se desarrollaron en el taller son pertinentes para la enseñanza de Estadística en la escuela?	1,4%	2,0%	16,2%	35,1%	45,3%

P3. ¿Consideras que las actividades que se desarrollaron en el taller son factibles de aplicar en la escuela?	2,0%	6,1%	20,9%	35,8%	35,1%
P4. ¿Las aplicarías?	1,4%	3,4%	22,3%	33,8%	39,2%
P5. ¿Consideras que el taller contribuyó a mejorar tu actitud hacia la Estadística?	1,4%	2,0%	8,8%	33,1%	54,7%

Se observa que casi el 90% de los asistentes consideró que el taller contribuyó a mejorar el entendimiento de los tópicos estadísticos abordados (P1) y su actitud hacia la Estadística (P5). Un 80% consideró que las actividades desarrolladas son pertinentes para la enseñanza de Estadística en la escuela (P2), pero estos valores descienden al 71 y 73% respectivamente cuando se indaga sobre su factibilidad, en general (P3) y en la propia práctica docente (P4). Si bien estos valores son elevados, evidencian las dificultades percibidas por los futuros profesores para conectar sus conocimientos con la práctica docente.

Finalmente, frente a la pregunta “¿Qué valoración final harías de las actividades del taller (de 1 a 10)?”, se obtuvo una mediana de 9 con un rango de 5 a 10 y un promedio de 8,66 con un coeficiente de variación del 13%.

En resumen, estos resultados indican una valoración altamente positiva de la propuesta pedagógica, en cuanto a contenidos, pertinencia y, en menor medida, en cuanto a su aplicabilidad.

4. Discusión y reflexiones

Los profesores cumplen un rol esencial en la adaptación y ejecución de los contenidos curriculares en el aula. La evidencia disponible indica fuertemente que el cambio en la enseñanza de la Estadística en la escuela media dependerá en gran medida de un cambio en la formación y en la actitud de los profesores de Matemática, quienes explícitamente abordan los contenidos estadísticos, y en ese sentido elaboramos el presente proyecto. Por otro lado, dentro del universo de los profesores de Matemática del nivel medio, nos enfocamos particularmente en los profesores en formación, bajo el supuesto que el éxito de la intervención sería mayor. Se fundamenta este supuesto en que los estudiantes de profesorado son de más fácil acceso, la posibilidad de lograr cambios actitudinales es mayor y el efecto multiplicador será mayor. La intervención en los profesorados permitió además interactuar positivamente con formadores de profesores, que usualmente dictan clases en varios profesorados, potenciando el alcance de la propuesta didáctica.

A través de la intervención propuesta creemos haber contribuido a mejorar las competencias y promovido un cambio actitudinal positivo en los profesores de Matemática en formación en relación a la Estadística. En una segunda etapa se planea generar nuevas propuestas didácticas, ampliar la red de profesorados involucrados y potenciar la comunicación con la comunidad educativa a través de la creación de un grupo virtual mediado por una página web, que constituya un espacio de discusión e intercambio de información y recursos disponibles.

Este proyecto contribuye a cubrir un área vacante en la formación de estos profesores. Creemos que en el diseño curricular del profesorado de Matemática es necesario impulsar cambios en tres dimensiones: más contenidos estadísticos, un enfoque de enseñanza orientado al razonamiento estadístico más que a los aspectos procedimentales y la incorporación de la didáctica de la Estadística en el campo de formación específico. Si bien incipientes, existen ya varias experiencias en este sentido, en países desarrollados y en desarrollo (Batanero et al., 2011).

Estas mejoras apuntan hacia una mejor formación de los profesores, orientada hacia la alfabetización y razonamiento estadísticos, vitales si el resultado educativo deseado es obtener egresados de la escuela media con capacidad para procesar la información estadística que se les presente, de manera fundamentada, crítica e independiente.

Agradecimientos

Este proyectó contó con financiamiento del programa "Exactas con la Sociedad 4", dependiente de la Secretaría de Extensión y Bienestar Estudiantil de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Referencias

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Granada. Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho, Portugal

Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (2011). Overview: challenges for teaching statistics in school mathematics and preparing mathematics teachers. *Teaching Statistics in School-Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study*, 407-418.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 263-274.

Fabrizio, M.C., López, M.V. y Plencovich, M.C. (2007) Statistics In Mathematics Teacher Training Colleges In Buenos Aires, Argentina: Assessment And Challenges. International Statistical Institute, 56th Session, Portugal

Fernández de Carrera, E. (2002) Teaching Statistics in secondary school. An overview: from the curriculum to reality. ICOTS 6, Sudáfrica

Garfield, J., Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., Gould, R., Lock, R., et al. (2005). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) college report. Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/education/gaise/

Kucukbeyaz D. y Batto M. (2012). El desarrollo de métodos para la enseñanza de la Estadística en la educación media. X Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística. Córdoba, Argentina.

Meletiou M. (2007). On the formalist view of mathematics: impact on. statistics instruction and learning. *Mathematics Education Library*, 42(6),131-155.

Ministerio de Cultura y Educación. (1993). Ley Federal de Educación. Buenos Aires

Ministerio de Educación, Consejo Federal de Educación (2011). Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Matemática. Buenos Aires.

Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2011) Developing Statistical Literacy in Students and Teachers. En *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. New ICMI Study Series Volume 14, pp 311-322. Springer, Holanda.

Tauber, L., Cravero, M. y Redondo, Y. (2013). Evaluación de errores de profesores de Matemática en tareas de Alfabetización Estadística y de Razonamiento Estadístico. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 273-283). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Los problemas de probabilidad en los libros de texto de bachillerato

Juan J. Ortiz de Haro

jortiz@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se pretende analizar las situaciones problemas de probabilidad que se presentan en una muestra de libros de texto españoles de Bachillerato. Se analizan los conceptos necesarios para resolver dichas situaciones, la asignación de probabilidad, los contextos empleados y el uso de recursos tecnológicos en las situaciones propuestas. Se detectan diferencias entre los diferentes textos y un tratamiento desigual de las variables analizadas.

Palabras clave: Probabilidad, Libros de texto, Problema, Bachillerato.

1. Introducción

Es innegable que la enseñanza de la estadística y la probabilidad ha adquirido una gran relevancia en muchos países, donde se introduce desde los niveles básicos hasta los universitarios. Por ejemplo, en España, tanto en el decreto de enseñanzas mínimas del Bachillerato (MEC, 2007) como en el decreto de currículo básico para Educación Secundaria y Bachillerato (MECD, 2015), en la modalidad de Ciencias Sociales donde tiene un tratamiento más extenso, se sugiere que los estudiantes han de ser competentes para estimar y calcular probabilidades asociadas a diferentes tipos de sucesos, utilizando una variedad de procedimientos y tener la capacidad de tomar decisiones de tipo probabilístico. Estas recomendaciones también se recogen en las orientaciones curriculares de otros países (por ejemplo, NCTM, 2000).

En la enseñanza de la probabilidad hemos de tener en cuenta la forma en que se presentan las situaciones-problemas en los libros de texto que utilizan los estudiantes, y si contemplan los diferentes significados de la probabilidad (Batanero y Díaz, 2007) de una forma equilibrada y adecuada a la edad de los estudiantes. En muchas ocasiones, las decisiones de los profesores, sobre las tareas a realizar con los alumnos, están mediadas por ellos (Stylianides, 2009). García Alonso (2011) considera el libro de texto un elemento fundamental en la enseñanza de la estadística y probabilidad, que además contribuye a la formación del propio docente. Por todo ello, se considera de interés de este tipo de estudios ya que el análisis de los libros de texto nos puede aportar información, no sólo sobre el significado que se da al concepto de probabilidad, sino también sobre el que se le ha atribuido en la mayor parte de los centros de enseñanza donde han sido utilizados.

En este trabajo, que continúa otros anteriores, se pretende analizar las situaciones-problemas de probabilidad que se presentan en una muestra de libros de texto españoles de Bachillerato. A continuación se presentan los fundamentos, las investigaciones previas, la metodología y los resultados del estudio.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 371-379). Granada, 2015.

2. Marco teórico

Partiendo de la idea de transposición didáctica (Chevallard, 1991), entendida como los cambios que experimenta un concepto al adaptarlo para ser enseñando, se presentan algunos resultados de la transposición didáctica del concepto de probabilidad cuando se imparte en el Bachillerato. Nos basamos en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que parte de la noción primitiva de situación-problema, entendida como cualquier tarea, ejercicio o actividad planteada al estudiante que promueva actividades de matematización, pudiendo ser agrupadas en clases. A partir de ella, define la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas.

En este marco, el significado institucional (personal) de un objeto matemático es el sistema de prácticas significativas realizadas por una institución (persona) para resolver un determinado campo de problemas, de donde emerge el objeto. Por ello, el análisis que se realiza de las situaciones problemas de probabilidad propuestas en los textos desde este marco teórico, es esencial para caracterizar el significado de los objetos probabilísticos en los libros estudiados. Como consecuencia del análisis, se describirán y clasificarán dichas situaciones problemas, en clases que sean representativas de las contenidas en el significado institucional del concepto y que permitan contextualizar los conocimientos pretendidos (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006). Dicho significado institucional se estableció en Ortiz (2002), mediante un análisis epistemológico de las ideas estocásticas consideradas fundamentales por Heitele (1975).

3. Investigaciones previas

Las investigaciones sobre libros de texto de matemáticas son numerosas, pero no ocurre lo mismo en el caso de la estadística y la probabilidad, donde podemos citar ejemplos como Cobo y Batanero (2004), Lavalle, Micheli y Rubio (2006), Batanero, Gea, Cañadas y Arteaga (2013).

Sobre probabilidad, Ortiz (2002) realizó un estudio de las actividades (ejemplos y ejercicios) propuestas en una muestra en una muestra de 11 libros de texto españoles para alumnos de 14-15 años, abarcando el período 1975-1991. Los resultados muestran que los conceptos más frecuentes en los ejercicios analizados son el experimento compuesto, la probabilidad y las frecuencias relativas, aunque también aparecen las operaciones con sucesos. Hay pocos ejercicios sobre espacio muestral, experimento aleatorio, probabilidad condicional, dependencia e independencia, conceptos todos ellos básicos y que merecerían mayor atención dentro de los libros. Solo un texto presenta actividades y ejemplos de todos los significados de la probabilidad, aunque también son escasas. La asignación de probabilidades a sucesos simples y compuestos se hace exclusivamente aplicando la regla de Laplace. El contexto predominante en las actividades es el juego.

Azcárate y Serradó (2006) analizaron el contenido de probabilidad en cuatro series de libros de texto de educación secundaria obligatoria. Encuentran diferencias en el desarrollo de las unidades didácticas, pues mientras dos editoriales organizan los contenidos de forma lineal, comenzando con las nociones teóricas y con actividades fundamentalmente de aplicación, la organización en las otras dos es helicoidal, alternando nociones teóricas y actividades basadas en recursos manipulativos y trabajo cooperativo. Este estudio se completa en Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006), concluyendo que hay presencia mayoritaria del significado clásico en unas editoriales y del frecuencial en otras.

Carranza y Kuzniak (2009) realizaron un estudio sobre la presencia de los enfoques frecuentista y bayesiano en los ejercicios de probabilidad propuestos en dos libros de texto franceses, dirigidos a estudiantes de 16-17 años, el primero, con una orientación científica y el segundo, con una orientación en ciencias sociales. Los resultados sugieren que en ambos textos los ejercicios se centran más en los aspectos del cálculo que en las interpretaciones de la probabilidad, que además no se corresponderían con las interpretaciones fundamentales de los dos enfoques analizados. Una diferencia detectada es que en los ejercicios del texto de orientación en ciencias sociales se presenta una mayor variedad de significados y tiene una menor influencia la visión conjuntista de la probabilidad.

4. Metodología

Se analizaron cuatro libros de texto de segundo curso de Bachillerato en la Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales (MEC, 2007), dirigidos a estudiantes de 17-18 años, publicados en el período 2009-2011, posterior a la publicación del citado currículo. Se han seleccionado por ser de cuatro editoriales muy prestigiosas y ser de los más utilizados en la enseñanza pública en España (Anexo I). Se analizaron todas las situaciones problemas incluidas, sin distinguir entre ejemplo, ejercicio o problema. Se han utilizado las variables y categorías establecidas en el estudio sobre el tratamiento de la probabilidad en libros de texto de secundaria (Ortiz, 2002), que permiten lograr el objetivo de este estudio, revisando las categorías de forma inductiva cuando ha sido necesario, al ser en este caso textos de bachillerato. Las variables son:

V1. Concepto al que la situación problema se refiere explícitamente o implícitamente, es decir, estudiar cuál, de entre los conceptos establecidos en el estudio teórico sobre la probabilidad de Ortiz (2002), debe movilizar el alumno para resolverla.

V2. Posible asignación de probabilidades a los sucesos dentro de los experimentos que intervienen en la situación, utilizando las categorías utilizadas en el estudio de Ortiz (2002).

V3. Contexto de la situación problema, utilizando las categorías establecidas en Ortiz (2002).

V4. Uso o no de la tecnología para el planteamiento o resolución del problema.

5. Resultados y discusión

Aunque existen numerosas investigaciones sobre los libros de texto de matemáticas, no ocurre lo mismo en el caso de la estadística y la probabilidad, donde podemos citar ejemplos como Sánchez Cobo (1998), Cobo y Batanero (2004), Lavalle, Micheli y Rubio (2006), Batanero, Gea, Cañadas y Arteaga (2013).

5.1. Conceptos necesarios para resolver la situación problema

En este apartado se analiza cuál, de entre los conceptos establecidos en el estudio teórico sobre la probabilidad de Ortiz (2002), debe movilizar el alumno para resolver la situación problema o a cuál de estos conceptos se refiere el ejemplo. En el caso de que una situación problema se refiera a varios conceptos, se ha subdividido en tantos apartados como fuese necesario.

Los resultados obtenido se presentan en la Tabla 1, donde aparecen los textos analizados y las situaciones problemas relacionados con los conceptos siguientes: Experimento aleatorio;

espacio muestral; sucesos y operaciones; frecuencia relativa; probabilidad; probabilidad condicional; dependencia e independencia; experimentos compuestos, probabilidad total y teorema de Bayes. En ella se observa que el texto [T2] es el que tiene un mayor número de actividades y que estos conceptos se presentan en todos los textos analizados, excepto el de frecuencia relativa que no aparece en los textos [T2] y [T4], siendo además muy escasa su presencia en los otros dos.

Tabla 1. Frecuencias (porcentajes) de conceptos utilizados en los problemas

Conceptos	T1	T2	T3	T4	Total
Experimento aleatorio	2 (0.9)	3 (1.1)	15 (6)	1 (0.6)	21 (2.2)
Espacio muestral	9 (4)	12 (4.4)	10 (4)	6 (3.2)	37 (4)
Sucesos y operaciones	24 (10.6)	34 (12.4)	30 (12.1)	28 (15.1)	116 (12.4)
Frecuencia relativa	2 (0.9)	0	2 (0.8)	0	4 (0.4)
Probabilidad	58 (25.7)	38 (13.9)	71 (28.5)	45 (24.3)	212 (22.7)
Probabilidad condicional	27 (12)	64 (23.4)	36 (14.5)	29 (15.7)	156 (16.7)
Dependencia/independencia	12 (5.3)	5 (1.8)	17 (6.8)	8 (4.3)	42 (4.5)
Experimento compuesto	58 (25.7)	77 (28.1)	41 (16.5)	36 (19.5)	212 (22.7)
Probabilidad total	14 (6.2)	22 (8)	12 (4.8)	16 (8.7)	64 (6.9)
Teorema Bayes	20 (8.9)	19 (6.9)	15 (6)	16 (8.7)	70 (7.5)
Total	226 (24.2)	274 (29.3)	249 (26.7)	185 (19.8)	934 (100)

Los conceptos más frecuentes son los de probabilidad y experimento compuesto lo que supone el 45,4 % del total. El texto [T3] es el que más ejercicios de probabilidad presenta y el [T2] el que más sobre experimento compuesto. Un ejemplo sobre este último concepto es: "*¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus puntuaciones sea 2?*". ([T1], p. 244). Le sigue el concepto de probabilidad condicional, siendo el texto [T2] el que más ejercicios presenta. Un ejemplo es: "*En una clase de 22 alumnos, 7 alumnos son aficionados al baloncesto, 12 son aficionados al fútbol y 6 a ambos deportes. Si elegimos a un alumno al azar, calcula la probabilidad de que: a) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que es aficionado al baloncesto; b) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que no es aficionado al baloncesto*". ([T2], p. 265).

Sobre dependencia e independencia, experimento aleatorio, espacio muestral y frecuencia relativa, hay pocos ejercicios y todos ellos básicos. Por ello, debería prestarse mayor atención a ellos dentro de los libros de texto. Observamos que los textos incluyen los conceptos identificados en Ortiz (2002), aunque en este estudio la probabilidad condicional tiene mayor presencia y aparecen los conceptos de probabilidad total y teorema de Bayes que no se presentaban en el otro, lo que es lógico ya que son textos dirigidos a estudiantes de diferentes niveles educativos.

5.2. Asignación de probabilidades

El análisis de la asignación de probabilidades es muy importante porque está directamente relacionada con los distintos significados del término probabilidad descritos en el estudio teórico de Ortiz (2002). En la Tabla 2 se observa que en todos los textos se incluyen situaciones problemas de los diferentes significados de la probabilidad, excepto el enfoque frecuencial que no aparece en el texto T4, aunque en algunas categorías son escasas.

La asignación de probabilidades más utilizada se hace mediante la probabilidad condicional, lo que supone un 43,4 % del total. Los textos [T2] y [T1] son los que más la utilizan, con un porcentaje similar. Un ejemplo es: "*Una encuesta revela que: el 35 % de los habitantes de una ciudad oye la emisora A, el 28 % oye la B, y el 10% oye ambas emisoras. Se elige al azar uno de estos ciudadanos. Calcula la probabilidad de que escuche la emisora A sabiendo que* *escucha B*”. ([T1], p. 255). Le sigue la asignación de probabilidades mediante la aplicación de sus propiedades, siendo el texto T4 el que presenta una mayor proporción de este tipo. Un ejemplo es: “*Calcula la probabilidad del suceso* $A^C \cap B$, *sabiendo que la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos sucesos A o B es 0,8 y que P(A)=0,3*”. ([T4], p. 224)

Con porcentajes menores aparecen las asignaciones de probabilidad que se hacen mediante la utilización de los teoremas de la probabilidad total y de Bayes, siendo los textos [T4] y [T2] los que más actividades presentan de este tipo. Un ejemplo es: “*Las piezas de automóviles de una marca multinacional son producidas en fábricas de tres países diferentes. Las producciones son del 30%, 40% y 30% respectivamente. El número de piezas defectuosas que llegan a los diferentes talleres son del 1%, 1,5% y 1,5%. Si elegimos una pieza al azar, calcula la probabilidad de tener una pieza defectuosa. ¿Qué probabilidad hay de que provenga de la fábrica 1*?”. ([T4], p. 228).

Tabla 2. Frecuencias (porcentajes) de asignación de probabilidades en los problemas

Conceptos	T1	T2	T3	T4	Total
Regla de Laplace	18 (9.4)	32 (14.2)	26 (13.4)	8 (5.3)	84 (11.1)
Frecuencial	4 (2.1)	4 (1.8)	2 10.3)	0	10 (1.3)
Realización/simulación experimentos	1 (0.5)	0	2 (1)	0	3 (0.4)
Aplicación propiedades	39 (20.4)	41 (18.2)	62(32)	51 (34)	193 (25.4)
Geométrica	5 (2.6)	0	0	0	5 (0.7)
Probabilidad condicional	91 (47.6)	106 (47.1)	76 (39.2)	57 (38)	330 (43.4)
Probabilidad total	14 (7.3)	22 (9.8)	12 (6.19)	17 (11.3)	65 (8.5)
Teorema de Bayes	19 (9.9)	20 (8.9)	14 (7.2)	17 (11.3)	70 (9.2)
Total	191 (25.2)	225 (29.6)	194 (25.5)	150 (19.7)	760 (100)

Hay pocos ejercicios sobre asignación frecuencial de la probabilidad o mediante realización/simulación de experimentos, por lo que se considera que no hay un tratamiento adecuado del enfoque frecuencial de la probabilidad en ningún texto. Se observa que los textos incluyen los tipos de asignación de probabilidad identificados en Ortiz (2002), aunque con una proporción menor de ejercicios de aplicación de la regla de Laplace y una mayor proporción de ejercicios de probabilidad condicional, probabilidad total y Bayes, lo que es razonable pues se trata de textos dirigidos a estudiantes de niveles educativos diferentes. También es alto el porcentaje de ejercicios sin contexto, donde la asignación de probabilidades se realiza mediante la aplicación de las propiedades del cálculo de probabilidades, lo que coincide con Carranza y Kuzniak (2009).

5.3. Contextos utilizados

Se han encontrado una gran variedad de contextos utilizados que han sido clasificados según el procedimiento descrito en cinco categorías: a) *Juegos de azar* (lanzamiento de dados y monedas, extracción de bolas de urnas, extracción de cartas de una baraja); b) *Biología* (características biológicas de las personas, nacimientos); c) *Sociedad* (producción empresas, preferencias ciudadanos, medicina); d) *Educación* (aprueban o suspenden un examen, alumnos y alumnas que practican deporte o no) y e) *Sin contexto*.

En la Figura 1 se observa que en todos los textos analizados, excepto en el texto [T4], el contexto más utilizado está relacionado con juegos de azar, con porcentajes menores que los obtenidos en Ortiz (2002) del 75%. Esta diferencia puede ser normal ya que las edades de los estudiantes a los que van dirigidos los textos son diferentes: 17-18 años en este estudio y 13-14 años en el de Ortiz (2002). No obstante, en ambos casos se considera una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad mostradas al alumnado.

Destaca el alto número de ejercicios descontextualizados, donde se incluyen ejercicios relacionados con los sucesos y operaciones y comprobación de sus propiedades y ejercicios donde se han de probar determinadas propiedades de la probabilidad utilizando los axiomas y teoremas del enfoque axiomático. Estos porcentajes son muy superiores a los obtenidos en Ortiz (2002) con solo un 1,3%, y son preocupantes, ya que, según Suydan y Weaver (1977), los estudiantes se sienten más motivados y obtienen mejores resultados cuando el contexto del problema les resulta familiar que si se trata de situaciones abstractas o descontextualizadas.

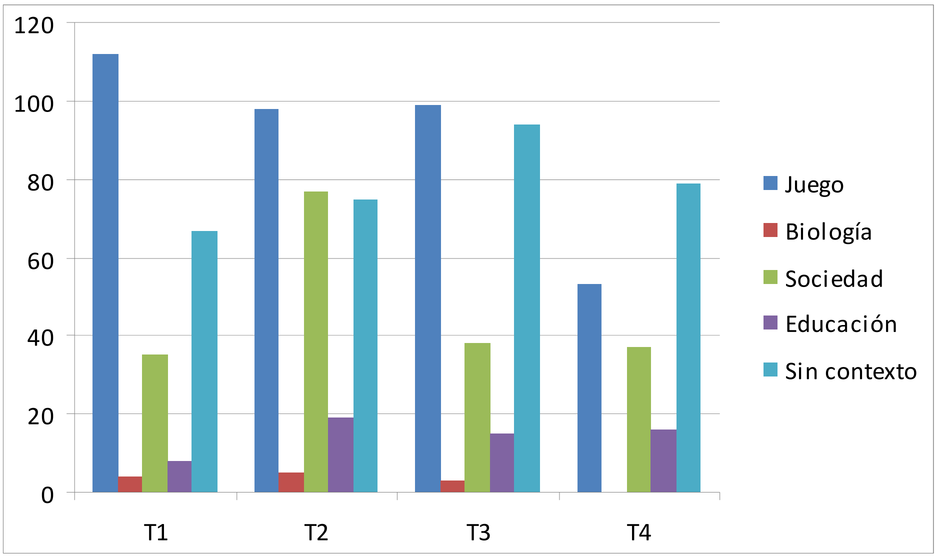


Figura 1. Frecuencias de contextos utilizados en las tareas

Con porcentajes menores aparecen los contextos Sociedad y Educación, al contrario que en Ortiz (2002), donde había más relacionados con Educación que con Sociedad, lo que también puede ser debido a la diferencia de edad de los estudiantes a los que van dirigidos los textos. El libro [T2] es el que presenta un mayor equilibrio entre los diferentes contextos encontrados, lo que supone una mayor variedad de actividades de aplicación propuestas relacionadas con problemas reales.

5.4. Uso de la tecnología

Todos los textos incluyen un CD ROM donde se sugiere la utilización de diversos recursos tecnológicos para realizar las actividades propuestas. En el texto [T1] se formulan dos actividades, una para comprobar experimentalmente la ley de los grandes números y otra para trabajar con tablas de contingencia utilizando la hoja de cálculo Excell. Así mismo incluye actividades donde para resolverlas se recomienda el uso de la calculadora gráfica (5), de Derive (4) y del software Wiris (6). Por último, incluye la demostración de los teoremas de la probabilidad que aparecen en el texto y la solución de 43 ejercicios del texto. En el texto [T2] hay tres presentaciones donde se resuelven en una pizarra siete problemas de probabilidad.

El texto T3, al final del bloque de estadística y probabilidad incluye un apartado denominado “problemáTICa” donde formula dos actividades de simulación con Excell. Además incluye 68 ejercicios resueltos de las pruebas de acceso a la universidad de convocatorias recientes, similares a los de la unidad didáctica. En el texto [T4] se propone la resolución de 23 actividades similares a las realizadas en la unidad didáctica para que sean resueltas utilizando Derive o Wiris. Aunque en general en estos libros analizados aparecen más actividades relacionadas con las nuevas tecnologías que en el estudio de Batanero et al. (2013), se considera que es aún escaso su uso.

6. Conclusiones

La noción de transposición didáctica y la noción de significado de un objeto matemático propuesta en el EOS han permitido mostrar que existen diferencias en el tratamiento de la probabilidad en los diferentes textos analizados. Los conceptos más utilizados han sido los de probabilidad, experimentos compuestos y probabilidad condicional. También aparecen los teoremas de probabilidad total y el teorema de Bayes que no estaban presentes en el estudio de Ortiz (2002).

Las asignaciones de probabilidad más utilizadas se hacen mediante la probabilidad condicional y mediante la aplicación de sus propiedades. Hay pocos ejercicios sobre asignación frecuencial de la probabilidad, observándose en este estudio una mayor proporción de ejercicios de probabilidad condicional, de probabilidad total y de Bayes que en Ortiz (2002). Estos resultados pueden estar influenciados por los tipos de problemas que se proponen a los estudiantes en las pruebas de acceso a la universidad.

El contexto más utilizado está relacionado con juegos de azar, excepto en el [T4], lo que se considera una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad mostradas al alumnado. Destaca el alto número de situaciones descontextualizadas, con porcentajes muy superiores a los obtenidos en Ortiz (2002), lo que se opone a estudios internacionales. Se revela el escaso uso que se hace de las nuevas tecnologías a pesar de las recomendaciones del decreto del MEC (2007) en sentido contrario.

Aunque la mayoría de los textos analizados presentan situaciones problemas relacionadas con los diferentes significados de la probabilidad, son escasas las que tratan sobre el enfoque frecuencial. Como consecuencia de este estudio, se considera que en los libros de texto se deberían proponer una muestra de situaciones problemas contextualizadas que sean representativas de los diferentes significados de la probabilidad, incidiendo más en la interpretación de los mismos que en los aspectos relacionados con el cálculo

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (Ministerio de Economía y Competitividad) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Azcárate, P., y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, *340,* 341-378.

Batanero, C., y Díaz, C. (2007).Meaning and understanding of mathematics.The case of probability. En J.P Van Bendegeny K. François (Eds.), *Philosophical dimmensions in mathematics education* (pp. 107-127). Nueva York: Springer.

Batanero, C., Gea, M., Cañadas, G., y Arteaga, P. (2013). La organización de datos bidimensionales en libros de texto de bachillerato. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 373-381).* Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

Carranza, P. y Kuzniak, A. (2009). Enfoque bayesiano “oculto” y enfoque frecuentista “ambiguo” en los manuales franceses de Première S y ES. En P. Orús, L. Zamora, y P. Gregori (Eds.), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana* (pp.447-460). Universitat Jaume I de Castellón.

Cobo, B., y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *22* (1), 5-18.

Chevallard (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grénoble: La Penséesauvage

García Alonso, I. (2011). Análisis de los términos de Inferencia Estadística en Bachillerato. *Números*, *77*, 51-73.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A., y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (1), 117-150.

Heitele, D. (1975). Anepistemologicalviewon fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 187-205.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B., y Rubio, N. (2006).Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (3), 383-406.

MEC (2007). REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Madrid: Boletín Oficial del Estado, nº 266.

MEC (2015). REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Boletín Oficial del Estado, nº 3.

N. C. T. M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Serradó, A., Azcárate, P., yCardeñoso, J. M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya*, *38*, 91-112.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11* (4), 258-288.

Suydam, M., y Weaver, J. F. (1977). Research on problem solving: Implications for elementary school classroom. *Journal of Experimental Psychology General, 112*, 634-656.

Anexo I: Libros de texto utilizados

[T1]. Colera, J. y Oliveira, M.J. (2009). Matemáticas *aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Grupo Anaya.

[T2]. Escoredo, A., Gómez, M., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., Rey, M., Río, J, y Sánchez, D. (2011*). Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Santillana Educación.

[T3]. Vizmanos, J., Hernández, J. y Alcalde, F. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Grupo SM.

[T4]. Ortega, P., Serra, J., Díez, S., Prieto, J. y Bautista, A. (2010). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Pearson.

Midiendo los logros de estudiantes de la Educación Básica Regular en Estadística y Probabilidad

Augusta Osorio Gonzales[1], *Elizabeth Advincula Clemente*[2]

[1]arosorio@pucp.edu.pe, Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM - PUCP)
[2]*eadvincula@pucp.edu.pe*, Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM - PUCP)

Resumen

Nuestra investigación está dirigida a medir los logros de los estudiantes del nivel educativo básico mediante un Mapa de Progreso de Aprendizajes. En nuestro país, se viene elaborando los Estándares de Aprendizaje Nacionales descritos mediante Mapas de progreso, en particular tenemos un mapa para los temas de Estadística y Probabilidad. La investigación de carácter descriptivo tuvo como resultado la identificación de los principales logros y deficiencias de los estudiantes y nos provee de información relevante para identificar cuáles son los conocimientos que necesitan ser reforzados y con ello orientar mejor la acción pedagógica.

Palabras clave: Mapa de progreso, logro, Estadística.

1. Introducción

En la actualidad, la Estadística es la herramienta más útil que se tiene para el trabajo de los datos y es requerida en el desarrollo de casi cualquier tarea que implica el análisis e interpretación de los datos. Esto es claro para muchos investigadores de la educación en Estadística. La estadística está mucho más relacionada con otras disciplinas que las matemáticas. Se ha usado como lenguaje y método de investigación científica en áreas tan diferentes como la lingüística, geografía, física, ingeniería, psicología y economía (ICMI/IASE, 2006).(Cueva & Ibañez, 2008,p.34). Las personas en general son expuestas a resultados estadísticos para respaldar un argumento de venta o la elección de una propuesta política. Igualmente, las personas están expuestas a información que trabajan las diferentes instituciones públicas y que buscan que la población en general esté informada de diferentes aspectos relacionados con los temas para el mejor conocimiento de la realidad de un país.

Es necesario entonces que todas las personas dispongamos de un manejo adecuado de estos conocimientos estadísticos básicos y que podamos manejar las denominaciones o etiquetas con que se identifican estos conceptos dentro de la terminología de la estadística actual. Dónde es que podemos adquirir este aprendizaje, esta pregunta nos lleva a la clara necesidad de la enseñanza de la Estadística en la escuela. A esta conclusión ya se llegó en diversos países y eso propició un proceso de inclusión de temas estadísticos en el currículo de Matemáticas de la escuela en general. El seguimiento de esta incorporación es parte del trabajo de Batanero, C. (2002) que hace una recopilación sobre la introducción de la enseñanza de la Estadística en Inglaterra y Argentina, y de la situación de la enseñanza de la estadística en la escuela en España.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 381-387). Granada, 2015.

Este proceso de inclusión también ha acontecido en nuestro país y lo podemos observar con los temas de Estadística y Probabilidad incluidos en el Diseño Curricular Nacional (2009). En nuestro caso los temas de Estadística se incluyen desde el primer grado de primaria, pero a pesar de su inclusión no se asegura su enseñanza, es decir, es posible que la inclusión de los temas solo quede en el papel. Esta problemática ya fue registrada por algunos investigadores, Jimenez & Jimenez (2005, p1) lo indican con referencia a la Educación Pública de Costa Rica y las razones que presentan son: tiempo insuficiente para cubrir los programas propuestos, la no medición de estos temas en las pruebas nacionales y la poca importancia que le dan algunos docentes. Igualmente, Grima (2010) menciona que a pesar de la destacada presencia de la Estadística en las titulaciones universitarias y en muchas actividades profesionales, la estadística suele tener poco protagonismo en la enseñanza secundaria pues rara vez existe una asignatura específica de estadística, y más bien se presenta incluida en el libro de Matemáticas, mucha veces al final, de forma que si no da tiempo a verlo todo, esta es la parte que se queda sin impartir.

Con la elaboración, por parte del Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica (IPEBA), de los Estándares de Aprendizaje Nacionales descritos como Mapas de Progreso del Aprendizaje; conseguimos contar con un instrumento que nos apoye en la medición de logros en temas básicos de Estadística y probabilidad enseñados durante la Educación Básica Regular.

Con el apoyo de nuestra Universidad mediante el Concurso de Proyectos para docentes 2013, nuestra investigación buscó medir en los estudiantes de los ciclos 4 y 6 de la Educación Básica Regular, el nivel alcanzado dentro del Mapa de progreso de Estadística y Probabilidad.

2. El Mapa de progreso de Estadística y Probabilidad

La elaboración de los Mapas de Progreso se realizó por un equipo integrado de especialistas de IPEBA y del Ministerio de Educación, asesorados por expertos nacionales e internacionales. Los mapas de progreso están divididos en niveles. Los niveles indican lo que se espera que un estudiante haya aprendido al finalizar cada ciclo de la Educación Básica Regular. Los niveles muestran estos aprendizajes de manera sintética y empleando un lenguaje sencillo, con el fin de que todos puedan comprenderlos. Cada nivel de un Mapa de progreso cuenta con un conjunto de indicadores de desempeño. Estos permitirán identificar claramente si los estudiantes lograron lo que indica el nivel correspondiente. Por tanto, los Mapas de Progreso son útiles porque le permiten a los docentes enfocarse en los aprendizajes centrales y observar cuán lejos o cerca están sus estudiantes del logro de estas metas de aprendizaje, para poder reorientar su acción pedagógica.

La descripción del progreso del aprendizaje en el Mapa de progreso de Estadística y Probabilidad se realiza en base a tres aspectos:

a. Recopilación y procesamiento de los datos. Implica el desarrollo de capacidades para trabajar con los datos, recopilarlos, clasificarlos, organizarlos, representarlos y determinar sus medidas descriptivas en función a un propósito, con la finalidad de brindar insumos para la interpretación de los mismos.

b. Interpretación y valoración de los datos. Implica el desarrollo de capacidades para convertir en información los datos procesados mediante la lectura, interpretación, inferencia y valoración de la pertinencia y representatividad de los mismos con la finalidad de tomar decisiones.

c. Análisis de situaciones de incertidumbre. Implica el desarrollo de capacidades para identificar, describir, modelar una situación aleatoria, determinar sus componentes (espacio muestral, el contexto y sus restricciones) y estimar la probabilidad de ocurrencia de los sucesos relacionados con ella, con la finalidad de predecirlos y tomar decisiones.

3. Objetivos de la investigación

El objetivo general de esta investigación es identificar el nivel de logro alcanzado por los estudiantes de la Educación Básica Regular, en relación a los contenidos de Estadística y Probabilidad esperados para su grado de estudios e identificar sus posibles deficiencias. Para lograr este objetivo, tenemos los siguientes objetivos específicos:

1. Determinar desde el mapa de progreso de Estadística y Probabilidad los objetos estadísticos que se establecerán como conocimientos básicos para cada aspecto y nivel.
2. Construir y validar los instrumentos que permitirán realizar las mediciones en los alumnos de los ciclos escogidos.
3. Determinar para cada alumno de la muestra el nivel en que se encuentra con respecto al mapa de progreso de Estadística y Probabilidad.
4. Establecer las diferencias que se presentan entre lo medido y lo esperado, con el fin de reportar adecuadamente a los interesados.

4. Grupo de aplicación

La muestra realizada fue del tipo no probabilística dirigida, y se escogieron a cinco colegios particulares de la ciudad de Lima. Nuestra muestra estuvo compuesta por un aproximado de 380 alumnos del quinto grado de educación primaria y 396 alumnos del tercer año del nivel secundario.

5. Instrumentos de evaluación

Los instrumentos utilizados en esta investigación se construyeron tomando como base el mapa de progreso de Estadística y Probabilidad. Dentro de la metodología de trabajo, no se midió a todos los alumnos en los tres aspectos del mapa de progreso, esto por una cuestión de tiempo. La aplicación de un instrumento duraba en promedio 45 minutos y en general, todas las instituciones educativas solo nos permitían una hora de trabajo por aula. La elección de los alumnos para cada dimensión fue totalmente aleatoria.

Para la revisión de los enunciados de las preguntas y de los contenidos medidos, se aplicó una prueba piloto a un grupo de alumnos de dos entidades educativas. Se aplicaron los seis instrumentos diseñados y se identificaron las falencias de diseño, estas básicamente se concentraron en los contextos presentados. Los alumnos tuvieron problemas para identificar algunos términos, que no les resultaban familiares.

En nuestro trabajo algunos de los indicadores a considerar por cada aspecto y nivel fueron los siguientes:

Tabla 1. Recopilación y procesamiento de los datos

Nivel	Indicador
Ciclo III	Organiza datos en tablas simples
Ciclo IV	Organiza datos en tablas de doble entrada
Ciclo V	Presenta datos mediante gráficos de barras dobles
Ciclo VI	Determina la población usando criterios de pertinencia

Tabla 2. Interpretación y valoración de los datos

Nivel	Indicador
Ciclo III	Lee información en tablas simples o gráficos
Ciclo IV	Interpreta información presentada en tablas simples y de doble entrada
Ciclo V	Interpreta información no explicita presentada en gráficos
Ciclo VI	Interpreta y usa las medidas de tendencia central

Tabla 3. Análisis de situaciones de incertidumbre

Nivel	Indicador
Ciclo III	Identifica la imposibilidad de ocurrencia de sucesos cotidianos
Ciclo IV	Explica si la ocurrencia de un suceso es más probable o menos probable
Ciclo V	Determina todos los posibles resultados de una situación aleatoria
Ciclo VI	Identifica sucesos simples y compuestos relacionados a una situación aleatoria propuesta

6. Medición

Nuestra expectativa de medición era determinar para cada alumno su nivel en el Mapa de progreso, teniendo en cuenta que se consideraría el nivel secuencial más alto alcanzado. Es decir, para que digamos que un alumno alcanzó el nivel del Ciclo V es que contesto acertadamente todos los indicadores de los conocimientos de los ciclos III, IV y V.

Para lograr la medición del logro de cada alumno se trabajó bajo el siguiente esquema:

1. Establecer desde cada respuesta esperada las características que debía presentar la respuesta correcta del alumno.
2. Determinar en base a las características establecidas si el alumno había desarrollado totalmente, parcialmente o no había desarrollado la respuesta correcta. Se utilizó una codificación para estos desarrollos y se incluyó en la codificación a las respuestas en blanco y las respuestas no relacionadas con lo solicitado.
3. Determinar el nivel de logro del alumno para cada pregunta respondida. Para ello se establecía desde el código establecido una nueva codificación.
4. Determinar el logro de un nivel en base a los indicadores alcanzados del nivel indicado.

5. Para que digamos que un alumno logro un determinado nivel, ha debido lograr todos los indicadores presentados de dicho nivel, si solo logro algunos indicadores diremos que el alumno se encuentra en proceso de logro de dicho nivel.
6. Determinar el nivel de logro dentro del mapa de progreso de un alumno, determinando el nivel más alto logrado. Para la determinación tuvimos en cuenta que el alumno debió lograr todos los niveles anteriores al adjudicado.

7. Resultados

Para analizar nuestros resultados, obtuvimos el porcentaje de alumnos que ha alcanzado cada uno de los niveles del mapa de progreso y lo comparamos con los niveles esperados. Hay que tener en cuenta que los niveles esperados para cada grupo trabajado son los siguientes:

Nivel primario se espera que cada alumno alcance los niveles del Ciclo III y IV, siendo el nivel del Ciclo V un nivel de logro destacado.

Nivel secundario se espera que cada alumno alcance los niveles de los Ciclos III, IV, V y VI, siendo el nivel VII un nivel de logro destacado.

Se ha encontrado que no todos los alumnos tienen un desarrollo secuencial, dado que por ejemplo, hemos identificado alumnos que tienen alcanzado el nivel del Ciclo III y el nivel del Ciclo V pero no el del Ciclo IV. Esos casos los hemos colocado como Otros, puesto que nuestro interés está en los alumnos que han desarrollado un conocimiento progresivo.

Tabla 4. Logros en el aspecto Recopilación y procesamiento de los datos

Niveles	4to de primaria – IVciclo		2do secundaria - VI ciclo	
Sin nivel	35	28.00%	39	29.55%
Ciclo III	33	26.40%	18	13.64%
Ciclos III y IV	38	30.40%	21	15.91%
Ciclos III , IV y V	7	5.60%	13	9.85%
Otros	12	9.60%	41	31.06%

Podemos concluir que solo el 36% de los alumnos evaluados de primaria alcanzaron el nivel equivalente al Ciclo IV, que era el esperado dentro del mapa. En el caso de secundaria ningún alumno alcanzó el nivel equivalente al Ciclo VI y solo el 10% de los alumnos evaluados alcanzó un nivel acorde con el final de la primaria (CICLOS III , IV y V).

Tabla 5. Logros en el aspecto Interpretación y valoración de los datos

Niveles	4to de primaria – IVciclo		2do secundaria - VI ciclo	
Sin nivel	6	4.72%	0	0%
Ciclo III	83	65.36%	65	51.59%
Ciclos III y IV	22	17.32%	36	28.57%
Ciclos III , IV y V	15	11.81%	25	19.84%
Otros	1	0.79%		

Podemos concluir que solo el 39% de los alumnos evaluados de primaria alcanzaron el nivel equivalente al Ciclo IV, que era el esperado dentro del mapa. En el caso de secundaria ningún alumno alcanzó el nivel equivalente al Ciclo VI y solo el 20% de los alumnos evaluados alcanzó un nivel acorde con el final de la primaria (CICLOS III , IV y V).

Tabla 6. Logros en el aspecto Análisis de situaciones de incertidumbre

Niveles	4to de primaria – IVciclo		2do secundaria - VI ciclo	
Sin nivel	21	16.8%	19	15.00%
Ciclo III	50	40.00%	38	29.90%
Ciclos III y IV	9	7.20%	9	7.09%
Ciclos III , IV y V	7	5.60%	7	5.51%
Otros	38	30.40%	54	42.52%

Podemos concluir que solo el 13% de los alumnos evaluados de primaria alcanzaron el nivel equivalente al Ciclo IV, que era el esperado dentro del mapa. En el caso de secundaria ningún alumno alcanzó el nivel equivalente al Ciclo VI y solo el 6% de los alumnos evaluados alcanzó un nivel acorde con el final de la primaria (CICLOS III , IV y V).

8. Conclusiones

El Ministerio de Educación peruano, a través de la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC), viene aplicando desde el año 2007 la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE). Esta evaluación consiste en la aplicación de pruebas estandarizadas a los estudiantes de segundo grado de primaria mediante una muestra nacional.

Los resultados de dichas pruebas en el área de matemática se tienen en el siguiente cuadro:

Tabla 7. Resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes

Año	En inicio (%)	En proceso (%)	Satisfactorio (%)
2007	56.5	36.3	7.2
2008	54.7	35.9	9.4
2009	49.2	37.3	13.5
2010	53.3	32.9	13.8
2011	51.0	35.8	13.2
2012	49.0	38.2	12.8
2013	50.8	32.3	16.8

En base a los resultados presentados en http://sistemas02.minedu.gob.pe/consulta_ece/publico/index.php

Estas pruebas incluyen el contenido de Estadística y probabilidad según lo indicado en el Diseño Curricular Nacional 2009 para segundo grado y que coinciden con los contenidos del nivel del Ciclo III del Mapa de progreso de Estadística y Probabilidad,

A partir de los resultados de nuestra investigación acerca de los logros de los alumnos de cada grupo de medición para el Ciclo III obtenemos que los porcentajes de satisfactorios son:

Tabla 8. Resultados

Ciclo III	Recopilación y procesamiento de los datos	Interpretación y valoración de los datos	Análisis de situaciones de incertidumbre
4º Primaria	62.40%	94.49%	52.80%
2º Secundaria	39.40%	100.00%	42.53%

Existe entonces en nuestra muestra un desarrollo de los contenidos estadísticos relacionados con el Ciclo III en los años posteriores al segundo grado de la primaria y este es más claro para los alumnos que actualmente se encuentran aún en el nivel primario. Pero este desarrollo se da más claramente en el aspecto de Interpretación de los datos, es decir, prácticamente todos los alumnos de nuestra muestra pueden leer e interpretar información desde tablas y gráficos a un nivel del Ciclo III. En los otros aspectos, de los alumnos que concluyeron el cuarto grado solo el 50% ha desarrollado satisfactoriamente los conocimientos en recopilación y procesamiento de datos y análisis de situaciones de incertidumbre. Mientras que en el caso de los alumnos que han concluido el segundo año de secundaria solo lo ha hecho un 40% en ambos aspectos.

Esto nos da una clara indicación que en la actualidad, la Estadística y la probabilidad, se están desarrollando más en la primaria que en años anteriores, pero a pesar del esfuerzo no se puede alcanzar aún los logros previstos en los momentos adecuados.

Como apoyar para que las metas sean alcanzadas en el momento justo, este por el momento es un esfuerzo que se encuentra en manos de los docentes. En este tema en particular el problema no solo radica en las estrategias de trabajo dentro del aula, sino todavía se está en una etapa de consolidación del dominio de estos temas por parte de los docentes. Hay varias investigaciones que nos hablan de este problema, en particular una de ellas lo indica como su resultado principal. “Estos resultados indica la necesidad de mejorar la formación de profesores en lo que respecta a conocimiento didáctico del contenido de estadística, en particular, con respecto al conocimiento de cómo los estudiantes aprenden y las dificultades que tienen con un determinado contenido matemático.” (Arteaga, Batanero, Contreras, Cañadas, 2012,p. 141)

Nuestros pasos deben encaminarse ahora a apoyar la consolidación del conocimiento estadístico de los docentes de nuestro país y en ese sentido nuestros futuros trabajos se enfocarán, en conocer sus problemáticas más resaltantes y en buscar estrategias que permitan su superación.

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J., Cañadas, G. (2012) Evaluación del conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores. *Investigación en Educación Matemática XVI, 135 – 143.*

Batanero,C. (2002). *Los retos de la cultura estadística.* Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Conferencia inaugural. http://www.ugr.es/~batanero.

Cueva, J. e Ibañez, C. (2008, setiembre) Estándares en educación estadística: Necesidad de conocer la base teórica y empírica que los sustentan. *Unión Revista Iberoamericana de Educación matemática. 15,* 33 – 45.

Grima, P. (2010). Estadística: Enseñar y crear actitudes positivas a través de casos prácticos. *Revista Iberoamericana de Educacion matemática. Número 24,* 11 – 26.

Jimenez,L. y Jimenez, J. (2005, mayo). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué?. Cidse-Revista virtual matemática- Educación e Internet, v6,n1.

http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/contribuciones-v6-n1-may2005/arti-aleat/index.html

IPEBA (2013). Mapas de Progreso del Aprendizaje. Matemáticas: Estadística y Probabilidad. InstitutoPeruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica. Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2013-11912. ISBN 978-612-46406-4-3.

Propuesta didáctica para promover el desarrollo de competencias matemáticas y didácticas en contenidos de estadística

Verónica San Román[1] *y BeatrizMarrón*[2]

[1]*vsanroman@gmail.com, Universidad Nacional del Sur Bahía Blanca. Bs As. Argentina*
[2]*beatriz.marron@uns.edu.ar, Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Bs As. Argentina*

Resumen

Dado que la enseñanza de la estadística no es sólo una colección de conceptos y técnicas sino que es, sobre todo, una forma de razonar -el razonamiento que en situaciones de incertidumbre permite realizar inferencias y guiar la toma de decisiones a partir de los datos- es preciso crear e implementar estrategias metodológicas que favorezcan el desarrollo de las competencias estadísticas[1].

En relación con lo antes mencionado, se diseñó una herramienta didáctica que permita, además de enseñar procedimientos, enseñar a aprender promoviendo en los alumnos un cambio de actitud relacionado con su rol de aprendiz contribuyendo a mejorar aspectos del aprendizaje en estadística.

En esta comunicación se presenta y analiza una propuesta de enseñanza que brinda la posibilidad de complementar el trabajo formal desarrollado en el aula, adquirir nuevas competencias en el dominio de los contenidos trabajados e integrar las Tics en la adquisición, el desarrollo y el posterior análisis de los contenidos. En este último punto el enfoque está basado fundamentalmente en el uso de hojas de cálculo como un proceso de análisis simple y claro para el desarrollo de los principales diseños experimentales.

Palabras clave: Competencias estadísticas, Tics, propuesta de enseñanza.

1. Introducción

La Estadística es una rama de la matemática que ha cobrado auge con el desarrollo de la tecnología; además brinda apoyo a muchas ciencias e incluso es parte de la vida cotidiana de este mundo globalizado en que vivimos (Batanero, 2001). Esto pone en evidencia la necesidad de mejorar las prácticas educativas para favorecer el desarrollo de una cultura estadística, la misma refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos y, b) *capacidad para* discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal, 2002,p.23).

---

[1]Lupiáñez, J. L., Rico, L. (2008) define a la competencia matemática como un saber hacer en la práctica mediante herramientas matemáticas. Afirma que la misma consiste en utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible y se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

Luego, surge el siguiente interrogante: ¿Qué estrategias didácticas se pueden implementar para el desarrollo del pensamiento estadístico en los estudiantes de grado? Y si queremos ser consecuentes con alguno de los principios constructivistas del aprendizaje, con la importancia de la interacción social e interdisciplinaria y el trabajo en grupo del alumno, ¿qué tipo de situaciones didácticas podemos desarrollar para la enseñanza del contenido?

Se desea dar respuesta a estas preguntas impulsando una propuesta curricular con un cambio de enfoque: en lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, nuestro esfuerzo estuvo puesto en que los alumnos vivenciarán las diferentes etapas de una investigación estadística en un contexto cotidiano.

Cabe destacar que el desarrollo de este trabajo se encuentra atravesado por el uso de las Tics en el aula como una necesidad intrínseca de los dispositivos didácticos implementados. Coincidiendo con Batanero[2], puede decirse que la ventaja de la informática es su naturaleza dinámica, su velocidad, y el creciente rango de software que permite a los estudiantes desde experimentar y explorar todos los aspectos de los procesos estadísticos (incluyendo la planificación de la muestra o del diseño experimental), hasta la recolección y el manejo de datos, la simulación y el análisis, para interpretar y comunicar los resultados. De esta forma, se logrará involucrar a los estudiantes en los métodos de investigación y modos de razonamiento estadístico, desarrollando su espíritu crítico e iniciativa personal.

2. Marco Teórico

En esta propuesta de enseñanza se abordarán los aspectos didácticos teniendo como premisa esencial la metodología del aprendizaje basado en proyectos. Este modelo surge desde una aproximación constructivista, que progresó a partir de los trabajos de psicólogos y educadores tales como Lev Vygotsky, Jerome Bruner, Jean Piaget, John Dewey entre otros. Esta metodología se conceptualiza y pone en marcha a partir de los trabajos del educador William Kilpatrick[3] y tiene una finalidad pedagógica concreta que es el aprendizaje mediante el cual los estudiantes planean, implementan y evalúan proyectos que tienen una aplicación en el mundo real más allá del aula de clase.

En el campo de la enseñanza de la estadística, estudios como el de Batanero, Godino, Arteaga, entre otros muestran que el aprendizaje se favorece con una enseñanza basada en investigaciones y proyectos que permitan dotar de sentido a los diversos objetos estadísticos.

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

- Desarrollar una propuesta didáctica, considerando la metodología del aprendizaje basado en proyectos, como un recurso pedagógico significativo que permita complementar el trabajo desarrollado en el aula y movilizar competencias matemáticas en contenidos de estadística.

---

[2] *Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? Blaix, 15, 2-13.* http://www.ugr.es/~batanero.

[3] La práctica educativa del pragmatismo pedagógico se materializó en el Project Method, formulado en 1918 por William Kilpatrick.

3.2. Objetivos específicos

- Crear situaciones de aprendizaje que estimulen a los estudiantes a desafiar su conocimiento previo y construir nuevos marcos conceptuales.
- Incorporar el uso y las aplicaciones de las nuevas tecnologías para desarrollar estrategias y habilidades en un ambiente de proyectos.
- Brindar una herramienta que permita conjeturar, argumentar, interpretar y tomar decisiones ante situaciones de la vida real.
- Desarrollar en los alumnos la aptitud para asimilar nuevas técnicas estadísticas fomentando tanto la búsqueda, análisis, síntesis, conceptualización de información como un pensamiento crítico y reflexivo de los contenidos trabajados.

4. Metodología

En el desarrollo de esta propuesta de enseñanza se adopta una postura constructivista que se basa en la concepción de que la realidad es una construcción interna, propia del individuo y como indica Sánchez[4] está justificada, desde esta perspectiva, el uso de las tecnologías de información y comunicación para la construcción del conocimiento.

Se trabajará con material manipulativo y simulaciones permitiendo que el tratamiento de los contenidos no sea una simple secuencia lineal sino que dé lugar a conceptualizaciones provisorias y a conocimientos no acabados. Incorporar en este proceso el uso de las TIC brinda a los alumnos la posibilidad real de "experimentar" estadísticamente, enriqueciendo el campo perceptual y las operaciones mentales involucradas en los procesos de construcción, estructuración y análisis de información.

Debido a que el término TIC es demasiado amplio, en esta propuesta de enseñanza se decidió profundizar en el uso de hojas de cálculo simples y personalizadas para facilitar el desarrollo de las actividades propuestas[5]. Las guías de trabajo (protocolos), diseñadas para guiar y acompañar a los alumnos de una forma estructurada y sencilla, están disponibles en la plataforma educativa Moodle.

La actividad disparadora diseñada como eje central aborda el concepto de variables cualitativas y medidas que resumen información: índices de dominancia y diversidad.

Aquí, se presenta una posible secuenciación de la propuesta de enseñanza, que, por su carácter abierto, puede tener una resolución diferente por cada uno de los alumnos:

[4] Sánchez, J. (2000). Nuevas tecnologías de la información y comunicación para la construcción del aprender. Santiago de Chile, Chile: LMA Servicios Gráficos.

[5] Trabajo colaborativo basado en Tics: es el proceso intencional de trabajo de un grupo para alcanzar objetivos con herramientas de software diseñadas para dar soporte y facilitar el trabajo (Computer Supported Cooperative Work).

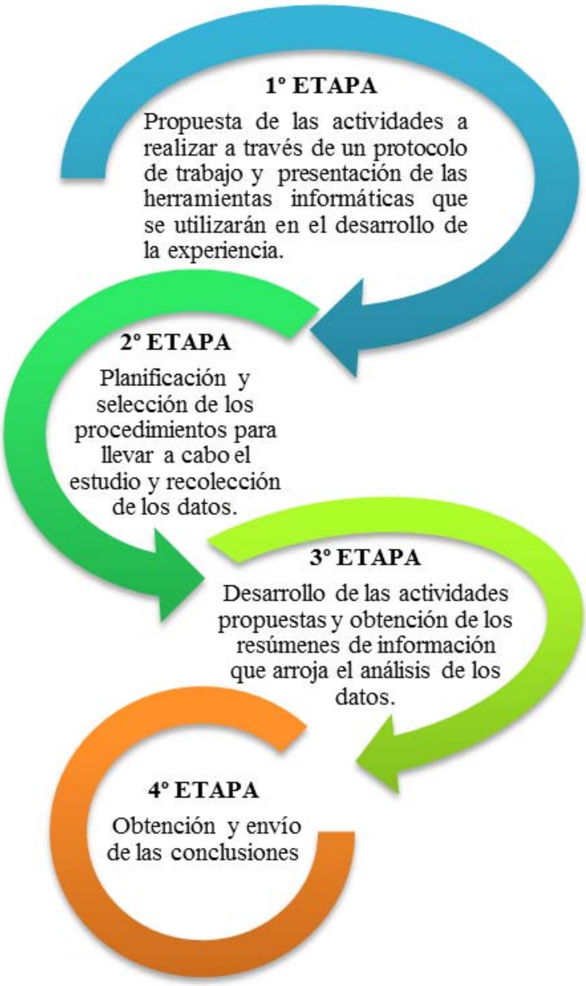


Figura 1: Esquema del desarrollo de la experiencia

5. Análisis de resultados

Teniendo como premisa que el contenido no es independiente de la forma en que es presentado[6], pudimos observar que en los problemas y ejercicios rutinarios se refuerza un solo concepto, propiedad o capacidad. Sin embargo, en este contexto, tanto la recolección de datos contextualizados como el empleo de los medios didácticos e informáticos propuestos generaron un espacio para la resignificación de los conceptos trabajados con anterioridad como variables cualitativas, población, muestra, entre otros, presentado en el ANEXO.

Los alumnos presentaron sus respectivos trabajos al plantel docente que analizó el desarrollo de las preguntas formuladas en el protocolo de trabajo. Analizando las primeras dos preguntas se evidenció ciertas limitaciones para distinguir la población de estudio y las unidades

[6] Edwards, V. (1997). *La forma del conocimiento en el aula*. En Rockwell. La escuela cotidiana. Méjico. F.C.E.

experimentales con que se trabajaba, sin embargo no se observaron conflictos para reconocer la variable de estudio. Resulta de interés que un alto porcentaje de los estudiantes respondieron adecuadamente las últimas dos preguntas demostrando dominio en las inferencias y predicciones basadas en datos.

En la siguiente Tabla se representa las distribuciones en porcentajes de las respuestas obtenidas de 36 alumnos de la Licenciatura en Biología evaluadas en tres categorías (Bien Regular y Mal).

Tabla 1: Distribución (en %) de las respuestas obtenidas

Pregunta		*Respuesta*		
		Bien	*Regular*	*Mal*
1.	¿Cuál es la Población de Estudio?	16,6	41,6	41,6
2.	¿Cuáles son las unidades experimentales?	75	25	0
3.	¿Cuál es la Variable que se mide?	100	0	0
4.	¿Cuál/es de las medidas utilizadas tuvieron un marcado cambio al realizar el agrupamiento?	91,6	8,3	0
5.	¿Cuántas marcas de autos consideraría Ud. que son relativamente importantes?	86,1	13,8	0

Esta instancia de reflexión resultó muy importante pues en función de las respuestas emitidas por los alumnos obtuvimos elementos valiosos para diagnosticar el grado de dominio en el análisis de la composición de muestras y resignificar nuestras prácticas docentes.

El rol de los docentes que preponderó en esta experiencia fue el de coordinadores, pues, como afirma Santoyo[7], el coordinador no enseña sino que propicia el aprendizaje sin asumir el papel de líder o de director; intentando en todo momento que no exista la independencia sino la interdependencia entre pares.

4.1. Ventajas observadas

- Resignificación de los conocimientos previos trabajados en el aula.
- Aprendizaje grupal y colaborativo entre los integrantes de la situación de enseñanza–aprendizaje.
- Obtención rápida y precisa de resultados en forma analítica y gráfica.
- Eficiencia en el desarrollo de actividades donde se manejan grandes volúmenes de datos favoreciendo una perspectiva más realista del manejo de información.

4.2. Dificultades observadas

- Obstáculos en el desarrollo de la propuesta cuando el alumno no estaba familiarizado con la metodología y herramientas informáticas presentadas.
- Escaso tiempo, por parte de los alumnos, para el desarrollo de las actividades propuestas debido a la carga horaria obligatoria en otras materias.

[7] Santoyo, R. (1981). Algunas reflexiones sobre la coordinación en los grupos de aprendizaje. Perfiles educativos.

- Un pequeño porcentaje de los alumnos hizo un uso no adecuado del software que condujo a conclusiones erróneas en el análisis de los datos.

6. Conclusiones

Basados en el Aprendizaje Basado en Proyectos las actividades se orientaron en la planificación de la resolución de un problema en donde los estudiantes tuvieron un rol protagónico y mayor autonomía que en una clase tradicional haciendo uso de diversos recursos. En este sentido, las hojas de cálculo ofrecieron a los estudiantes una mejor comprensión del impacto que produce cualquier transformación en los datos respecto al resultado final de un experimento. Hemos observado que esta propiedad ha coadyuvado en los procesos de aprendizaje y comprensión del alumno.

Al analizar los resultados obtenidos, podemos inferir que el alcance de la secuencia didáctica propuesta ha resultado muy favorable tanto para mejorar la comprensión en el análisis de los datos como para movilizar las competencias estadísticas de los alumnos, observando que efectivamente el uso didáctico de las Tics colabora en dicho aprendizaje.

Los alumnos pudieron establecer relaciones trascendentes entre los contenidos de estadística descriptiva trabajados con anterioridad y la información nueva que se generó.

Como propuesta a futuro, el desafío está puesto en continuar diseñando metodologías de trabajo que propicien el desarrollo razonamiento estadístico en los estudiantes. Consideramos que una de las formas de seguir en esta línea es introducir en las clases de Estadística el trabajo con proyectos, planteados por el cuerpo docente, o elegidos libremente por los alumnos, utilizando la tecnología como un recurso facilitador para la participación en verdaderos “laboratorios virtuales de investigación".

Referencias

Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H. (1983) Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo. (2a Ed.) México: Trillas.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? Blaix, 15 (pp. 2-13). Disponible en http://www.ugr.es/~batanero.

Batanero, C. y Godino J. (2001). Análisis de Datos y su Didáctica. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M, Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas.* Vol. 83, (pp.7-18). ISSN: 1887-1984. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 7, (pp. 33-115).

Edwards, V. (1997). La forma del conocimiento en el aula. En Rockwell, Elsie; *La escuela cotidiana*. México, Fondo de Cultura Económica.

Gal, I., Garfield, J.B. (1997). The Assessment Challenge in Statistics Education. The International Statistical Institute. Ámsterdam: IOS Press.

Gambeta, F., Goitia, C., San Román, V., Zeppa, C. (2011) Utilización del software R para la enseñanza de la estadística: experiencia en un curso de ingeniería. *REM: Revista de Educación Matemática*, vol. 27. Disponible en http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/.

Garfield, J. B., Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop student's statistical reasoning. En Batanero, C., Burril, G., Reading, C. y Rossman, A. (Eds.). Proceedings of the ICMI Study and IASE Round Table Conference. Disponible en: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Files/Topic4/T4P6_Garfield.pdf.

Godino, J. D., Roa, R., Recio, A. M., Ruiz, F. y Pareja, J. L (2006). Análisis didáctico de un proceso de estudio de la ley empírica de los grandes números. Versión ampliada y revisada de la Ponencia Invitada al 7th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS7).Brasil. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/estocastica_mpi.pdf.

Godino, J.D., Arteaga, P., Estepa, A., y Rivas, H. (2013). Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos. Publicado en las Actas de las Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Núm. I, vol. 2. ISSN: 2255-5854.

Kilpatrick, W. H. (1918). The Project Method. Teachers College Record, vol. 19 (pp. 319–334).

Litwin, E. (2004). El acceso a la información. En Litwin, Edith et al. (comps.). *Tecnologías en las aulas*. Buenos Aires: Amorrortu.

Padrón, M., Rosales, N., Moreno, N. (2010). Uso de las TIC para la enseñanza de la asignatura estadística aplicada a la educación en la facultad de ciencias de la educación de la universidad de Carabobo. *Revista de Tecnología de Información y Comunicación en Educación*, Núm. 2, vol. 4. Venezuela.

Rodríguez, M.I. (2012). Inferencia informal: del análisis de los datos a la inferencia estadística Universidad Nacional de Río Cuarto, Córdoba. *REM: Revista de Educación Matemática*. Vol. 28. Disponible en: http://www2.famaf.unc.edu.ar /rev_edu/.

Sanabria Brenes, G., Vanegas F. (2013). Simulación en Excel: buscando la probabilidad de un evento. Ponencia presentada en Encuentro sobre didáctica de la Estadística, Probabilidad y Análisis de Datos (EDEPA), Instituto Tecnológico de Costa Rica. Disponible en http://www.tec-digital.itcr.ac.cr.

Sánchez, J. (2000). Nuevas tecnologías de la información y comunicación para la construcción del aprender. Santiago de Chile, Chile: LMA Servicios Gráficos.

Sancho Gil, J. M. (2006). Tecnologías para transformar la educación. Madrid: Akal Ediciones.

San Román, V. (2014). Aplicación de una secuencia didáctica utilizando planillas de cálculo en contenidos de estadística: una propuesta para promover el desarrollo de competencias didácticas del futuro Biólogo. Publicado en el Cuaderno de Resúmenes de la Reunión de Educación Matemática en Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. San Luis, Argentina.

Santoyo, R. (1981). Algunas reflexiones sobre la coordinación en los grupos de aprendizaje. *Perfiles Educativos*. Núm. 11. CISE-UNAM. México.

ANEXO

Comenzaremos con la primera actividad práctica donde se aplicarán medidas de dominancia y diversidad en el ecosistema de la Ciudad de Bahía Blanca.

Los objetos de estudio serán los vehículos de cuatro ruedas que no excedan un determinado peso (automóviles y camionetas).

Tendrás que registrar la especie (Marca) a la que pertenece cada uno.

marca	datos base	datos alu	frec final
Renault	53		53
Fiat	42		42
Chevrolet	36		36
Ford	33		33
Volkswagen	33		33
Peugeot	31		31
Toyota	13		13
Citroen	6		6
Honda	6		6
Dodge	3		3
Audi	2		2
Isuzu	2		2
Mercedes Benz	2		2
Mitsubishi	2		2
Seat	2		2
Subaru	2		2
BMW	1		1
Suzuki	1		1
	0		0
	0		0
	0		0
	0		0
	0		0
total	270		270

Habrá 270 datos de base proporcionados por la cátedra, y deberán agregar 50 más (lo que dará un total de 320).

Dispones de una planilla de cálculo con la información básica y las herramientas para procesar los datos llamada: *"Diversi"*. La misma tiene una Hoja llamada: *"Datos"* donde podes completar las frecuencias correspondientes a las 50 observaciones (incorporando nuevas marcas, si fuera necesario) y así obtener los datos definitivos.

Luego de realizar el análisis exploratorio del conjunto de datos nos preguntamos:
¿Cuál es la Población de Estudio?...
¿Cuáles son las unidades experimentales? ....
¿Cuál es la Variable que se mide? ....
¿Cuál/es de las medidas utilizadas tuvieron un marcado cambio al realizar el agrupamiento? ....
¿Cuántas marcas de autos consideraría Ud. que son relativamente importantes? ....

Recuerda la importancia de complementar tus respuestas con distintos registros de representación del contenido de estadística desarrollados en clase.

Propuestas docentes y preferencias de los estudiantes en el nivel universitario

Mónica Giuliano[1], Silvia Pérez[2], Myrian Gil[3] y Sergio Defusto[4]

[1]mgiuliano@ing.unlam.edu.ar, Universidad Nacional de La Matanza
[2] sperez@ing.unlam.edu.ar, Universidad Nacional de La Matanza
[3]mgil@ing.unlam.edu.ar, Universidad Nacional de La Matanza
[4] sdefusto@ing.unlam.edu.ar, Universidad Nacional de La Matanza

Resumen

En investigaciones previas realizadas por la Cátedra de Probabilidad y Estadística se identificaron algunas estrategias con impacto en la retención de alumnos en dicha asignatura. La implementación de dichos cambios logró incrementar el porcentaje de aprobación, mejorar el aprendizaje de los alumnos y mostrar la tendencia positiva de la percepción de los mismos sobre la dificultad de la asignatura. Sin embargo, del análisis de los resultados obtenidos hemos podido notar que no todas las herramientas fueron utilizadas por los estudiantes y de las que resultaron elegidas hemos identificado cambios en los usos y costumbres de los alumnos, tales como la baja utilización del mail y la elección de una postura pasiva a la hora de guiar su formación, entre otros. En este trabajo se vincularán las estrategias mencionadas con la incidencia de la asignatura en el rezago de los estudiantes en la carrera. A pesar de los éxitos tomados en perspectiva sobre la tasa de aprobados de la asignatura PyE consideramos que este nuevo paradigma obliga a repensar nuevos recursos o mejorar los anteriores para involucrar a los alumnos en el autoaprendizaje.

Palabras clave: Estrategias educativas, Taller, Grupo Google, E-status.

1. Introducción

A partir del año 2009 la cátedra de la asignatura Probabilidad y Estadística decidió implementar nuevas estrategias de enseñanza brindándole a los alumnos distintas herramientas que les permitieran mejorar el aprendizaje de la materia y a su vez modificar su percepción respecto a la dificultad de la asignatura. (Pérez et al, 2013)

Si de cifras se habla, es importante destacar que el porcentaje de desaprobados previo a la implementación era desalentador: durante el ciclo 2008, sobre un total de 318 alumnos sólo el 7% logró la condición de 'aprobado' y sólo el 10% logró la condición de 'cursada' (pendiente de examen final). Luego de la implementación dicho porcentaje mejoró notablemente, logrando un 30% de "aprobados y otro 30% con final pendiente (Giuliano et al, 2013).

En la Figura 1 puede visualizarse claramente la situación descripta anteriormente y asimismo cómo han cambiado los porcentajes de alumnos aprobados y desaprobados a partir de 2009.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 397-405). Granada, 2015.

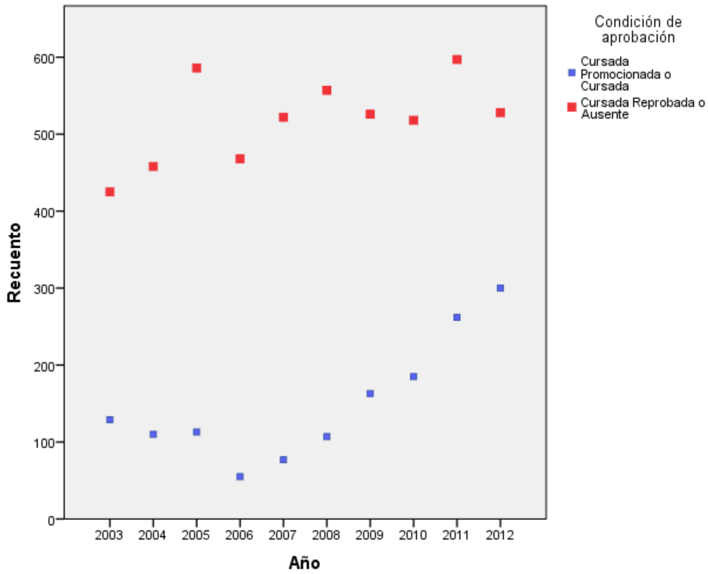


Figura 1. Recuento anual de aprobados-desaprobados en PyE durante el período 2000-2012.

En este artículo se recorren diferentes propuestas didácticas de docentes de la cátedra de Probabilidad y Estadística para carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza, y se analiza la aceptación o rechazo de los estudiantes a las mismas.

2. Estrategias implementadas

Las diversas estrategias propuestas por la cátedra Probabilidad y Estadística, orientadas a favorecer la aprobación de la asignatura, se fueron sumando paulatinamente a partir del año 2009 (Giuliano et al, 2014), siendo las más importantes de mencionar: foro virtual, talleres de resolución de problemas, plataforma e-status (González et al, 2010), etc.

Dentro del conjunto de estrategias educativas propuestas por la Cátedra, los alumnos demostraron su preferencia por las siguientes herramientas: Talleres de Resolución de problemas, e-status y Grupo Google.

2.1. Talleres de Resolución de problemas

Los talleres fueron concebidos para brindarles a los alumnos un espacio destinado a saldar todos aquellos interrogantes que se les pudieran llegar a presentar en el momento de estudiar los contenidos de la asignatura.

Desde el punto de vista docente, el taller representa un espacio que permite trasmitir conocimiento a los alumnos en forma clara y concisa en un ambiente relajado, logrando de esta forma que el estudiante perciba el vínculo de confianza, participe y aprenda a consolidar los aspectos teóricos juntamente con los prácticos.

En paralelo, la Cátedra comenzaba un proceso de capacitación de alumnos ayudantes para la formación de futuros docentes de la asignatura. Se incorporaron estudiantes avanzados de la Carrera de Ingeniería en Informática, que demostraron resultados exitosos ya que supieron aprovechar los beneficios del foro sorteando las dificultades propias del curso en cuanto al estudio de sus contenidos ,además de poseer condiciones y demostrar interés por formar parte de la Cátedra.

Desde 2011 se comenzaron a brindar 4 talleres consecutivos, los días sábados en turnos de 2 horas. Se observaron mejores resultados con docentes de menor trayectoria, los ayudantes, ya que los alumnos participaban más y por ende también se evidenció la importancia de la “zona de desarrollo próximo”, aún a nivel de educación superior.

En los comienzos fueron pocos los alumnos que asistían a dichos talleres pero quienes lo hacían, dejaban ver claramente que preferían evacuar sus inquietudes con los ayudantes de cátedra no así con los docentes. A medida que transcurrieron las semanas, el número de participantes aumentó en tanto los estudiantes iban enterándose de la existencia de los mismos.

La evolución de la participación de los alumnos al taller de resolución de problemas puede visualizarse en la Figura 2, donde se observa un alto presentismo y promedio de alumnos muy similar al de un curso obligatorio.

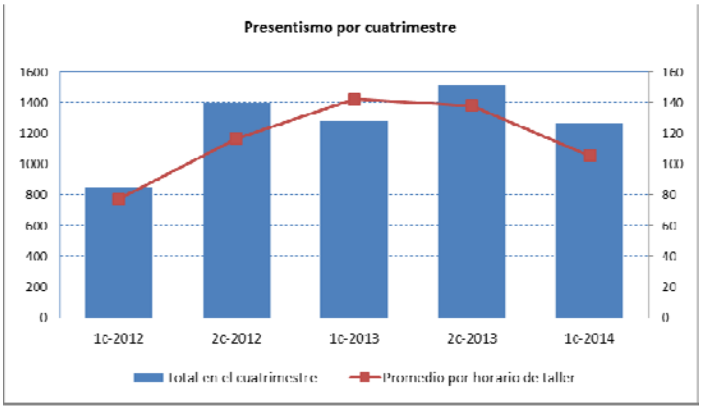


Figura 2. Presentismo total en los talleres durante todo el cuatrimestre y en promedio por taller.

Desde la implementación de las múltiples estrategias hemos consultado a los alumnos a través de encuestas y entrevistas para conocer su percepción sobre las mismas. Se buscó que los estudiantes, en base a su experiencia personal, pudieran transmitirnos cuáles eran las ventajas y desventajas de los talleres de resolución y consulta.

En la Figura 3 se pueden observar los resultados obtenidos en la encuesta realizada durante el primer cuatrimestre del año 2013. Según la perspectiva de los alumnos se visualiza una alta valoración a la comunicación con el docente a través del feedback y la vinculación de los contenidos teóricos y prácticos.

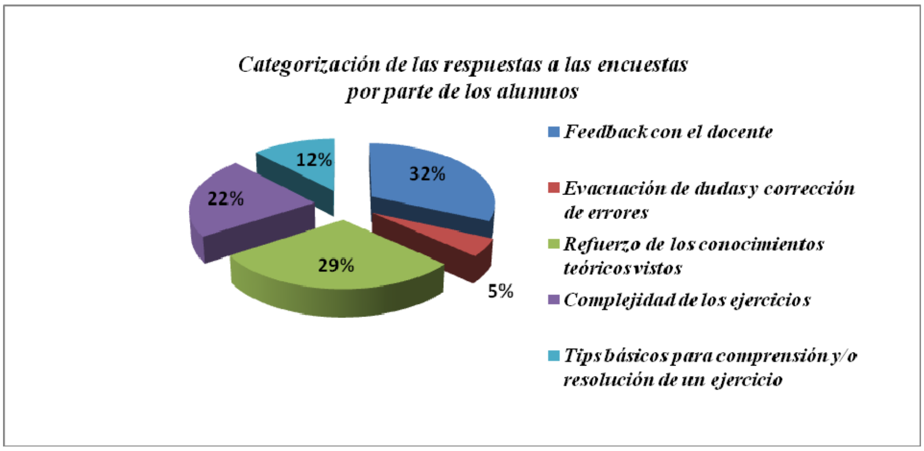


Figura 3. Categorización de las ventajas de los talleres desde la perspectiva de los alumnos.

2.2. e-status

E-status (González; Muñoz; 2006; González et al, 2010) es una plataforma web creada por un grupo de investigadores del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Politécnica de Cataluña (DEIO-UPC) para favorecer el aprendizaje de temas de probabilidad y estadística. Sin embargo, dicha herramienta permite la generación y corrección automática de problemas de todas aquellas asignaturas que impliquen cálculo numérico a nivel científico o técnico. E-status utiliza tecnologías informáticas Open Source y ejecuta el código asociado en el software R (cran.r-project.org) para generar y resolver automáticamente problemas propuestos por el docente para determinada asignatura y disponibles para sus alumnos a través de una página web. La plataforma está planteada como una herramienta que le otorga al docente la posibilidad de:

- Diseñar ejercicios que implican cálculos estadísticos o numéricos, parametrizando el enunciado para brindar distintas respuestas en cada ejecución realizada por el alumno.
- Agrupar ejercicios para abordar distintos temas y/o unidades
- Sugerir u orientar en caso de respuestas incorrectas
- Asignar problemas diferenciados, según criterios pedagógicos y de modo flexible en el tiempo.
- Realizar el seguimiento del trabajo realizado por sus alumnos, aún en grupos numerosos.
- Acceder al histórico de uso de e-status de todos sus estudiantes
- Acceder a herramientas de análisis de las ejecuciones de cada problema

Nótese que en la Figura 4 se describe la tasa de éxito de las diferentes preguntas de un problema en particular sobre todas las realizaciones efectuadas por los alumnos de cierto curso.

Figura 4: Vista de un problema desde la perspectiva del docente de estadísticas.

Asimismo, e-status permite que el alumno pueda:

- Seleccionar el ejercicio que desea realizar, ya que los mismos se encuentran categorizados por temas de diferente índole.
- Resolver y responder los ejercicios propuestos para obtener la corrección automática de las respuestas consignadas.
- Repetir la resolución de un ejercicio tantas veces como lo desee ya que la herramienta permite visualizar nuevos juegos de datos cada vez
- Visualizar su histórico de uso de e-status y su situación en el conjunto de la clase

La Figura 5 permite visualizar un problema propuesto por la cátedra, desde la perspectiva de un alumno.

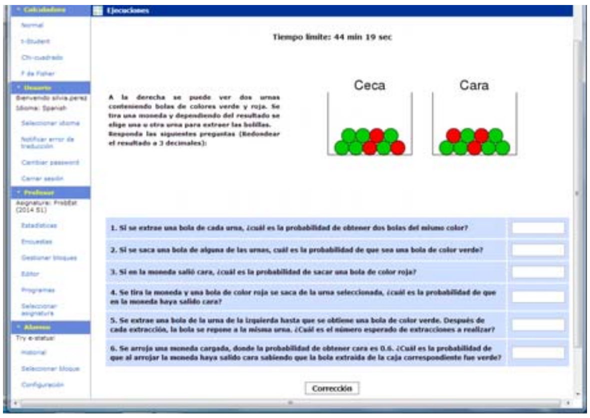


Figura 5.Vista de un problema a resolver por un estudiante.

Durante el año 2014 se decidió instalar e-status en forma definitiva en los servidores propios de la UNLaM luego de haber obtenido una experiencia positiva resultante de la utilización de dicha herramienta, de modo experimental, durante los períodos 2012-2013 en la asignatura Probabilidad y Estadística de las carreras de Ingeniería del Departamento de Ingeniería de la UNLaM (DIIT). A partir de los resultados obtenidos en la encuesta de opinión entregada a todos los alumnos participantes durante la implementación de la plataforma, se evidenció un porcentaje considerable de adeptos que consideraron a la misma un medio útil para complementar su formación. No obstante también se evidenció un grupo de alumnos que no mostraron interés en la utilización de recursos tecnológicos, lo que responde naturalmente a diversos puntos de vista y elecciones de aprendizaje.

2.3. Grupo Google

El grupo virtual Google constituye otra de las estrategias didácticas ofrecida por la Cátedra de PyE que resultó valorada por los estudiantes. Dicho espacio fomentó la comunicación entre docentes y alumnos permitiendo el intercambio de información y fortaleciendo el vínculo entre pares. El docente no sólo utiliza el grupo para dar a conocer todas aquellas novedades de índole administrativa tales como cronograma, fechas de parciales, etc. y/o correspondientes a los temas propios de la asignatura, apuntes, guía de trabajos prácticos, etc. sino que representa un espacio para iniciar un debate que logre captar la atención del alumno para que este pueda realizar su propio trabajo cognitivo. El alumno por su parte, adopta distintas posturas conforme a la utilización del grupo virtual. Algunos estudiantes inician debates para consultar por ejercicios y/o conceptos que no pueden resolver mientras que otros simplemente observan las resoluciones de los debates iniciados por sus pares y/o las devoluciones recibidas por parte de los docentes.

Durante el primer Cuatrimestre del año 2013, se generaron 2539 debates, 1855 iniciados por los alumnos y el resto por los docentes. Del total de debates, se generaron 12103 vistas y se sumaron 570 participaciones sobre los mismos. En la Figura 6 podemos notar claramente que existe una acentuada diferencia entre quienes participaron activamente, ya sea tomando la iniciativa de comenzar un debate o simplemente incorporando información o aclaraciones, y aquellos que se limitaron solamente a observar las participaciones de los demás.

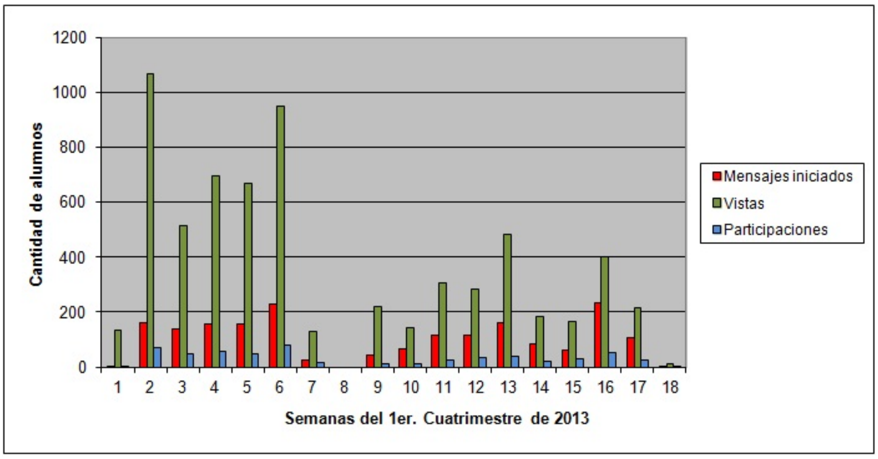


Figura 6. Diferentes tipos de participación de los alumnos en referencia a debates iniciados por ellos.

La misma tendencia se observa ante los debates iniciados por los docentes a fines de transmitir material de estudio o propuestas adicionales de ejercitación. Este comportamiento se proyecta en la Figura 7, donde no debe perderse de vista la substancial diferencia entre quienes respondieron activamente con aportes expuestos y quienes permanecieron en una postura pasiva.

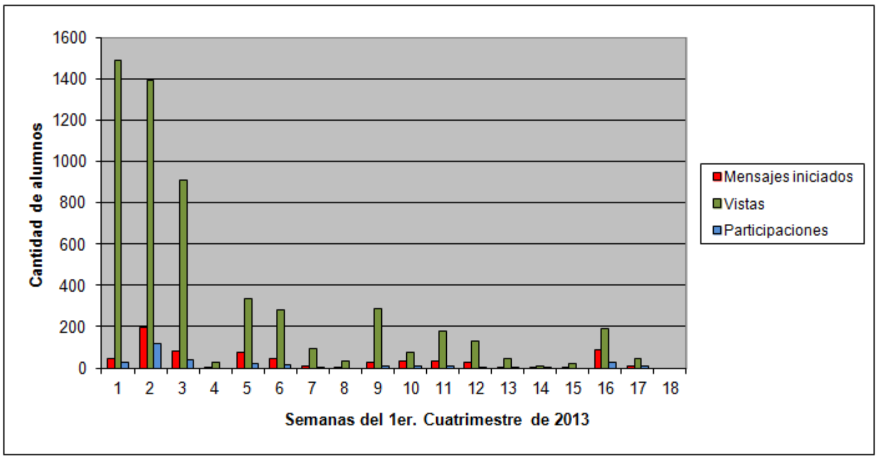


Figura 7. Diferentes tipos de participación de los alumnos en referencia a debates iniciados por docentes.

3. Conclusiones

En vista de los resultados obtenidos creemos necesario continuar con la adaptación de las metodologías en pos de acompañar a los alumnos en el proceso de auto aprendizaje. Consideramos que la utilización de la plataforma e-status durante 2015 nos permitirá captar la atención de aquellos alumnos que adoptaron una postura pasiva frente a la utilización del Grupo. El objetivo por parte de los docentes seguirá siendo el de "involucrar" al alumno para que éste logre finalmente la obtención del conocimiento trasmitido.

Se puede destacar que los alumnos valoraron el aporte de la cátedra y decidieron tomar el espacio ofrecido con los talleres como propio. Se generó además un espacio de confianza que representa el motor que impulsa la participación, comparable con los principios básicos considerados en el Proceso de Mentoring: “para que el proceso funcione el mentori y el Telémacoii deben compartir una relación cercana y de confianza”. (Alonso et al, 2012)

Resultó esencialmente importante la comunicación entre docentes y alumnos, así como también las estrategias de los docentes para orientar el proceso de aprendizaje desde un enfoque que tiene por objeto desdibujar la brecha que generalmente existe en el vínculo docente – alumno.

Se propone el aprendizaje de carácter práctico y activo, coincidiendo con los dichos de Alonso (2012) en cuanto a la promoción de aprendizajes que han de ser prácticos para no quedarse en un puro conocimiento intelectual sino que el alumno se ve desafiado en su manera actual de entender la realidad.

El dialogo, el respeto y un buen clima son el escenario ideal para compartir experiencias, debatir y participar. Asimismo, se ha observado una postura relajada por parte del alumno frente a quien considera un par, un docente ex estudiante que es capaz de utilizar un lenguaje didáctico y simplificado a la hora de transmitir las nociones que se desean implantar entre los participantes del curso, simplemente porque él ya estuvo en ese lugar antes.

Se trabajó en la selección de los contenidos y ejercicios, ya que creemos que juegan un papel importante y coincidimos con la recomendación de (Feldman et al, 2001) respecto a la necesidad de plantear una tipología de contenidos: analizar, seleccionar, priorizar, categorizar contenidos pero por sobre todas las cosas, recordar qué conocimientos serán exigibles y trasmitidos en el tiempo disponible.

La importancia de vincular la práctica a la teoría y no naturalizar dicha relación ha sido analizado por otros autores como por ejemplo Carlino et al, (2005), quien propone “alfabetizar respecto a los contenidos de la materia”, “hacerse cargo de la lectura y la escritura de cada materia”. Enseñar lo que se pretende solicitar luego en una consigna de un problema propuesto en la asignatura Probabilidad y Estadística ha sido una tarea que ha ocupado a los docentes en el taller y que resultó valorada tanto por docentes y alumnos. La prueba de dicha valoración se evidencia en la alta tasa de presentismo en los talleres que son extra-clase y optativos.

Referencias

Alonso García, M.; Calles Doñate, A; Sánchez Avila, C. (2012). *Diseño y Desarrollo de Programas de Mentoring*. Editorial Síntesis. Madrid, España.

Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad: Una introducción a la alfabetización académica.* Editorial S. L. Fondo de Cultura Económica de España. Madrid, España.

Feldman, D.; Palamidesi, M. (2001). *Programación de la enseñanza en la universidad. Problemas y enfoques.* Colección Universidad y Educación. Serie Formación Docente. (1). Secretaría Académica Universidad General Sarmiento. Buenos Aires, Argentina.

Giuliano, M.; Pérez, S.; Sacerdoti, A. (2011). Inclusión de Tecnologías de la información y comunicación en la formación estadística. @tic. *Revista d’Innovació Educativa. Universitat de Valencia*. 6(1), 1-9. Disponible en https://ojs.uv.es/index.php/attic/article/view/290

Giuliano, Mónica; Pérez, Silvia; Sacerdoti, Aldo; Gil, Myrian; Bosio Agustín; Fernández, Juan Manuel. (2013). Experiencia de implementación de múltiples estrategias de enseñanza en cursos de Probabilidad y Estadística para Ingeniería. En Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (Eds.). Actas de las *1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.* (pp 301-308). Granada, España.

Giuliano, Mónica; Pérez, Silvia N.; Sacerdoti, Aldo; Márquez, Marcelo; Romero, Maximiliano; Salvador, Alicia; Gil, Myrian; Edwards Molina, Diego Defusto, Sergio; Iannussi, German; Fernández Ussher, Juan Manuel; Bosio, Agustín. (2014). Estudio de modelos estadísticos y de estrategias de enseñanza para cursos de estadística. En Osvaldo Spositto y Andrés Dmitruk. (Eds.). *Anuario de investigaciones resúmenes extendidos 2012.* Universidad Nacional de La Matanza (pp 193-200). San Justo, Buenos Aires, Argentina.

González, J.A.; Jover, L.; Cobo, E., Muñoz, P. (2010). Trial. Computers *& Education.* 55(2), 704-713.

Pérez, S.N.; Giuliano, M.; Sacerdoti, A.; Gil, M. (2013). Implementación y evaluación de múltiples estrategias de enseñanza en cursos de probabilidad y estadística para Ingeniería. *TE&ET Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología.* 10(2), 71-78.

---

i Mentor: Persona que aconseja o guía, que ayuda a adquirir competencias, “un saber y un poder hacer” y a “saber estar”

ii Telémaco: En el ámbito académico, es un estudiante con unas capacidades que debe aprender a desarrollar para aprovechar mejor las oportunidades que le ofrece su entorno y posteriormente lograr su inserción profesional.

Reflexões de professores dos anos iniciais sobre interpretação de dados estatísticos com o uso do *software TinkerPlots*

Jessica Melo[1], Maria Niedja Martins[2], Carlos Monteiro[3] y Carolina Carvalho[4]

[1]marianiedjamartins@campus.ul.pt, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
[2]jessica.albuquerque60@gmail.com, Universidade Federal de Pernambuco
[3]carlos.monteiro@campus.ul.pt, Universidade Federal de Pernambuco
[4]cfcarvalho@ie.ulisboa.pt, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Resumo

Este artigo discute aspectos de um estudo que buscou explorar uma situação de formação continuada de professores sobre o ensino de tópicos de Estatística utilizando diferentes recursos. Especificamente, analisamos a compreensão dos professores sobre o conteúdo estatístico das tarefas, as estratégias de análise de dados desenvolvidas pelos mesmos; bem como identificamos as reflexões dos professores sobre atividades de Estatística que utilizam o *TinkerPlots*. Participaram do estudo quatro professores pedagogos de uma escola Estadual da Região Metropolitana do Recife, Pernambuco, Brasil. Os participantes foram entrevistados e realizaram duas tarefas. Na tarefa 1, os professores eram convidados a responder uma situação-problema utilizando materiais confeccionados à mão. Na tarefa 2, eles responderam o mesmo problema utilizando o *software TinkerPlots*. As análises indicaram que os professores estabeleceram comparações entre as tarefas, por exemplo, entre o tempo decorrido das tarefas, a quantidade de dados manipulados, a realização de cálculos e outros. Os professores destacaram o *software* como o recurso mais adequado para desenvolver atividades estatísticas que utilizem grandes quantidades de dados. Os resultados apontam assim, para o benefício de construir mais espaços de diálogos entre os professores sobre o ensino de Estatística.

Palavras-chave: Educação Matemática, Educação Estatística, Software TinkerPlots, Formação de professores.

1. Introdução

Diversos são os contextos sociais nos quais dados estatísticos são interpretados. A consideração desses tipos de contextos é importante para identificar componentes e processos relacionam-se às situações de interpretação (Gal, 2002; Monteiro & Ainley, 2010). Por exemplo, no contexto de leitura de dados estatísticos veiculados pela mídia, os cidadãos necessitam estar atentos para que não sejam levados a interpretarem de maneira errônea (Monteiro, 2005). Neste sentido, o conhecimento estatístico é essencial para uma reflexão crítica e para uma cidadania participativa (Carvalho & Solomon, 2012).

Pela importância que os conhecimentos estatísticos têm assumido na vida contemporânea, diversos países reconheceram a necessidade de inclusão da Estatística enquanto conteúdo curricular desde os primeiros anos da Educação Básica. Apesar, desse reconhecimento da Estatística enquanto conteúdo curricular por documentos oficiais, ainda há muitos entraves para o desenvolvimento satisfatório do ensino de Estatística. Em particular, destaca-se a falta de aprofundamento sobre conteúdos de Estatística na formação inicial e continuada de professores que ensinam nos primeiros anos de escolarização.

Fernandes, Carvalho e Correia (2011) realizaram um estudo sobre a caracterização do ensino Estatística na Escola Básica em Portugal. Dentre outros aspectos, esse estudo indicou que os professores participantes verbalizaram que achavam fácil o ensino de Estatística e enfatizaram a natureza prática dos conhecimentos de Estatística no cotidiano das pessoas. Todavia, numa análise das abordagens pedagógicas desses professores, pode-se identificar que essa atribuição de facilidade de ensinar estava relacionada à ênfase em procedimentos que por sua vez não promoviam o desenvolvimento de noções importantes de Estatística.

Fiorentini (2012) discute uma abordagem de desenvolvimento profissional baseada em processos reflexivos que acontecem em grupos de docentes que discutem suas práticas e aprendem sobre o ensinar e aprender matemática. Nesse sentido, o autor defende que os processos de reflexão podem favorecer aprendizagens mais aprofundadas sobre o ensinar. Nessa perspectiva, parece-nos que o trabalho junto a professores na busca por compreensões sobre elementos e abordagens para ensinar Estatística torna-se fundamental.

Outro importante desafio para os professores que ensinam Matemática e Estatística, é a utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), sobretudo o uso de computadores e *software* voltados para o ensino da Estatística. Além de questões relacionadas à falta de acesso e resistência dos professores para utilizar recursos tecnológicos, pode-se mencionar também que existe uma escassez *software* que atendam as demandas do ensino de Estatística nos primeiros anos de escolaridade. Os programas de análise de dados disponíveis online em geral possuem interfaces complicadas para o trabalho com crianças dos primeiros anos, ou, mesmo o oposto disso, pois há diversos *softwares* disponíveis os quais são baseados numa linguagem de instrução e não de interação com o usuário (Gomes et al., 2002).

Neste artigo, nós discutimos aspectos de um estudo realizado com profesores brasileiros do Ensino Fundamental utilizando o *software TinkerPlots*. Os objetivos da pesquisa relacionaram-se com a exploração de situações que poderiam ser potencialmente interessantes para a formação de professores, nas quais os docentes pudessem refletir sobre seus conhecimentos de Estatística, sobre análise de dados e possíveis situações de ensino de Estatística.

2. O software TinkerPlots e o Ensino da Estatística

Desde 2007, os Grupos de Pesquisa em Educação Matemática nos contextos da Educação do Campo (GPEMCE) e em Educação Matemática e Estatística (GPEME) do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) vem desenvolvendo pesquisas com estudantes e professores brasileiros usando o *software TinkerPlots* (Monteiro, Carvalho & Ainley, 2013).

Esses estudos desenvolvidos no Brasil (por exemplo, Asseker, 2011; Eugênio, 2013) compreendem o *TinkerPlots* como um *software* interativo de análise de dados que apresenta uma interface simples para o trabalho com estudantes dos anos iniciais do ensino básico. O *TinkerPlots*, é um *software* comercial, criado por Konold e Miller (2001), e tem como objetivo a manipulação, construção e visualização de diferentes representações de dados estatísticos.

De maneira geral, algumas dessas pesquisas também evidenciam a pouca familiaridade que profesores dos anos iniciais apresentam com *softwares* para o ensino de estatística e com o tópico de tratamento da informação. A pesar disso, quando os profesores passam por sequências de atividades no *TinkerPlots* são notados aspectos positivos no processo de interpretação de dados e na compreensão de conceitos estatísticos pelos professores.

Por exemplo, no estudo desenvolvido por Martins, Monteiro e Queiroz (2013), observou-se que uma professora ao manipular e interpretar dados no *TinkerPlots*, apresentou mudanças na compreensão sobre o tamanho e a representatividade de amostras. De acordo com os autores, a manipulação de amostras crescentes no *software* permitiu a identificação de tamanhos e vieses em amostras pequenas, por meio de simulações e visualização de gráficos.

A manipulação de amostras crescentes no *TinkerPlots* também têm sido investigadas por Prodromou (2011) e Ben-zvi et al (2011) junto a estudantes do ensino básico. Tais autores têm mostrado em seus resultados que o contexto de amostras crescentes utilizando uma base tecnológica, pode auxiliar estudantes a realizarem inferencias de diferentes amostras à população.

Especificamente no campo do ensino da Estatística, diferentes autores (Ainley, Pratt, Nardi, 2000; Asseker, 2011; Moraes e Carvalho, 2011) consideram que as atividades estatísticas desenvolvidas com o auxílio do computador diferem significativamente das atividades que envolvem apenas lápis e papel.

Em um estudo realizado por Moraes e Carvalho (2011) ao analisarem a interpretação de dados por estudantes do 5º ano a partir de modelos prontos, material manipulável e o *software TinkerPlots*, observaram que o desempenho dos participantes que utilizaram os dois primeiros recursos foi semelhante entre si; porém, aqueles que fizeram uso do *software TinkerPlots* apresentaram um desempenho melhor em relação aos demais participantes do estudo.

A ênfase na utilização de recursos tem sido apontada por Adler (2000) como sendo uma necessidade dos cursos de formação continuada. De acordo com essa autora, os profesores quase sempre relacionam a dificuldade na realização de aulas de matemática à falta de recursos materiais. Nesse sentido, é preciso oferecer oportunidades para que profesores possam discutir sobre o uso de diferentes tipos de recursos no ensino, sobretudo porque experiências pedagógicas que utilizam o computador só podem ser verdadeiramente eficazes, na medida em que os profesores estejam apoiados técnica e pedagógicamente para esta finalidade.

3. Método

A pesquisa teve cárater exploratório com uma abordagem interpretativa. A investigação foi realizada em uma escola da Rede Estadual de Ensino da Região Metropolitana do Recife –Brasil e escolhida por conveniência. Tivemos a participação de quatro professores que atuavam na referida escola estadual e que já possuíam experiência com uso de computadores no cotidiano. Todos os professores tinham formação em Pedagogia e lecionavam nos anos iniciais da Educação Básica. Para preservar a identidade dos participantes, atribuímos nomes fictícios a cada um deles para realizarmos nossa análise: Jane, Maria, Ricardo e Sílvia.

Os instrumentos de coleta de dados foram compostos por entrevista semi-estruturada e registro em vídeo das atividades desenvolvidas pelos professores. O *software Camtasia 7.1* foi utilizado para a realização dos registros em vídeo por permitir a captura dos gestos dos participantes, bem como a gravação de suas falas e ações executas na tela do computador.

Os professores participaram de três encontros de pesquisa. No primeiro encontro foi realizada uma entrevista semi-estruturada com cada participante para coletar dados quanto à relação dos professores com a tecnologia informática, com o ensino e o conteúdo de Estatística.

O segundo encontro constou de uma sessão coletiva com os professores participantes da pesquisa, os quais foram solicitados a analisar uma base de dados composta por uma população de 625 peixes distribuídos entre *normais* e *geneticamente modificados*. A situação da tarefa relacionava-se a um piscicultor que comprou alguns peixes *geneticamente modificados* com a promessa de que eles alcançariam tamanhos maiores do que os tamanhos dos peixes *normais*. No contexto da tarefa, o piscicultor teria colocado em seu tanque 625 peixes, alguns *normais* e outros *geneticamente modificados*. Depois que os peixes cresceram, o piscicultor selecionou aleatoriamente alguns dos peixes e os mediu. A questão a ser respondida pelos professores era: *quais os peixes que assumiram um comprimento maior, os normais ou os geneticamente modificados?*

Para a resolução desse problema, a pesquisadora disponibilizou 625 peixes de papel confeccionados manualmente que apresentavam comprimentos distintos e registrados em cada peixe. Em separado, foi desenhada uma representação num quadro, a qual deveria ser preenchida com os peixes, conforme a Figura 1:

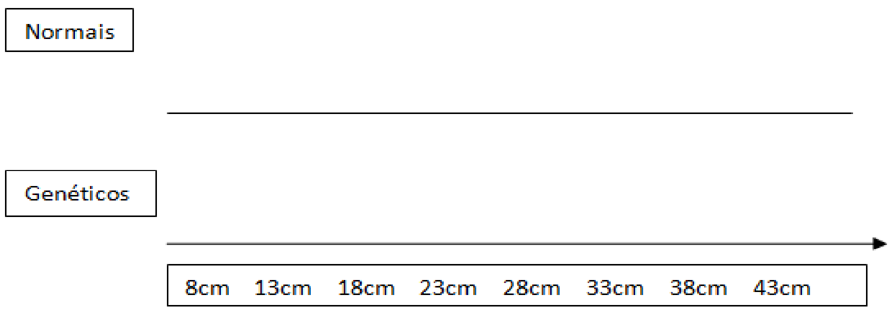


Figura 1. Representação oferecida aos professores para fixar os peixes.

Os professores foram convidados a escolher aleatoriamente 15 peixes de cada vez, dentre os 625 que ficavam dispostos em uma mesa. Em seguida, os participantes deveriam colar os peixes na representação apresentada na Figura 1 de acordo com o seu tipo e tamanho. Frequentemente, a pesquisadora perguntava se era possível observar qual grupo de peixes apresentava um comprimento maior, e se para os demais peixes da população essa tendência se mantinha.

O terceiro encontro foi realizado com as duplas Ricardo/Maria e Jane/Sílvia. Esse terceiro encontro ocorreu em dois momentos. Num primeiro momento, realizava-se uma familiarização com o *TinkerPlots* utilizando um banco de dados sobre o tema “gatos”. Essa etapa buscou fazer com que os professores reconhecessem alguns ícones do *TinkerPlots* correspondentes às suas ferramentas: *Cards, Separate, Order, Stack, Hat e Averages.*

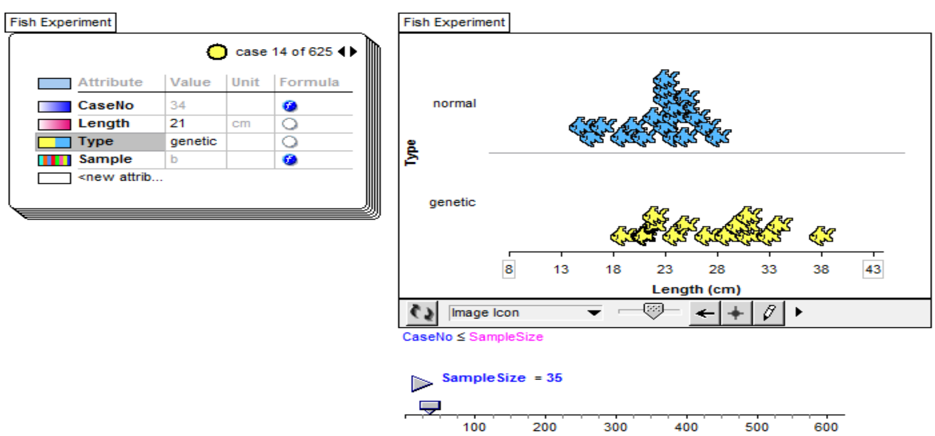


Figura 2. Representação do banco de dados do *TinkerPlots 1.0* utilizado no 3º encontro da pesquisa.

A Figura 2 reproduz a tela do *TinkerPlots* contendo o banco de dados utilizado na tarefa 2, realizada no segundo momento do terceiro encontro. Para o desenvolvimento dessa tarefa, os professores foram convidados a resolver a situação-problema do piscicultor utilizando o *software TinkerPlots* com o banco de dados "Fish Experiment Demo" contendo 625 peixes, sendo alguns deles *normais* e outros *geneticamente modificados*.

Ao final do terceiro encontro, conversou-se com cada dupla de professores sobre as possíveis dificuldades e/ou facilidades que eles identificavam no decorrer das tarefas. Os protocolos gerados pela transcrição das falas e descrições das ações dos participantes registradas nos vídeos, permitiram as análises relacionadas aos objetivos da pesquisa. Neste artigo, por questões de espaço, iremos discutir os aspectos ocorridos na tarefa 2, na qual os profesores puderam resolver o problema dos peixes com o *software TinkerPlots*.

4. A resolução da Tarefa 2 no *TinkerPlots*

Após a tarefa 1 e a atividade de familiarização que constou de apresentação das principais ferramentas do TinkerPlots aos professores, realizamos a tarefa 2 com as duplas Maria/Ricardo e Jane/Sílvia. Nessa tarefa os professores utilizaram o *TinkerPlots* a fim de responder qual tipo de peixe alcançou comprimento maior.

Na primeira amostra retirada pela dupla Maria e Ricardo, eles conseguiram determinar qual grupo apresentava comprimento maior quando a amostra ainda permanecia com apenas 9 casos, conforme o diálogo e a Figura 3:

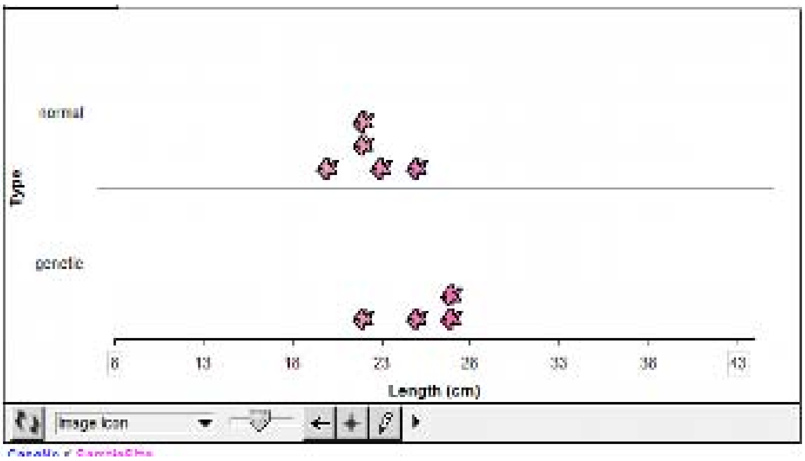


Figura 3. Representação de amostra com 9 peixes oferecida a dupla Maria/Ricardo no *TinkerPlots*.

Pesquisadora: No total ele tinha 625 peixes, mas se olharmos para esse gráfico, vocês poderiam me dizer se são os peixes geneticamente modificados ou são os normais que são maiores em comprimento?
Ricardo: São os genéticos [geneticamente modificados].
Maria: É!
Pesquisadora: Porque são os genéticos? [geneticamente modificados]

Ricardo: Porque eles chegam mais ou menos a 28 centímetros, enquanto os normais não. A média é entre 19 e 24.
Pesquisadora: Por quê? Como é que tu estás vendo a média?
Ricardo: A média não é onde está os maiores? No caso... Ah! Sei não!
Maria: Sei não!
Pesquisadora: Mas eu num mostrei onde está a média! Pegue a média que ela vai dizer [Eles seguem o comando]. Aí ele indicou o local, né? Pronto! Aí eu tenho o comprimento, certo? Aí eu tenho a média de comprimento desse grupo [normais] e tenho a média de comprimento desse grupo [geneticamente modificados]. Quais seriam os maiores?
Ricardo: Os genéticos. [geneticamente modificados]

As duas duplas de participantes acertaram a resposta quando afirmaram que os peixes geneticamente modificados foram os que alcançaram comprimentos maiores. Embora, os participantes apontassem para a resposta correta desde o início do diálogo, a pesquisadora intervinha indagando aos participantes quanto aos motivos deles terem oferecido determinada resposta. Dessa forma, os professores eram estimulados à reflexão e eram instigados a justificar suas afirmativas, expondo as suas estratégias de análise.

Tecendo alguns pontos comparativos entre o desenvolvimento da atividade com o auxílio do *software TinkerPlots* realizado pelas duas duplas de participantes, percebemos que os docentes fizeram uso da ferramenta *Average* apenas quando orientados pela pesquisadora. Esta os advertia também quanto à necessidade de leitura e interpretação das disposições gráficas permitidas pelo *software*, para que dessa forma eles pudessem estabelecer uma interpretação e uma justificativa coerente à representação gráfica e às questões investigadas.

4.1. Reflexões dos professores sobre o desenvolvimento das atividades

Notamos que os participantes pontuaram a dificuldade na análise e no tratamento dos dados quando testaram suas hipóteses colocando os peixes manualmente na representação desenhada no quadro (ver Figura 5). Além disso, frisaram a impossibilidade de inserir os 625 peixes no quadro para examinar a coerência de suas respostas, uma vez que tal exercício lhes valeria um tempo considerável.

Os professores reconheceram que mesmo apresentando dificuldades para manipular uma grande quantidade de dados apenas utilizando os peixes confeccionados à mão, foi possível estabelecer análises que se confirmaram com o uso do *TinkerPlots*.

Ainda com respeito às dificuldades e/ou facilidades vivenciadas durante a análise dos dados, os participantes mencionaram a maior clareza para identificar a resposta e interpretar o gráfico quando resolveram a situação-problema utilizando o *TinkerPlots*. Os participantes fizeram referência as disposições das ferramentas do *software* que lhes ajudaram a organizar os dados e averiguar suas hipóteses, como podemos ver no diálogo estabelecido com a professora Jane:

Pesquisadora: Foi mais fácil de observar a resposta aqui ou naquela tarefa?
Jane: Com certeza, aqui!
Pesquisadora: Por quê?
Jane: Porque ele (o software) separava direitinho as quantidades. Também a gente tem essas ferramentas aí pra usar as cores pra... dividir, separar... [...] Aqui a gente vê com mais clareza do que lá daquele jeito, porque não tinha cor e aqui não... aqui vai mostrar tudo certinho, o centímetro, a qualidade.

A fala da professora Jane sugere alguns elementos que foram facilitadores do processo de análise dos dados, destacando a possibilidade de visualizar de forma mais organizada dos dados no gráfico, que segundo ajudou ela a realizar suas inferências.

Dentre as colocações dos docentes também ressaltamos aquelas nas quais eles consideraram as TIC como algo que pode proporcionar situações mais agradáveis de ensino e aprendizagem, como reflete a fala dos professores Ricardo e Maria ao serem questionados sobre as diferenças percebidas durante as tarefas:

> Pesquisadora: ...em relação a outra (tarefa 1) que fizemos, o que vocês percebem de diferente, assim... de facilidades e de dificuldades?
> Ricardo: No caso, a tradicional, né? Sem ser usando as novas tecnologias?
> Pesquisadora: (...) É... É um outro tipo de recurso, né? Usando o quadro que a gente utilizou...
> Ricardo: Mas tudo que a gente faz com as novas tecnologias fica melhor... Os alunos têm mais curiosidade.
> Maria: É interessante pra eles. Eles aprendem mais rápido também. É o novo, né?
> Ricardo: ...então eles aprendem muito usando novas tecnologias.

Notamos que os professores reconheceram as TIC como ferramentas motivadoras por ser uma inovação. Eles também classificaram a tarefa 1 como sendo tradicional, afirmando que atividades desenvolvidas por meio das TIC possibilitam a concentração e interesse dos alunos, que, dessa forma, poderão aprender mais rápido.

Concomitante a essas declarações, Jane e Sílvia afirmaram a necessidade de planejamento para o uso do recurso tecnológico em sala de aula. Podemos encontrar explicações para essas reflexões das professoras nas suas próprias relações com o uso de *softwares*, quando negaram o uso de tais recursos para desenvolver atividades de Estatística. Logo, inferimos que a inserção de tal recurso durante o processo de ensino demandaria algumas horas de planejamento.

5. Considerações finais

Nesta pesquisa os professores conseguiram realizar leituras dos dados, manipular amostras crescentes e realizar inferências baseadas nas análises de diferentes amostras de uma mesma população. Quando indagados sobre a potencialidade de desenvolver tais tarefas com seus alunos, os professores apontaram preocupações sobre a qualidade e adequação desse instrumento para tarefas de tratamento de dados.

Podemos concluir que o processo pelo qual os docentes foram submetidos permitiu uma proximidade com temas e conteúdos estatísticos. Em particular, os professores tiveram a oportunidade de ter acesso e manusear o *TinkerPlots*, expressando ideias sobre a qualidade e adequação desse instrumento para o trabalho com tratamento de dados estatísticos. Portanto, pareceu-nos que o engajamento em situações de manipulação de dados com e sem um *software* podem ter favorecido reflexões sobre tarefas estatísticas nos contextos escolares.

Referencias

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 3(3), 205 - 224.

Ainley, J., Nardi, E., & Pratt, D. (2000). The construction of meaning for trend in active graphing. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*(2), 85-114.

Ben-zvi, D., Makar, K., Bakker, a. & Aridor, K. (2011). Children's emergent inferential reasoning about samples in an inquiry-based environment. In: *Proceedings Congress of the seventeen European Society for Research in Mathematics Education*, 2011. Poland.

Carvalho, C. & Solomon, Y. (2012). Supporting statistical literacy: What do culturally relevant/realistic tasks show us about the nature of pupil engagement with statistics? *International Journal of Educational Research*, *55,* 57-65.

Eugênio, R. (2013) *Explorações sobre a média no tinkerplots 2.0 por estudantes do ensino fundamental.* Dissertação Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: Meanings, components, responsibilities, *International Statistical Review,* 70(1), 1-25.

Gomes, A. S., Castro Filho, J. A., Gitirana, V., Spinillo, A., Alves, M., Melo, M., & Ximenes, J. (2002). *Avaliação de software educativo para o ensino de Matemática. Convergências Tecnológicas–Redesenhando as Fronteiras da Ciência e da Educação:* Anais. SBC.

Konold, C. & Miller, C. (2001). *TinkerPlots, version 0.42.* Amherst, MA: University of Massachusetts.

Monteiro, C. (2005). *Investigating critical sense in the interpretation of media graphs*. PhD Thesis, Institute of Education, University of Warwick.

Monteiro, C. E. F., Carvalho, L. M. T. L., & Ainley, J. (2013). O TinkerPlots como recurso para o ensino e aprendizagem de conteúdos de Estatística no Ensino Fundamental. In R. Borba e C. Monteiro (Org.). (pp. 106-133).*Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática.* Recife: Universitária da UFPE.

Monteiro, C. E. F. & Ainley, J. (2010). The interpretation of graphs: reflecting on contextual aspects. *Alexandria (UFSC)*, 3, 17-30.

Moraes, A. N. & Carvalho, L. M. T. L. (2011). Analisando a interpretação de dados por estudantes do 5º ano a partir de modelos prontos, material manipulável e software TinkerPlots. In: *Anais do Congresso de Iniciação Científica*, Recife: UFPE.

Martins, M. N. P., Monteiro, C. E. F. & Queiroz, T. N. (2013). Compreensões sobre amostra ao manipular dados no *software TinkerPlots*: um caso de uma professora polivalente *Revista Eletrônica de Educação*, 7(2), 317-342.

Fernandes, J. A., Carvalho, C. F. & Correia, P. F. (2011) Contributos para a caracterização do ensino da estatística nas escolas. *Boletim de Educação Matemática*, 24 (39), 585-606.

Fiorentini, D. (2012) Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 7(10), 63-78.

Pratt, D. (1995). Young children's active and passive graphing. J*ournal of Computer Assisted Learning*, *11,* 157-169.

Prodromou, T. (2011). Students' emerging inferential reasoning about samples and sampling. In: *Proceedings of the twenty tree Biennial Conference Of The Australian Association Of Mathematics Teachers – AAMT.* Australian: Mathematics: traditions and [new] practices.

Students' reasoning about variability in an horizontal modelling process of the stabilized relative frequencies

Ana Serradó Bayés[1], Maria Meletiou-Mavrotheris[2], Efi Paparistodemou[3]

[1]ana.serrado@gm.uca.es, La Salle-Buen Consejo, España
[2]m.mavrotheris@euc.ac.cy, European University of Cyprus
[3]e.paparistodemou@cytanet.com.cy, Cyprus Pedagogical Institute

Abstract

We describe a task that engaged a class of Grade 9 (aged 14-15) students in informal reasoning about the stabilized relative frequency distribution. The task involved a horizontal modelling process of the relative frequency of appearance of each vowel in strings of characters with three cycles: a pseudo-concrete model developed through a statistical process of investigation, a statistical model, and validation. We highlight aspects of students' reasoning about variability when interconnecting this important statistical concept with the related ideas of density, stability, data and distribution.

Keywords: variability, stabilized relative frequency distribution, modelling.

.

1. Introduction

Since its inception, philosophical difficulties have been prevalent in defining probability. Those difficulties are related to the fact that probability is not an inherent property of an event, but it is based on the underlying model chosen (Borovnik & Kapadia, 2014). Difficulties related to the nature of each of the models (classical, subjective, frequentist or logic) have been largely analysed by researchers investigating Probabilistic Thinking (Chernoff & Sriraman, 2014). Acknowledging the difficulties of introducing probability at the school level, teachers tend to be resistant to its teaching. In order to improve this situation, there have recently been various efforts to innovate and reform the teaching of probability by integrating it within the teaching of statistics, considering that Chance and Data developments should be intertwined. Those innovations aspire to link students' real world experiences to sustainable representations of probability.

It is in line with this aspiration that we present, in this paper, a task involving a horizontal modelling process of the relative frequency of appearance of each vowel in strings of characters. The task aims to help students analyse the variability of data and to estimate a confidence interval while informally reasoning about the stability of frequencies. Although the task seems very simple, complex concepts can emerge from it, including variability, stability, and relative frequencies in a modelling process that can eventually lead to the introduction of the Law of Large Numbers. The analysis of the interplay between these notions is introduced through a historical analysis of the Law of Large Numbers, and an aggregate view of the stabilized relative frequency distribution. In the study described in the paper, we sought to investigate whether the task indeed helped students to reason about data variability while analysing the stabilized relative frequency distribution.

2. The Law of Large Numbers

2.1. A historical view of the Law of Large Numbers

We are exploring in this paper the possibility of introducing stabilized relative frequencies distribution as a mathematical activity, in coherence with the growth of the probabilistic thinking to mathematize the frequentist notion of probability due to the evolution of the ideas of Huygens, Bernoulli and Von Mises.

For Huygens, a prominent Dutch mathematician and scientist who lived in the 17th century, probability was not yet a number (Huygens, 1998). It was a collection of arguments (pros and cons) that could be used to weigh arguments. These arguments were related to decisions made in the context of playing games of chance with equally likely outcomes. From these arguments, Huygens derived the expected value of an event (Shafer, 1996). Huygens' philosophical disquisitions were crucial for Bernoulli when introducing probability as a number instead of an estimation of possibilities. Bernoulli derived a mathematical relation (a kind of convergence) between equal probabilities and the observed frequencies in the repetition of such games, which comprised the very first version of the "Law of Large Numbers".

It was Von Mises' (1964) disquisitions in other contexts, such as the sex of a new born in a population, that were crucial for considering not only individual events, but also the different outcomes of a distribution. Furthermore, this consideration of different events created the need of analysing variation and variability of these outcomes. Von Mises is considered to have played an influential role in the definition of probability. On his works underlie the analysis of the convergence on probability, but also the variability. He analyses the variability due to the density of the different outcomes, expressed by the frequencies, the tendencies and the intervals of confidence that gave sense to the convergence on probability when the number of observation increase.

Von Mises' (1928/51) axiomatic frequentist definition of probability has two main contradictions. In order to prove the "Law of Large Numbers", a definition of the theoretical value of probability, and a definition of the property of convergence of probabilities are needed. For Batanero, Henry and Parzysz (2005) this conception confuses model and reality. Von Mises (1964, pp. 45) understood this difficulty as unavoidable in mathematical science, arguing that: "the transition from observation to theoretical concepts cannot be completely mathematized. It is not a logical conclusion but rather a choice, which, one believes, will stand up in the face of new observations". In the ideas of Von Mises underlie a constructivist perspective about how probabilistic, statistical and mathematic thinking is organized, defined, and proved.

2.2. Tradition and innovation when introducing the Law of Large Numbers at school

Cognitivist researchers, such as Treffers (1987), introduce the idea of progressive mathematizing in terms of two types of mathematical activity- horizontal mathematizing and vertical mathematizing. Treffers describes horizontal mathematizing as "transforming a problem field into a mathematical problem" (p. 247). Horizontal mathematizing might include, but not be limited to, activities such as experimenting, pattern snooping, classifying, conjecturing and organizing. Those horizontal activities can be grounded in, and build vertical mathematizing, which encompasses activities such as reasoning about abstract structures, generalizing and formalizing.

Historically, the works of Huygens, Bernoulli and Von Mises can be thought of as a process of horizontal and vertical mathematizing of the frequentist notion of probability. This growth in probabilistic thinking construction might be transferred to education through the design of learning trajectories that enable students to be involved in horizontal and vertical mathematizing. For some statistics educators, horizontal mathematizing can be understood as the development of mathematical models (Drijvers, 2000). These educators view students' modelling process as going through multiple cycles of developing a mathematical model for a given problematic situation (Lesh & Doerr, 2006). Thus, in designing a learning trajectory to prove the law of large numbers, one should take into consideration the background about the historical evolution of the frequentist notion of probability and its implications in the learning process.

The differences between estimation and probability have been confusing when teaching probability. In the Spanish curricular design and its textbooks, this estimation is taken as the definition of the mathematical value (Chaput, Girard and Henry, 2011; Serradó, Cardeñoso and Azcárate, 2005). In some other countries, this dichotomy between experimental value estimated based on empirical models, and theoretical value based on probability distributions, has been tackled by opting for a modelling perspective, where probability is a theoretical value of the degree of confidence that one can give to a random outcome obtained by an observation of the stabilized relative frequency when the same random experiment is repeated a large number of times under the same conditions (Chaput, Girard, & Henry, 2011).

Some difficulties when proving the "Law of Large Numbers" were anticipated by Bernoulli. He dismissed context, arguing that most phenomena were perceived to be too complex to take context into account, and he derived mathematically a relation (a kind of convergence) between equal probabilities and observed frequencies in the repetition of an experiment (Borovnik & Kapadia, 2014). The frequentist approach does not provide the probability for an event when it is physically impossible to repeat an experiment under the same conditions, or a very large number of times (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005). In the school context, students are not usually asked to analyse if it is physically possible to repeat an experiment or not, due to the use of traditional random generators (dice, coins …) or the use of simulation tools constructed based on the theoretical model. We argue that, in order to overcome this obstacle, students should be confronted with situations or contexts in which the data generated is susceptible to be repeated under the same conditions in a statistical environment. In the analysis of context, one should have in mind reasoning about the population, the samples taken and the sampling process. In reasoning about samples and the sampling process, teachers and students should have in mind the difficulties involved in determining the minimum value of required sample size for accepting the estimated sample statistic as representative of the corresponding population parameter (sample representativeness). They should also be able to explain both the similarities, and differences between the estimated and the theoretical value of the probability.

Furthermore, Bernoulli's restriction to only equalprobable events still remains as a prevailing tradition in curricula using random equiprobable generators, where students can anticipate the theoretical value of probability through a classical: Laplacian model. Difficulties can arise again due to equiprobability bias, when distinguishing between the estimation and the theoretical value. In order to improve this situation, it could be useful to introduce students to a context in which the events are not equiprobable, or at least students have an intuition that they are not going to be equiprobable. From a statistical point of view, students should not only analyse an isolated repetition of an event, but should rather analyse the distribution of frequencies, understood as the aggregate properties of the data (Bakker & Gravemeijer, 2004).

The idea of distribution was still hidden in the arguments of Bernoulli, although it formed the basis of his proposed "Law of Large Numbers" (Borovnik & Kapadia, 2014). Von Mises (1928/51) describes the need for the analysis of the outcomes that describe a distribution, but also the variability of these outcomes. Conducted educational studies investigating the conceptual construction of the "Law of Large Numbers" and the concept of probability, inform us that, at the very minimum, an analysis of the following is required: (a) the variability of the results obtained when repeating an experiment, (b) the stability of the frequencies of the observed outcomes, and (c) the relation between the value of the limit of the frequencies, the distribution of possible outcomes, and the theoretical value of the probability (Yánez & Jaimes, 2013).

In sum, we understand these new claims of innovation, when introducing the Law of Large Numbers and the frequentist definition of probability, as: (a) the integration of probability within statistics, with a gradual evolution from informal to formal reasoning and thinking about data and chance to understand the four primary interpretations of probability (Chernoff & Sriraman, 2014), (b) an aggregate view of the data, that distinguishes between data as individual values and distribution as a conceptual entity (Bakker & Gravemeijer, 2004), in which the stabilized relative frequency distribution will help to connect between the real contexts and data to formally define probability distributions (Serradó, 2014), (c) data modelling as a powerful vehicle for illuminating students' learning potential (English, 2012), when involved in horizontal and vertical mathematizing activities, and (d) a growth in the understanding of concepts related to chance and data, in general, and of the Law of Large Numbers, in particular.

Although, the elements of innovation are described independently, we consider them as interconnected, and emerging from the need or evolution of each other. This is the reason why we consider that a learning trajectory might begin with reasoning about the aggregate view of data.

3. Stabilized relative frequency distribution framework (SRFD)

Bakker and Gravemeijer's (2004) theoretical framework allows analysing the relation between data and distribution in an informal way. The two authors examine aspects as centre, spread, density and skewness to structure the relationship between data (individual value), and distribution (conceptual entity). This structure can be read upward, from data to distribution, which is typical for novices in statistics; or, downward, from distribution to data, in which they use probability distributions to model data. From the two perspectives, we are interested in the upward approach, i.e. in how students organize numerical data as a frequency distribution that allows them to take an aggregate view of the data and to describe the distribution's shape, centre and spread (Konold & Kazak, 2008). For an accurate analysis of the cognition process developed when constructing the notion of distribution, we consider the framework developed by Ben Zvi, Gil and Apel (2007). They distinguish between reasoning about variability, distributional reasoning, reasoning about signal and noise, contextual reasoning, and graph comprehension. This framework provides the opportunity to think about the links when reasoning about distributions and variability, but it has omitted the links with sampling reasoning (Dierdrop et al., 2012). Furthermore, if we provide students with the opportunity to think about the variability of a distribution in a statistical modelling process of "growing samples", they might be able to construct the concept of stabilized relative frequency distribution.

In coherence with that aggregate view of data, we propose the Stabilized Relative Frequency Distribution Description Framework (SRFD), in which we describe theoretically the overarching statistical s and features of the distribution: contextual knowledge (population, sample, sample size, variable, interpretation, explanation…), distributional knowledge (shape, skewness, error, reliability, individual cases…), graph comprehension (decoding visual shape, unusual features, smoothing, comparing samples…), variability (spread, density, tendencies, intuitive confidence intervals) and signal and noise (centre, modal clumps).

The variability dimension of the SRFD framework includes both variability as the propensity for something to change, and variation as the description or measurement of this change (Reading and Shaughnessy, 2004). We use Shaughnessy’s (2007) artificial categorization about variability in data, among samples, from samples to samples’ distribution, from informal to formal inference to analyse the different kinds of reasoning about variability that students do when involved in a task about the stabilized relative frequency distribution.

4. Methodology

To answer the main question as to whether the task can help students to reason about variability when analysing the stabilized relative frequency distribution, we carried out a design-based research study of the task (e.g. Bakker & Gravemeijer, 2004). The task was constructed, refined and validated for developing reasoning on stabilized relative frequency distributions in the context of informal inferences (Serradó, 2014), and developing hypothetical thinking through four cycles of informal stochastical modelling (Serradó, 2014). The main question of the task, or real problem, was: “Can I guess which language my friend is speaking by only counting vowels?”. The problem generated three questions, fully described in previous work of the first author (e.g. Serradó, 2014), which allowed students to be involved in an informal modelling process.

We present in this paper two phases of the teaching experiment. The first phase took place in 2013 and lasted for 11 sessions of 60 minutes, while the second cycle was implemented in 2014 and lasted for 8 sessions of 60 minutes. The aim of the first phase was to validate and refine the task and the technological tools developed, and the possibilities that they provide students to conjecture. In the second phase, the validated task has been used to analyse the possibilities that it gave for students to develop an aggregate view of data, as the stabilized relative frequency distribution. In particular, in this paper we analyse students’ reasoning about the variability of the data.

Both phases of the study took place in a Grade 9 (ages 14, 15) classroom of Spanish Compulsory Secondary School in a low socioeconomic coast city. A total of 49 and 45 students participated in phases 1 and 2 of the study respectively, grouped in two classrooms A and B,. For each problem and cycle of modelling, the question was first presented to the whole class in order to collectively decide which statistical problem to pose. Next, Students were asked to individually hypothesize about the answer to the posed problem. Then, cooperatively in small-groups of four, students were asked to confront their hypothesis to promote a deliberative dialogue, which guided the successive cycles of investigation. Each group’s interpretations were presented to the whole-class in order to draw conclusions about the problem and to structure the components of the SRFD. These conclusions led to new problems, new cycles of modelling, and new methodological cycles of whole class discussion, individual reflection, small-group action, and whole class discussion. We videotaped the whole class discussions, collected individual and small group work samples, and conducted a small number (n=11) of individual interviews. The data was codified by the researchers using the SRFD framework, with the aim of investigating the relationships that students established between the distributional and variability elements.

5. Results and discussion

Previously to the first cycle of investigation, corresponding to the pseudo-modelling process, students were asked to draw their first conjectures, as a hypothesis about the answer of the problem: *"Is letter A the letter that appears most often in Spanish?"* All students (phase 1 and 2) agreed that letter A was the most frequent letter of the Spanish alphabet. We are interpreting this as an indication that students were able to draw hypothesis about the density of the data as a perception of the reality about the structure of the Spanish Language (Serradó, 2014b). We think that students undertaking this particular problem had an initial appreciation of the variability of the data, as a gestalt of the density of the vowel, that allowed them to reason "iconocally" as described by Watson & Kelly (2006).

Then, students were involved in the first cycle of investigation. Each team of students selected the sample - the kind of text and its size - analysed the data and compared the results of their investigation with their initial hypothesis about the relative appearance of letter "a". We can find differences on how the students reasoned about the similarities and differences between their hypothesis and the empirical results. Students considering the process of investigation as a manner to validate their hypothesis noted:

> We were right, that vowel "a" is the one most often used (phase 1, A21).

Meanwhile, other students thought that only one sample is inadequate to validate their hypothesis and argued:

> After the first investigation, we have thought that we should select another text to compare the results, and prove that letter "a" is still the one most used. We have to consider that the text selected has to have the same size of characters. With the results of this sample we have arrived to the conclusion that the letter that appears most often is still "a". However, the frequency of the vowels' appearance varies (Phase 1, B1).

These students are arguing about the variability of the data when comparing samples of the same size. We think that the selection of a second sample and its comparison has enabled them, as additive reasoners, as described by Watson & Kelly (2006), to argue about the variability of the data and to discuss the need of the variability of the sample.

But, for Francisco (phase 1, group A41), the first cycle of investigation does not give him enough information. He describes what he thinks that he has to improve his investigation:

> The precision of the data, because the samples have a lot of variability. The quantity of data analysed. The sample size is not adequately large. I think that the most important thing is that we are not able to analyse all the texts written in Spanish.

We interpret that the student reasons using his contextual knowledge about the samples of texts and the population to look for the reliability of the distribution. But, he is still not able to understand the variability due to the sampling process.

In the second cycle of investigation, students used the affordances of Geogebra to animate the bar graphs of the relative frequencies of appearance of each vowel in relation with the total number of characters of the text, with samples from 1 to 10000 characters (Serradó, 2014a). We can again find differences when decoding the visual shapes of the bar graphs. The analysis of the animation helped students of group A in phase 1 to reason about the relation between sample size, variability and the tendencies of the distribution of vowels. We highlight the description made by students of team A6, phase 1:

> The distribution of frequencies in relation with the sample size of characters has little variation because all the graphs are similar except from the first of 1261.

Using the classification introduced by Shaughnessy (2007), when conceptualizing about variability students tend to focus their attention on particular data values as pointers, as in this case in a very strange value. Furthermore, we consider these students' expression *"all the graphs are similar"*, as an indication that they have begun to move away from seeing data only as individual values that vary, to recognising that entire samples of data can also vary. Students are expressing variability among samples, which came from the analysis of the individual data to samples.Meanwhile, students of phase 1, group B and students of phase 2 looked for differences between variables:

> The differences between [the appearance of] A and E with respect at the number of characters is that the graph increases or decreases in relation with the other vowels" (Phase 1, group B2)

> The relative frequencies of vowels a and e, at the beginning, are more equal, but when the number of characters increases, letter e smoothens, while letter a increases, but finally all the frequencies evolve to the same rhythm. The relative frequency of "a" is approximately 0.12… and it is always around this value" (Phase 2, B3).

When using the expression "it is always around this value", we think that students are describing some kind of convergence to the estimated value. According to Watson and Kelly (2006), students' reasoning is predominantly proportional to conceptualize the variation about the expected value (Shaughnessy, 2007). Students have analysed both the variability of the data corresponding to the vowels, and the variability of the samples to describe the stabilization of the values, but they are still not able to describe the variability of the sampling distribution. If instead of a statistical analysis of students' reasoning, we analyse it from a probabilistic point of view, we can say that students are conjecturing about the expected value to which the samples converge, but still they do not make any reference to the sample.

Jonas (Phase 2, A5) concluded from the analysis of the tendencies that *"when increasing the sample size, the values of the variable vary"*. And, when the teacher interviewed him, asking if he was able to generalize the ideas he proposed, with the aim of provoking a vertical mathematization, he responded: *"Increasing the sample size, increases the values of each variable in relation with the horizontal axis approximately till 7000, at which point they seem to eventually stabilize"*. We consider that the student has attempted to balance sample representativeness with sample variability, with an initial proportional reasoning about the variability of the distribution. When the variation between or among a set of distributions is compared, the spectre of statistical significance arises. Theoretically, probability distributions emerge to help decisions about distributions of data, or about sampling distributions (Baker and Gravemeijer, 2004; Shaughnessy, 2007). In consequence, we think that the task has helped the student to develop his intuitions about the Law of Large Numbers, and it has provided him with background knowledge to define the axiomatic of frequentist definition of probability.

In the third cycle of investigation, when the student is analysing a second animation to compare three samples of texts and validate the model (Serradó, 2014a), he notes the following:

> "[sampling distribution] is varying till they stabilize from a specific sample size onwards. In the first sample, the value is 8000; in the second, 7500 and in the third, 6000" (Jonas, Phase 2, A5).

We think, that the student has been reasoning proportionally looking for the minimum value of sample size, at which there was a convergence of the distribution. The student has only informal intuitions about this convergence, but may be the task has given him the opportunity to reflect about the importance of sample size and sample representativeness. This, in turn, is going to help him in the future to understand the complex nature of formal inference.

6. Conclusions

The task employed in this study, has enabled students to reason statistically about the stabilized relative frequency distribution when solving the problem: "Which vowel is used most often in Spanish?" From a statistical point of view, the task was organized with the aim that the students develop an aggregate view of the data when counting the appearance of vowels on chains of characters. The theoretical framework introduced by Bakker and Gravemeijer (2004) has provided a tool for structuring the relationships between data (individual values), and distribution (conceptual entity). We consider the stabilized relative frequency distribution as a conceptual entity to be analysed prior to the introduction of the Law of Large numbers. This aggregate view has provided the SRFD description framework, including, among others, a dimension that analyses students' descriptions and reasoning about variability.

We have used the artificial categorization introduced by Shaughnessy (2007) to analyse how students reason about the variability in data, among samples, and from samples to distribution. The problem posed and its contextual analysis has provided students with a gestalt of the density of the vowel, reasoning iconically about the variability of the data. In the first cycle of investigation, corresponding to a pseudo-modelling process, students have been reasoning, as additive reasoners, about the variability of the data when comparing samples of the same size. Furthermore, their engagement with the task has prompted the need for them to understand variability due to the sampling process.

In the second cycle of investigation, a modelling process, we have used the affordances of Geogebra to decode the visual shapes of the bar graph. Some students have described contextual aspects such as the sample size and distributional aspects such as the tendencies, and also conceptualized about variability, focusing their attention on particular data vales. Students have begun to move away from seeing data as individual values that vary, to recognising the variability among samples. Students with a proportional reasoning have been able to conceptualize the variation about the expected value, reasoning about the variability of the data corresponding to the vowels as variables and the variability of the samples to describe the stabilization of the values. When trying to generalize the ideas about stability, sample variability and sample representativeness, an initial proportional reasoning about the variability of the distribution has appeared. In the third cycle of investigation, when validating the model through decoding and comparing samples, students were able to reason about the variability of the sampling distribution.

From a probabilistic point of view, we think that the task has helped students to develop their informal reasoning about the Law of Large Numbers. They have been reasoning about the value in which the distribution approximately stabilized, giving them the sense of the need of estimating this value. Furthermore they have been reasoning about the minimum size of the sample that gave sense to the stabilization of the distribution. The modelling process proposed in the task has allowed the students to investigate about density, looking for patterns when analysing the variability and stability of the relative frequencies, and conjecturing about the value estimated in which the distribution stabilized. But, when the students were asked to generalize their conjectures, they were involved in vertical mathematizing of the frequentist notion of probability. The horizontal and vertical mathematizing has allowed linking students' real life experiences to sustainable representations of probability integrated within statistics.

References

Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. (2004). Learning to reason about distributions. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield, *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147-168). Dordrerch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Dordrecht: Kluwer.

Ben Zvi, D., Gil, E., & Apel, N. (2007, August 11-17). What is hidden beyond the data? Helping young students to reason and argue about some wither universe. *Paper presented at the Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy (SRTL-5).* UK: University of Warwich.

Borovnik, M., & Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives* (Advances in mathematics Education ed., págs. 7-34). Dordrecht: Springer.

Chaput, B., Girard, J.-C., & Henry, M. (2011). Frequentist approach: modelling and simulation in statistics and probability teaching. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school. mathematics-challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study*. (pp. 85-96). Dordrech: Springer.

Chernoff, E. J., & Sriraman, B. (2014). Commentary on probabilistic thinking: presenting plural perspectives. En E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Edits.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education Series* (pp. 721-727). Dordrecht: Springer.

English, L. D. (2012). Data modelling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics* (81), 15-30.

Dierdrop, A., Bakker, A., van Mannen, J., & Eijkelhof, H. (2012). Supporting students to develop concepts underlying sampling and to shuttle between contextual and statistical spheres. In D. Ben Zvi, & K. Makar (Eds.), *Teaching and Learning of Statistics. Topic Study Group 12. 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12),* (pp. 249-258). COEX, Seoul, Korea.

Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* , 189-209.

Huygens, C. (1998). *Du cacul dans les jeux de hazard [The calculus in games of chance]*. In (Euvres coplètes, t. 14, La Haye, 1888-1950. (Original work Ratiocinnis in Aleae ludo, published 1657).

Konold, C., & Kazak, S. (2008). Reconnecting data and chance. *Technology Innovations in Statistics Education, 2* (1).

Lesh, R., & Doerr, L. M. (2006). Symbolizing, communicating, and mathematizing: key components of models and modelling. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design.* USA: Routledge.

Mises, R. (1928/51). *Wahrscheinlinckeit, Statistik und Wahrheit.* Berlin: Springer.

Mises, R. *Mathematical theory of probability and statistics.* New York: John Wiley.

Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In J. Garfield, & D. Ben-Zvi (Edits.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Serradó, A. (2014a). Constructing, refining and validating a task for developing reasoning on stabilized relative frequency distributions in the context of informal inferences. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Ed.), *Sustainability in statistics education Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014).* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Serradó, A. (2014B, from 21th to 25th of July). Developing hypothetical thinking through four cycles of informal stochastical modelling. In G. Aldon (Ed.), *Pre-proocedings CIEAEM 66* (pp. 104-109). Lyon: Institute Français de l' Éducation.

Serradó, A., Cardeñoso, J. M., & Azcárate, P. (2005). Obstacles in the learning of probabilistic knowledge: influence from the textbooks. *Statistics Education Research Journal, 4* (2), 59-81.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., & NCTM.

Shafer, G. (1996). The significande of Jacob Bernoulli's Ars conjectandi for the philosophy of probability today. *Jounal of Econometrics* (75), 15-32.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Yánez Canal, G., & Jaimes, E. (2013). Efectos de la simulación en la comprensión de la ley de los grandes números. *Revista de Integración , 31* (1), 69-89.

Watson, J. M., & Kelly, B. A. (2006). Expectation versus variation: Students' decision making in a sampling environment. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Teaching Education, 6, 145-166.* , 145-166.

Un estudio de género de los profesionales de estadística

Cobo Rodríguez, Beatriz[1], *Molina Muñoz, David*[2]

[1]beacr@ugr.es, Universidad de Granada
[2]dmolinam@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

La discriminación de la mujer en el mercado laboral siempre ha estado presente. A pesar del incremento en las últimas décadas del acceso de las mujeres a la ciencia, en general, las mujeres representan una minoría de los investigadores del mundo.

En este artículo, nosotros mostraremos algunos resultados de un estudio de análisis de género para conocer la situación de la mujer dentro del colectivo de investigadores y personal docente de las universidades andaluzas.

Concretamente este estudio se realizó para las diferentes comunidades autónomas españolas y para los profesionales de la rama de conocimiento de Estadística e Investigación Operativa, y después fue generalizado con el resto de áreas obteniendo un caso general.

Hemos calculado el total de PDI, el total del cuerpo docente, y distinguiendo al cuerpo docente según categoria. También hemos realizado una estadística descriptiva básica que incluye algunos indicadores de género usuales en la literatura relacionada con este tipo de estudios (brecha de género, índice de feminización, índice de concentración e índice de distribución).

Palabras clave: Discriminación, Mujer, Género, Estadística.

1. Introducción

La desigualdad laboral acompaña a las mujeres desde que tienen edad para incorporarse al mercado de trabajo hasta que lo abandonan.

El tema de la discriminación laboral por razones de sexo es, sin lugar a dudas, una de las materias importantes del último tiempo en relación con la cada vez mayor incorporación de la mujer al trabajo, el origen de la misma está ligado al hecho de que la condición femenina incide sobre las prestaciones de trabajo fundamentalmente a causa de la maternidad y sus derivaciones.

En este escenario, la crisis, la reforma laboral y las políticas de recortes sólo han contribuido a ensanchar aún más esta brecha. A pesar de que, al principio, la destrucción de empleo fue más notable entre los hombres, ellas continúan teniendo mayores tasas de paro, menores tasas de ocupación y de actividad y condiciones laborales más precarias.

Para mostrar algunos de los resultados del estudio utilizamos una serie de indicadores de género, que explicaremos con detalle a continuación:

- Brecha de género: diferencia de tasas o porcentajes femeninos y masculinos en la categoría de una variable. Cuanto menor sea la brecha, más cerca estará de la igualdad. Valores negativos indican que la diferencia es a favor de los hombres.
- Índice de feminización: representación de las mujeres con relación a los hombres en la categoría de una variable. Se calcula dividiendo el número de mujeres entre el de hombres. Los valores por encima de uno son indicadores de feminización.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 425-430). Granada, 2015.

- Índice de concentración: porcentaje con relación a su grupo sexual o porcentaje intra-sexo (tomando como referencia cada uno de los sexos por separado). Cuando el resultado es positivo da información intra-sexos (útil para ver la distribución de cada sexo entre las categorías de una variable). En el caso de ser negativo, no informa sobre la relación entre sexos.
- Índice de distribución: porcentaje de un sexo con relación al otro (inter-género). Cuando el resultado es positivo da información intersexo (útil para ver las diferencias entre los sexos en una categoría). En el caso de ser negativo, no aporta información sobre la distribución global.

Aunque los indicadores utilizados en el análisis ilustran la situación de manera meramente descriptiva y quizá a priori no pueden determinarse las causas por las que existe o no inequidad de género, ya son suficientes para deducir la presencia de disparidades en lo que se refiere al personal docente e investigador de las universidades públicas andaluzas.

2. Universidades públicas de Andalucía

2.1. Total de PDI

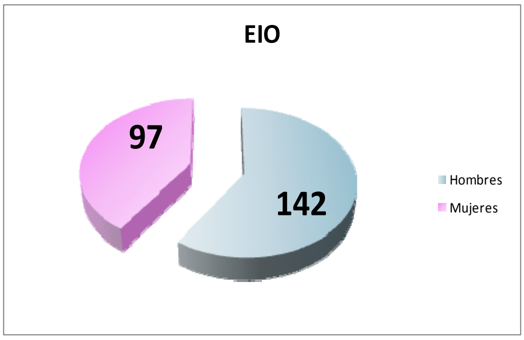


Gráfico 1. EIO

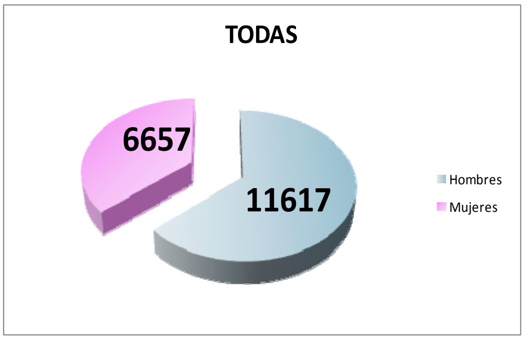


Gráfico 2. Todas

2.2. Total de cuerpo docente

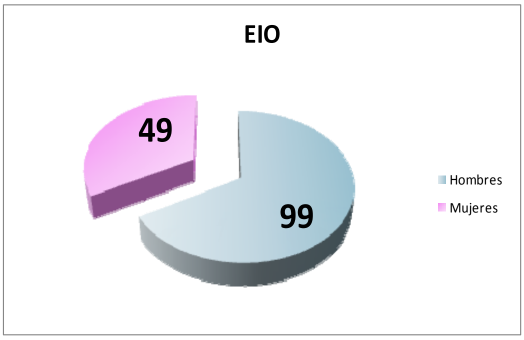


Gráfico 6. EIO

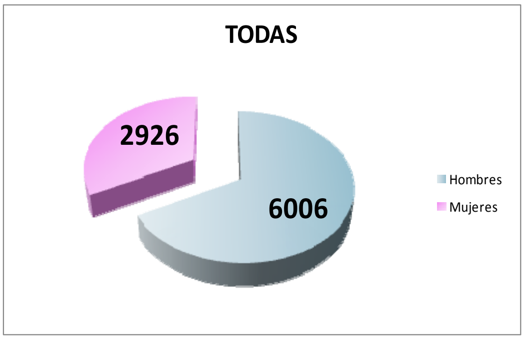


Gráfico 7. Todas

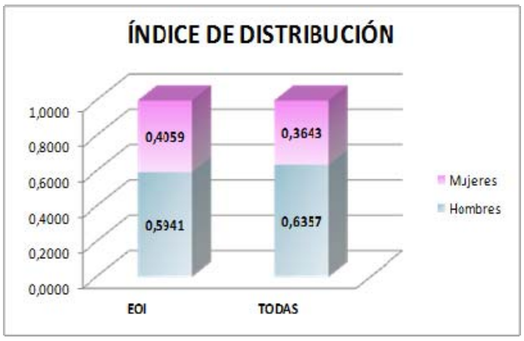


Gráfico 3. Índice de distribución

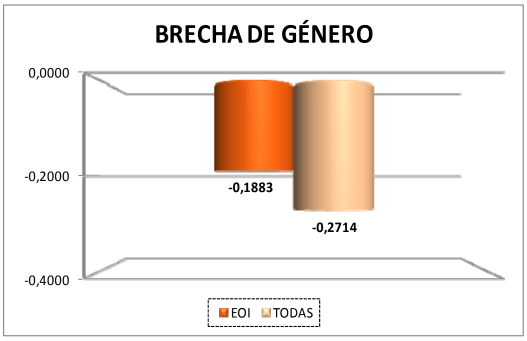


Gráfico 4. Brecha de género

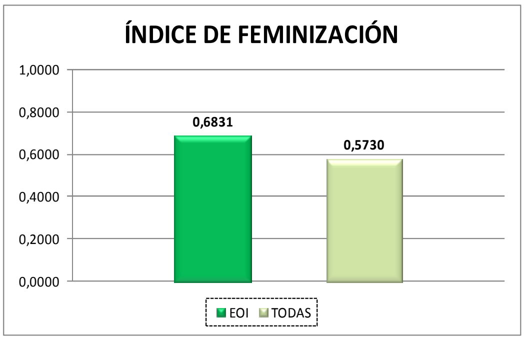


Gráfico 5. Índice de feminización

Observese en Andalucía que de los profesionales de EIO la mayoría son hombres, aunque la diferencia no es tan acusada como en el caso general. Esto también lo podemos ver reflejado con el índice de distribución.

La brecha de género negativa nos indica que la diferencia es a favor de los hombres, encontrando aún mayor diferencia en el caso general. Con el índice de feminización observamos lo mismo, al tener en el caso general un menor valor.

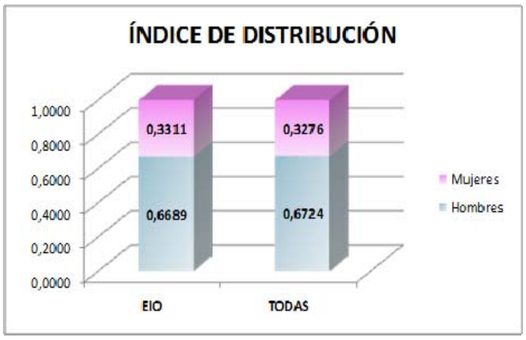


Gráfico 8. Índice de distribución

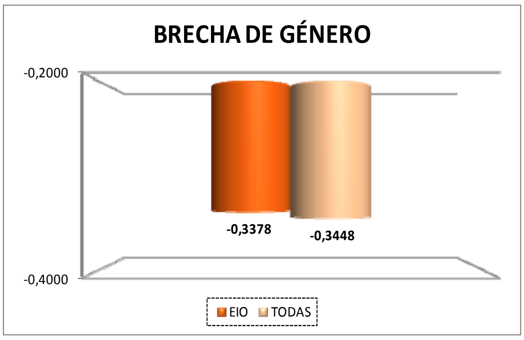


Gráfico 9. Brecha de género

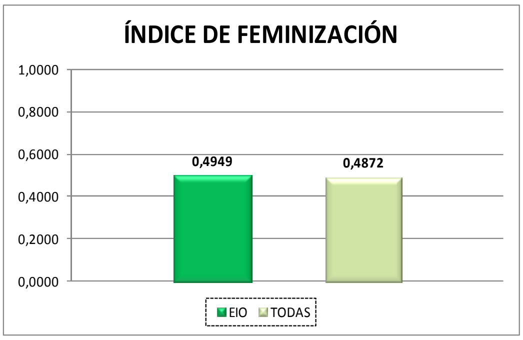


Gráfico 10. Índice de feminización

Analizando de manera aislada al cuerpo docente, se observa que el número de hombres supera al de mujeres, tanto en los profesionales de EIO como en el caso general.

En este caso las brechas de género son más pronunciadas, aunque la diferencia entre el área de EIO y el resto se ve bastante reducida. El índice de feminización menor que uno indica el mayor número de hombres, pero en este caso los valores son bastante parecidos para la EIO y el general.

2.3. Cuerpo Docente respecto a las categorías (Catedrático de Universidad, Titular de Universidad, Catedrático de Escuela Universitaria y Titular de Escuela Universitaria)

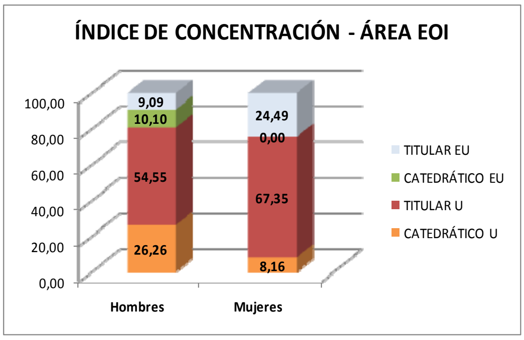


Gráfico 11. Índice de concentración (EIO)

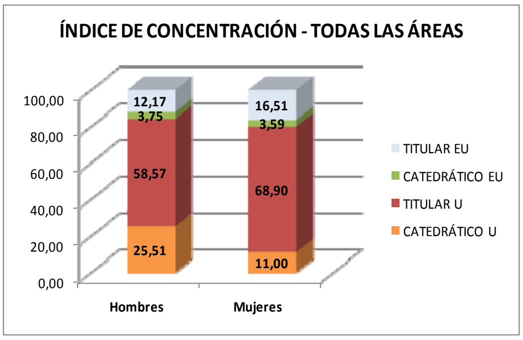


Gráfico 12. Índice de concentración (Todas)

Según el índice de concentración de ambas gráficas podemos ver que lo más frecuente es la alta concentración en la categoría de Titular de Universidad. En el área de EIO, puede decirse que el colectivo masculino se distribuye de manera más homogénea que el femenino. Hay que destacar que en el caso femenino nos encontramos con un porcentaje del cero por ciento en la categoría Catedrático de Escuela Universitaria.

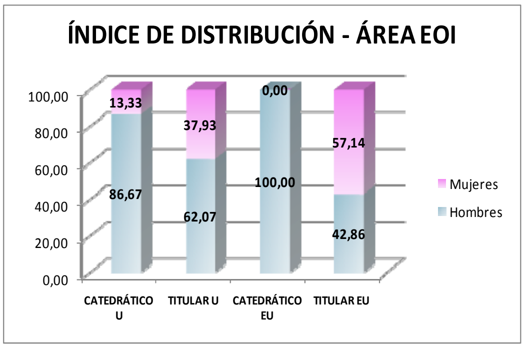


Gráfico 13. Índice de distribución (EIO)

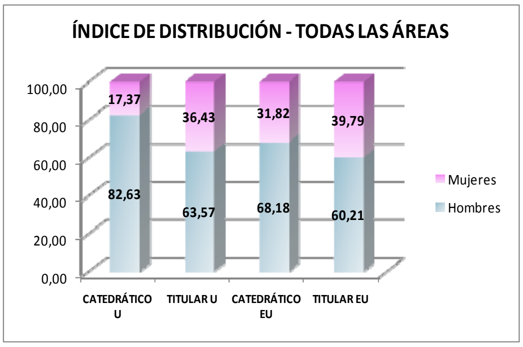


Gráfico 14. Índice de distribución (Todas)

Según el índice de distribución las mujeres son minoría en todas las categorías salvo en el caso de los profesionales de EIO de la categoría de Titular de Escuela Universitaria, donde representan una ligera mayoría. Destaca también dentro de esta área de conocimiento la categoría de Catedrático de Escuela Universitaria, representada en su totalidad por hombres.

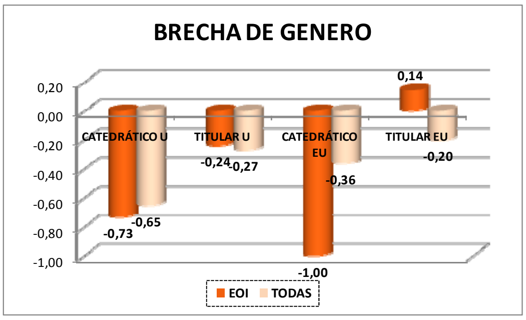


Gráfico 15. Brecha de género

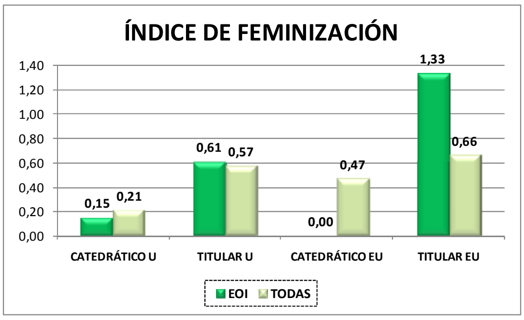


Gráfico 16. Índice de feminización

En cuanto a la brecha de género, se tiene que ésta es siempre negativa exceptuando el caso de los Titulares de Escuela Universitaria del área de EIO. Puede observarse también como en este caso el índice de feminización es superior a la unidad (1.33), por lo que en este caso se tiene una situación de feminización dada por la mayoría de mujeres que integran este colectivo y que quedan más altamente concentradas dentro de esa categoría.

2.5. Evolución temporal del área de Estadística e Investigación Operativa

Basándonos ahora en total de universidades públicas españoles, se presenta la evolución temporal de los índices de feminización totales del área de estadística referidos a los tres últimos cursos académicos.

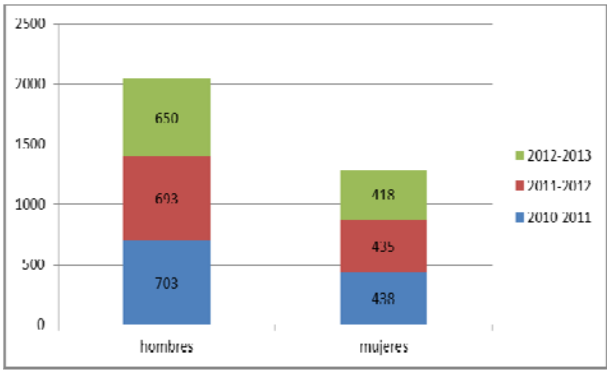


Gráfico 17. Evolución EIO

Como podemos ver a lo largo de los años el número de mujeres sigue siendo inferior al de los hombres.

3. Conclusiones

En base a los resultados obtenidos, puede concluirse que las mujeres se encuentran en una posición desfavorable en lo que se refiere al personal docente e investigador y total del cuerpo docente de las universidades públicas andaluzas.

Teniendo en cuenta el estudio completo, en la totalidad de las comunidades autónomas españolas analizadas, el personal es en su mayoría masculino, si bien en algunas comunidades dicha mayoría es menos acusada.

Sin distinguir por área de conocimiento, la mayoría masculina más pronunciada se da en las universidades públicas de las comunidades de Cantabria y de la Región de Murcia. En Castilla y León, País Vasco y La Rioja es quizá donde la minoría femenina no es tan pronunciada, aunque sigue siendo notable.

En cuanto al área de Estadística e Investigación Operativa, los resultados derivados del análisis son bastante similares a los generales, aunque hay que destacar que en las comunidades autónomas de Navarra y País Vasco, este grupo de personal está feminizado. Además, se tiene una situación de perfecta equidad en Asturias y La Rioja.

Es bastante destacable la gran brecha de género existente dentro de la categoría de Catedrático de Universidad, donde la inmensa mayoría son hombres. También, se puede deducir de los resultados una concentración femenina superior a la masculina dentro de las escuelas universitarias.

Por último destacar que esta situación de desigualdad de género se mantiene similar en los últimos años, no observándose una tendencia clara en la dirección a la equidad.

Referencias

Estadística de personal de las universidades (EPU). Los datos para el estudio han sido descargados de la página del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte http://www.mecd.gob.es/educacion-mecd/areas-educacion/universidades/estadisticas-informes/estadisticas/personal-universitario.html

Una experiencia de evaluación continua que mejora los resultados finales

Catalina García[1], *María del Mar López Martin*[2] *y Román Salmerón* [3]

[1]cbgarcia@ugr.es, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Granada
[2]mariadelmarlopez@ugr.es, Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada
[3]romansg@ugr.es, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Granada

Resumen

El reto de una evaluación continua que nos imponía el EEES ha quedado limitado por la realidad de la puesta en práctica de los nuevos grados que siguen reuniendo a un gran número de estudiantes. En este trabajo se propone una evaluación que combina la evaluación sumativa con la formativa presentando una evaluación mixta, realista y operativa dadas las características de los grupos de docencia con los que nos encontramos a la hora de impartir la asignatura. Concretamente el sistema consiste en evaluar con el 70% la nota obtenida en el examen final y con el 30% la realización de tipo test sorpresa y trabajos mediante ordenador. Se ha analizado si estas técnicas son eficientes mediante un análisis de regresión lineal que nos permite concluir que efectivamente las técnicas aplicadas conducen a una mejor nota en la prueba final.

Palabras clave: Evaluación continua, EEES, Regresión lineal.

.

1. Introducción

Todo proceso de formación requiere ser evaluado para analizar si se han conseguido los objetivos propuestos. De acuerdo con Jiménez (2002), la evaluación se concibe como: "*un proceso continuo, ordenado y sistemático de recogida de información cuantitativa y cualitativa, que responde a ciertas exigencias, obtenida a través de diversas técnicas e instrumentos, que tras ser cotejada o comparada con criterios establecidos nos permite emitir juicios de valor fundamentados que facilitan la toma de decisiones que afectan al objeto evaluado*"

Dependiendo del objeto de la evaluación se puede distinguir entre evaluación inicial que permite adecuar la programación docente a los conocimientos de los alumnos, la evaluación formativa que aporta información sobre las dificultades que aparecen en el proceso de aprendizaje y permite acciones correctoras que permite valorar los conocimientos finales y certificar los logros obtenidos, Teixido (2009).

Consideramos que al evaluar a los alumnos todos estos objetivos están presentes. Necesitamos tener información para diseñar la programación, tener medidas que nos permitan subsanar las posibles dificultades que los alumnos puedan encontrar en el proceso de aprendizaje y establecer la calificación correspondiente que ha de reflejar el grado de aprovechamiento que el alumno ha realizado de las enseñanzas transmitidas. La evaluación debería ser un elemento motivador para los estudiantes, puesto que refleja si el propio alumno ha alcanzado el nivel de formación adecuado. Sin embargo, la evaluación tiene a menudo una mala imagen ya que tiende a asociarse evaluación con examen, ya que este es el procedimiento que generalmente se aplica para evaluar a los estudiantes.

El profesor Novales (2009) considera que el sistema de evaluación debe:

1. Discriminar lo antes posible a aquellos estudiantes que no quieran o no estén en condiciones de realizar el esfuerzo preciso para aprender los conceptos de la asignatura.

2. Detectar las carencias y limitaciones analíticas o conceptuales de los estudiantes que lo intentan, de modo que se puedan organizar sesiones de tutoría sobre temas específicos.

3. Calificar de manera diferenciada a los estudiantes que siguen el programa de trabajo establecido.

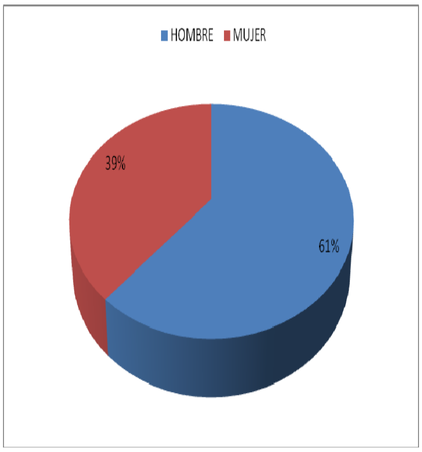
Parece evidente que un examen final no puede satisfacer estas condiciones. En la misma línea, Rue (2007) afirma que "*las modalidades de evaluación final, si bien son necesarias en su función acreditadora, se muestran insuficientes para orientar a los estudiantes en el curso de su trabajo o de actividad de aprendizaje*". Incluso el profesor

Novales (2009) considera que el método de evaluación tiene una importancia fundamental y que "*solo un procedimiento de evaluación continua es consistente con un aprendizaje sólido que debe basarse en un estudio continuado*" e, incluso considera que "*bajo ciertas condiciones, el examen final es prescindible*".

Sin bien es evidente que una evaluación individualizada y continua será la situación ideal, el gran número de estudiantes por clase imposibilita en la mayoría de los casos una evaluación de este tipo, y se termina recurriendo al típico examen. Entendemos, sin embargo, que el examen no debe ser la única herramienta evaluadora, ya que al profesor le es útil controlar en qué medida se van asimilando los conocimientos a través del curso. Nuestra propuesta de evaluación combina la evaluación sumativa con la formativa presentando una evaluación mixta, realista y operativa dadas las características de los grupos de docencia con los que nos encontramos a la hora de impartir la asignatura. Concretamente el sistema consiste en evaluar con el 70% la nota obtenida en el examen final y con el 30% el trabajo realizado durante el curso. Este trabajo continuo ha sido evaluado mediante la realización de tipo test sorpresa y la realización de trabajos mediante ordenador. El objetivo del presente trabajo es analizar si estas técnicas son eficientes y si un mejor resultado podría llevar a un mejor resultado en el examen final.

2. Método

Se han recogido datos sobre 186 alumnos que se han presentado al examen final de las asignaturas Técnicas Cuantitativas I (33%), Técnicas Cuantitativas II (35%) y Econometría (32%) en los distintos grados de los que el 39% era mujer y el 61% hombre. Véase Figura 1. Se ha realizado un análisis de regresión tomando como variable dependiente la nota del examen evaluado sobre 7 y como variables independientes la nota obtenida en el tipo test valorado sobre 1,5 puntos (Nota_Tipo_Test), la nota del trabajo en ordenador valorado sobre 1,5 puntos (Nota_Ordenador), el género (Genero toma valor 1 si el individuo es hombre) y la asignatura (DAsignatura_1 toma valor 1 para Técnicas Cuantitativas I y cero para el resto y DAsignatura_2 toma valor 1 para Técnicas Cuantitativas 2 y cero para el resto). En la Tabla 1 se presentan los principales estadísticos descriptivos de las variables cuantitativas.



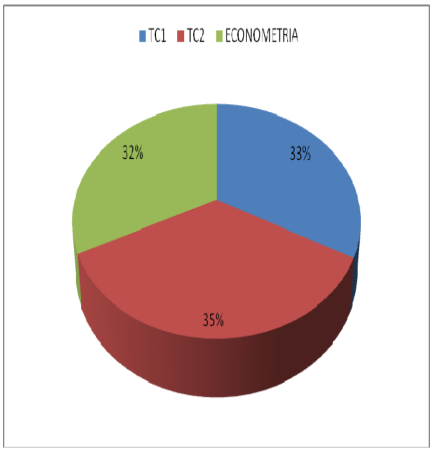


Figura 1. Distribución de la muestra por género y asignatura.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos básicos de las variables de estudio

	Media	Mediana	Mínimo	Máximo	Desv. Típica	C.V.
Examen	3.6229	3.6750	0	7	1.7395	0.48014
Nota_Tipo_Test	0.85127	0.9	0	1.5	0.35408	0.41594
Nota_Ordenador	1.0781	1.2563	0	1.5	0.47212	0.43792
Pontevedra						

3. Resultado

Una vez realizado el ajuste del modelo usando el programa informático *Gretl*, se comprueba que el modelo es globalmente significativo y además todas las variables también son individualmente significativas. El coeficiente de determinación presenta un valor de 0.451145 que consideramos moderadamente bueno teniendo en cuenta que se trata de un modelo con datos reales. Véase Figura 2.

```
Dependent variable: Examen

                   coefficient   std. error   t-ratio   p-value
  ---------------------------------------------------------------
  const              2.41670      0.528501      4.573    8.93e-06 ***
  Nota_Tipo_test     2.74325      0.507806      5.402    2.06e-07 ***
  Nota_Ordenador     0.703651     0.362520      1.941    0.0538   *
  DAsignatura_1     -1.38449      0.404964     -3.419    0.0008   ***
  DAsignatura_2      0.979329     0.409874      2.389    0.0179   **
  Genero            -0.576524     0.284153     -2.029    0.0439   **

Mean dependent var   5.175565   S.D. dependent var   2.484988
Sum squared resid    627.0150   S.E. of regression   1.866391
R-squared            0.451145   Adjusted R-squared   0.435899
F(5, 180)            29.59111   P-value(F)           7.21e-22
Log-likelihood      -376.9384   Akaike criterion     765.8768
Schwarz criterion    785.2312   Hannan-Quinn         773.7199
```

Figura 2. Salida de Gretl con el ajuste del modelo.

4. Conclusión

En la experiencia presentada se ha llevado a cabo un sistema de evaluación que combina la realización de exámenes con un seguimiento continuado del estudiante en que se recoge información sobre el trabajo individual que ha realizado, de manera que tanto el profesor como el alumno tengan información sobre la marcha del proceso formativo antes de que analice y así poder adoptar las medidas correctivas correspondientes en caso de que se produzcan desviaciones en relación con los resultados esperados.

Estos resultados nos permiten concluir que existe relación entre la nota obtenida en la evaluación continua y la nota obtenida en la evaluación final. Además, parece que la nota del tipo test influye más en la calificación final del examen por lo que se confirma su utilidad como herramienta para evaluar el trabajo continuo.

Referencias

Jimenez, B. (2002). Diseño y desarrollo de los procesos de enseñanza: evaluación. Enseñanza, profesores y universidad. Tarragona, URV.

Novales, A. (2009). La enseñanza de la econometría en el espacio europeo de educación superior. *I Jornadas de docencia de Econometría*. Universidad de Granada, 262-265.

Rue, J. (2007). *Enseñar en la Universidad*. Narcea.

Teixido, J. (2009). Ideas e instrumentos para la evaluación continúa del alumnado. *Jornadas de Formación del profesorado de la Facultad de Económicas de la UCLM.*

Posters

Segundas Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Aplicaciones de estadística: Estimación de las provisiones técnicas en seguros no vida mediante R

Jorge Segura Gisbert

jorge.segura@actuarios.org, Universidad de Córdoba

Resumen

Un aspecto esencial para la evaluación de la condición financiera de una compañía de seguros generales, es la estimación correcta de la provisión de prestaciones. Así, se establece el cálculo del pasivo necesario para hacer efectivo el pago de las reclamaciones pendientes. Todo ello se engloba en la rama de la Estadística Actuarial No Vida presente en los planes de estudio de cualquier Máster en Ciencias Actuariales y Financieras.

Para estimar la provisión es necesario asumir que la experiencia histórica se puede emplear para proyectar el futuro. En este sentido, existe una amplia variedad de métodos de estimación proporcionando a menudo cantidades distintas de reservas necesarias. Como génesis de la estimación, se deberá realizar un análisis exhaustivo de los datos para seleccionar el método más idóneo para la segmentación homogénea de los grupos de riesgo. La importancia del cálculo del pasivo queda reflejada con la aprobación de la Directiva Europea 2009/138 de Solvencia II, donde supone un avance en la revisión de las actuales normas de supervisión de las compañías de seguros adoptando una visión totalmente opuesta a la normativa vigente mediante un enfoque basado en el riesgo.

En este trabajo, nos centramos en la utilización de software libre para el correcto cálculo de la provisión de prestaciones. Las ventajas son evidentes, existiendo la posibilidad de utilizar métodos de estimación (deterministas y estocásticos) con un coste ínfimo para los usuarios potenciales.

Palabras clave: Software libre, Chain Ladder, Provisión de prestaciones.

.

Aplicaciones de estadística: Estimación de las provisiones técnicas en seguros no vida mediante R

Segura Gisbert Jorge
Universidad de Córdoba
Departamento de Estadística, Econometría, IO, Organización de Empresas y Economía Aplicada

OBJETIVOS

En este trabajo, se propone el estudio del cálculo de la provisión de prestaciones pendientes, englobado en la rama Estadística Actuarial No Vida mediante el software libre "R". En este sentido se persigue:

Estimación de las provisiones para prestaciones para la evaluación de la condición financiera de una Entidad Aseguradora.

Gestión basada en el riesgo en línea con la Directiva Europea 2009/138 de Solvencia II.

Protección del asegurado y tomadores de contratos de seguros. Correcta estimación de los compromisos adquiridos.

INTRODUCCIÓN

Una provisión para prestaciones es un pasivo de una entidad aseguradora dotado para hacer frente a las reclamaciones pendientes, es decir, el pago de los siniestros y los gastos asociados a los mismos. Para este proceso, se tiene en cuenta:

Correcto tratamiento de los datos en grupos homogéneos de riesgo mediante segmentación por líneas de negocio.

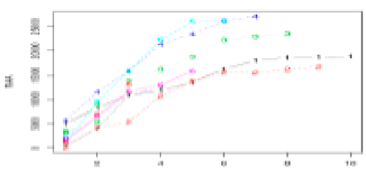
Exploración y análisis de los datos para la identificación de anomalías.

Aplicación de las técnicas de estimación adecuadas. Contraste de los resultados obtenidos mediante la utilización de varios métodos.

Los métodos se clasifican en dos grupos: Deterministas y Estocásticos. Para el primer caso se realiza una estimación puntual de la reserva. Para el segundo, los métodos estocásticos construyen la distribución estimada de la provisión.

La información viene recogida en triángulos de liquidación o desarrollo de siniestros.La fila del triángulo representa el año de ocurrencia, mientras que la columna los años de desarrollo. Pueden aplicarse sobre distintas magnitudes, utilizando el mismo formato de presentación de los datos: Importe y número de siniestros.

	0	1	......	n−1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	......	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	......	$C_{1,n-1}$	
......	......	......	......		
n−1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$			
n	$C_{n,0}$				



El PAQUETE CHAIN LADDER EN R

El paquete ChainLadder en R ofrece varios métodos estadísticos de amplia utilización de la provisión de siniestros en seguros generales. La implantación proporciona una serie de ventajas entre las que destacamos:

Interfaces con MS Excel. Software libre.

Tratamiento de la información para una correcta identificación de los patrones de desarrollo de la siniestralidad. Posibilidad de obtener triángulos de datos incrementales y acumulados en función del método utilizado.

Existencia de código abierto para la mejor comprensión, aprendizaje y transferencia del conocimiento.

Importación de la información desde otras fuentes. Excelente entorno gráfico.

MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

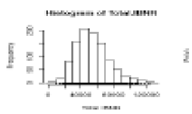
El citado paquete contiene diversos métodos de amplia difusión en el mercado asegurador:

Método Chain Ladder. Se calculan los factores de desarrollo para cada año de ocurrencia. Se proyecta la historia de un grupo de reclamaciones con características similares.

Distribución Libre de Mack. Estima la desviación típica de la reserva estimada. Grado de incertidumbre de los datos.

Modelos Lineales Generalizados (GLM). Variable explicativa y transformación de la variable respuesta.

Métodos de remuestreo. Boostrap. Aplica un algoritmo numérico de simulación.



REFERENCIAS

Markus Gesmann, Dan Murphy and Wayne Zhang. ChainLadder: Mack, Boostrap and Munich-Chain Ladder, methods for insurance claims reserving, 2014 R-Package version 0.1.8.

C. Dutang, V.Goult and M.Pigeon: An R package for actuarial science. Journal of Statistical Software ,25 (7),2008.

Durán Santomil, P y Otero González, L (2010): El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II.

Aprendendo o teste t de Student com o uso de girocópteros

Elisa Henning[1], Marcelo Savio Ramos[2], Rafael Tsuyoshi Sato[3] y Luciane Mulazani dos Santos[4]

[1]elisa.henning@udesc.br, Universidade do Estado de Santa Catarina
[2]marcelo.savio.ramos@gmail.com, Universidade do Estado de Santa Catarina
[3]rafael.sato@gmail.com, Universidade do Estado de Santa Catarina
[4]luciane.mulazani@gmail.com, Universidade do Estado de Santa

Resumen

Este trabalho apresenta uma prática pedagógica aplicada para o ensino de teste de hipóteses em turmas de graduação. A atividade foi realizada na disciplina de Probabilidade e Estatística em turmas de graduação durante o ano 2014, e pressupõe atividades lúdicas envolvendo a utilização de girocópteros de papel. O objetivo foi propiciar aos alunos um cenário real para a compreensão de teste de hipóteses, abrangendo a experimentação, a formulação de hipóteses, o processo de medição, a análise exploratória dos dados, a verificação das suposições necessárias, a aplicação do teste t de Student e o debate sobre os resultados e limitações observadas. A prática é uma adaptação da proposta de Box (1992), que aplicou girocópteros para ensinar DOE (Planejamento de Experimentos) para estudantes de engenharia. A ideia básica era a construção de um girocóptero de papel analisa-se o tempo de voo deste, buscando-se uma maior de permanência no ar. Com isto em mente, perguntou-se aos alunos se o tamanho da asa poderia influenciar no tempo de voo de um girocóptero. Assim foram formuladas as hipóteses. Os alunos construíram os girocópteros, com dois tamanhos da asa; lançaram e anotaram os tempos de vôo. Toda a análise estatística foi realizada com auxílio do software R (R Core Team, 2014). Os resultados foram apresentados e discutidos em fórum específico no Moodle. Ressalta-se que os alunos haviam previamente estudado o conteúdo de teste de hipóteses. Algumas limitações levantadas pelos alunos referem-se à forma de lançamento do girocóptero e ao processo de medição. No que tange à verificação da efetividade da atividade proposta, em avaliação escrita posterior à execução do trabalho, foram aplicadas questões similares ao problema do experimento. Os alunos, na grande maioria, acertaram as questões relativas ao teste t. Do ponto de vista qualitativo, experimentos como este, criam um ambiente melhor para o processo ensino-aprendizagem, indo além das aulas expositivas e resolução dos exercícios propostos nos livros didáticos, além de contribuir para maior interação da turma com o professor e entre os próprios alunos.

Palabras clave: Teste de Hipóteses, Atividade lúdica, Ensino de Estatística.

Referencias

Box, G. (1992) Teaching Engineers Experimental Design with a Paper Helicopter. *Quality Engineering*, 4(2), 453-459, 1992.

R CORE TEAM. 2014. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: http://www.r-project.org

Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas

Aprendendo o teste t de Student com o uso de girocópteros

Elisa Henning[1], Marcelo Savio Ramos[2], Rafael Tsuyoshi Sato[3], Luciane Mulazani dos Santos[4]

Introdução

Este trabalho apresenta uma prática pedagógica aplicada para o ensino de teste de hipóteses em turmas de graduação.

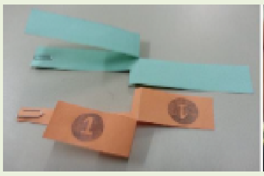
A atividade foi realizada na disciplina de Probabilidade e Estatística em turmas de graduação durante o ano 2014, e pressupõe atividades lúdicas envolvendo a utilização de girocópteros de papel.

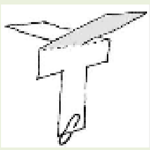
O objetivo principal foi propiciar aos alunos um cenário real para a compreensão de teste de hipóteses, abrangendo a experimentação, a formulação de hipóteses, o processo de medição, a análise exploratória dos dados, a verificação das suposições necessárias, a aplicação do teste t de Student e o debate sobre os resultados e limitações observadas.

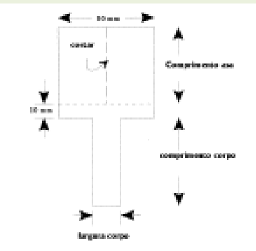

George E. P. Box
(18/10/1919-28/03/2013)
Fonte: em.wikipedia.org

É uma adaptação da proposta de Box (1992), que aplicou girocópteros para ensinar Planejamento de Experimentos (DOE) para estudantes de engenharia.

A ideia básica foi a construção de um girocóptero de papel e analisar o tempo de voo deste, buscando-se um tempo maior de permanência no ar.







Equipe	Comprimento da asa (mm)
Roxo/rosa	80
Verde/laranja	130

Equipes e dimensões do helicóptero

A prática

O conteúdo referente a Testes de Hipóteses, incluindo o Teste t, foi apresentado previamente aos alunos por meio de aula expositiva.

Reservou-se uma aula para a prática e no início perguntou-se aos alunos se o tamanho da asa poderia influenciar no tempo de voo de um girocóptero. Após breve discussão e formulação das hipóteses os alunos construíram os girocópteros, com dois tamanhos de asa.

Os girocópteros foram lançados do pavimento superior de um bloco de salas de aula. Um aluno ficou responsável por cronometrar o tempo. O professor da disciplina anotou as medidas e organizou os dados numa planilha eletrônica, posteriormente disponibilizada no Moodle, ambiente de apoio à disciplina.

Os alunos, em duplas, efetuaram a análise estatística, com auxílio do software R. Além do Teste t, foi solicitado que realizassem a Análise Exploratória de Dados e verificação da normalidade.

Os resultados foram apresentados e discutidos em fórum específico no Moodle. Cada dupla organizou uma apresentação em power-point ou pdf. Além disso, os alunos deveriam discutir no forum sobre os resultados observados.

Algumas limitações levantadas pelos alunos referem-se à forma de lançamento do girocóptero e ao processo de medição

Alguns resultados

No que tange à verificação da efetividade da atividade proposta, em avaliação escrita posterior à execução do trabalho, foram aplicadas questões similares ao problema do experimento. Os alunos, na grande maioria, acertaram as questões relativas ao teste t.

Do ponto de vista qualitativo, experimentos como este, criam um ambiente melhor para o processo ensino-aprendizagem, indo além das aulas expositivas e resolução dos exercícios propostos nos livros didáticos, além de contribuir para maior interação da turma com o professor e entre os próprios alunos.

Conclusões

Este trabalho trouxe o relato de uma prática pedagógica aplicadas para o ensino de Testes de Hipóteses.

Foi possível propiciar ao aluno um cenário real para a compreensão de um teste de hipóteses, abrangendo desde a coleta de dados, a análise estatística e o debate sobre os resultados e limitações do experimento

Referências

Box, G. (1992) Teaching Engineers Experimental Design with a Paper Helicopter. *Quality Engineering*, 4(2), 453-459, 1992.

R CORE TEAM. 2014. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: < http://www.r-project.org /> .

[1]elisa.henning@udesc.br, Universidade do Estado de Santa Catarina
[2]marcelo.savio.ramos@gmail.com, Universidade do Estado de Santa Catarina
[3]rafael.sato@gmail.com, Universidade do Estado de Santa Catarina
[4]luciane.mulazani@udesc.br , Universidade do Estado de Santa Catarina

Aprendizagem matemática dinâmica com folha de cálculo

Álvaro Anjo

alvaroanjo@gmail.com, Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres, 8125-254 Quarteira

Resumo

O modo de aprender de novos conceitos assim como a revisão de noções básicas lecionadas em anos anteriores, é uma questão importante especialmente para alunos de um curso de línguas e humanidades que tenham a disciplina de matemática.

É possível facilitar o processo de aprendizagem, quando os novos conceitos são estruturados de modo que algumas partes fiquem relacionadas a noções anteriores, e quando é implícita alguma forma dinâmica, experimental ou de simulação, que acompanhe as dúvidas de aprendizagem que vão surgindo.

A simulação na folha de cálculo Excel nos problemas de cálculo iterativo exige conhecimentos de matemática e de informática muito para além do nível médio de alunos de humanidades. Mas a sua utilização dinâmica pelo professor para acompanhar o raciocínio do aluno ou para criar valores de exercícios que facilitem a aprendizagem, contribuem para ajudar o imaginário do aluno a desenvolver o seu pensamento.

Esta abordagem complementar, tem-se revelado muito promissora na aprendizagem dos conteúdos letivos, com os alunos a mostrarem níveis altos de satisfação e com bons resultados nos testes. Trabalhos para casa ou aulas de revisão são dispensáveis.

São descritas algumas questões matemáticas lecionadas utilizando esta dupla abordagem.

Palavras chave: Aprendizagem dinâmica, Simulação matemática, Folha de cálculo.

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DINÂMICA COM FOLHA DE CALCULO

Anjo, Álvaro
alvaroanjo@gmail.com
Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres, 8125-254 Quarteira

RESUMO

O modo de aprender novos conceitos assim como a revisão de noções básicas lecionadas em anos anteriores, é uma questão importante especialmente para alunos de um curso de línguas e humanidades que tenham a disciplina de matemática.

É possível facilitar o processo de aprendizagem, quando os novos conceitos são estruturados de modo que algumas partes fiquem relacionadas a noções anteriores, e quando é implícita alguma forma dinâmica, experimental ou de simulação, que acompanhe as dúvidas de aprendizagem que vão surgindo.

A simulação na folha de cálculo Excel nos problemas de cálculo iterativo exige conhecimentos de matemática e de informática muito para além do nível médio de alunos de humanidades. Mas a sua utilização dinâmica pelo professor para acompanhar o raciocínio do aluno ou para criar valores de exercícios que facilitem a aprendizagem, contribuem para ajudar o imaginário do aluno a desenvolver o seu pensamento.

Esta abordagem complementar, tem-se revelado muito promissora na aprendizagem dos conteúdos letivos, com os alunos a mostrarem níveis altos de satisfação e com bons resultados nos testes. Trabalhos para casa ou aulas de revisão são dispensáveis.

TABELAS DE CONTINGENCIA

Muitos problemas de probabilidades que envolvem probabilidade condicionada podem ser resolvidos e explicados com tabelas de contingência. Exemplo:

«A probabilidade de uma mulher entre os 40 e os 50 anos ter cancro da mama é de 0,8%. Se uma mulher tiver cancro da mama, a probabilidade de obter um mamograma positivo é de 0,9. Se não tiver cancro da mama, a probabilidade de obter um mamograma positivo é de 0,07.
Qual é a probabilidade de uma qualquer mulher ter cancro da mama quando o teste foi positivo.? »

Solução:

P(C)	0,008
P(T+)	
P(C̄)	
P(T−)	
P(C / T+)	
P(C / T−)	
P(T+ / C)	0,9
P(T+ / C̄)	0,07
P(C̄ / T+)	
P(C̄ / T−)	
P(T− / C)	
P(T− / C̄)	
P(C∩T+)	
P(C∩T−)	
P(C̄∩T+)	
P(C̄∩T−)	

	T+	T−	Total
C	C∩T+	C∩T−	C
C̄	C̄∩T+	C̄∩T−	C̄
Total	T+	T−	S

	T+	T−	Total
C	0,0072		0,008
C̄			
Total			1

	T+	T−	Total
C	0,0072	0,0008	0,008
C̄			0,992
Total			1

	T+	T−	Total
C	0,0072	0,0008	0,008
C̄	0,06944		0,992
Total			1

	T+	T−	Total
C	0,0072	0,0008	0,008
C̄	0,06944	0,92256	0,992
Total	0,07664		1

	T+	T−	Total
C	0,0072	0,0008	0,008
C̄	0,06944	0,92256	0,992
Total	0,07664	0,92336	1

P(C/M) = 0,09394572

METODOS ELEITORAIS PROPORCIONAIS

Um problema típico é pedir aos alunos para encontrar a distribuição de mandatos utilizando vários métodos. Por exemplo:

«Numa eleição foram registados os seguintes votos:
Calcule a distribuição de 7 mandatos pelos métodos de :
Hamilton, Hondt, Webster, Jefferson »

PPD/PSD	4740
PS	2034
PCP . PEV	1147
B.E	333

Para orientar a aprendizagem do aluno, é conveniente saber de antemão a dificuldade de cada um dos métodos. O processo usual de solucionar Webster e Jefferson é por tentativas.
A simulação na folha de cálculo permite ver que o Webster de mínimo de 1 mandato por partido requer iteração, enquanto Webster aceitando mínimo de 0 mandatos não requer iteração; o comportamento do Jefferson é precisamente o oposto.
Por outro lado é bom saber se o intervalo de valores possíveis do Divisor Modificado não é demasiado pequeno que dificulte o trabalho do aluno.

		ITER	6	8	6	7	7	8	8	8
		ITER	7	7	7	7	7	7	7	7
Mand	7		min.0	min.1	Jeffer	min.1	SLague	min.1		Huntin.
	Votos	QP	Hamil	Hamil	Hondt	Jeffer	Webs	Webs	Adams	Hill
PSD	4740	4,01987	4	4	4	4	4	3	3	3
PS	2034	1,72498	2	1	2	1	2	2	2	2
PCP	1147	0,97274	1	1	1	1	1	1	1	1
BE	333	0,28241	0	1	0	1	0	1	1	1

	x5	min	max
Jefferson 0	14	950	1015
Jefferson 1	34	1020	1185
Webster 0	60	1055	1350
Webster 1	1	1355	1355
Adams	91	1580	2030
Hill-Huntington	14	1370	1435

DP=8254:7=1179,14 DM=[948; 1017]
Jefferson 0 6 7

	Vot	QP	QI	DM	QM	QMI
PSD	4740	4,01987	4	985	4,81218	4
PS	2034	1,72498	1		2,06497	2
PCP	1147	0,97274	0		1,16447	1
BE	333	0,28241	0		0,33807	0

CONCLUSÃO: O método de Webster de 1 mandato mínimo por partido tem cálculo difícil, pelo que não deve ser pedido. O método de Jefferson com mandato mínimo de 0 tem DM no intervalo [950; 1015], suficentemente amplo, para poder ser pedido aos alunos.

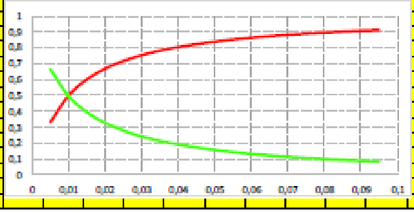
TEOREMA DE BAYES E TESTES DE DIAGNOSTICO

Testes de diagnóstico para doenças e drogas não são perfeitos
Mesmo que a sensibilidade e a especificidade de uma droga sejam notavelmente altas, positivos falsos podem ser mais abundantes que os positivos verdadeiros quando o uso de droga é baixo na população.
Por exemplo, com testes de sensibilidade e especificidade de 99%, pretende-se saber para uma população de 0,5% de drogados, qual é probabilidade de uma pessoa que testou positivo para cocaína seja realmente um drogado.

Resposta: 33%. **2/3 das pessoas que testam positivo para a cocaína não são utilizadores de cocaína.**

Esta questão fica mais fácil quando é mostrado aos alunos, a resposta para vários valores. P(D) = 0,01 ---> P(D / T+) = 0,5
P(D) = 0,10 ---> P(D / T+) = 0,9167

P(D)	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05	0.055	0.06
P(T+)												
P(D̄)												
P(T−)												
P(T+ / D)	0.99											0.99
P(T− / D)												
P(T+ / D̄)												
P(T− / D̄)	0.99											0.99
P(D / T+)												
P(D̄ / T+)												
P(D / T−)												
P(D̄ / T−)												
P(D∩T+)												
P(D∩T−)												
P(D̄∩T+)												



El análisis de correspondencias y la valoración social de la flora del humedal el Coroncoro de Villavicencio

Jorge Alejandro Obando Bastida[1] *y María Teresa Castellanos Sánchez*[2]

[1]jorge.obandob@campusucc.edu.com, Universidad Cooperativa de Colombia
[2]maytcas72@gmail.com, Universidad de los Llanos

Resumen

La flora de los humedales es uno de los recursos que más ha sufrido por las inclemencias de los hombres, la tala indiscriminada ha sido una constante, de la misma manera el humedal se ha visto invadido por personas y animales que dañan su aspecto y su naturalidad. Según Stolk et, al (2006) los humedales también pueden ser valorados según su significado social El valor de un bien o servicio suele medirse teniendo en cuenta la importancia que los mismos tienen para las personas. Mientras más importancia tenga un bien o servicio para las personas, tanto más tendrá valor para ellas. En el contexto de evaluar las variables aplicadas en un instrumento Likert sobre la valoración social del suelo del humedal se entablan mediante procedimientos estadísticos las correlaciones entre las diferentes variables intervinientes. Martínez, et, Al (2009) determina que mediante la correlación estadística se definen las relaciones entre las características de un fenómeno, el grado de esa relación o probar la confiabilidad de sus observaciones, confiabilidad requerida en la valoración social en la que se está buscando encontrar relaciones entre cualidades que se destacan cuando se analiza el suelo del humedal, buscando determinar un valor social desde la perspectiva de unas variables categóricas se establece una correspondencia entre estas y se determinan cuál de ellas discriminan o cuál de estas presenta mayor ponderación, para los cual se entabla un análisis de correspondencias. El análisis de correspondencias constituye una técnica de especial importancia en el estudio de las relaciones entre cualquier número de características (Mures, J & Huerga C (2002)). Los resultados encontrados permiten determinar que la flora del humedal propicia elementos que guardan altas correspondencias con los aspectos relacionados con la salud física, la salud mental y espiritual, con la belleza paisajista, la satisfacción en las actividades.

Palabras clave: Valoración Social, Análisis de Correspondencias, Correlación estadística.

Referencias

Martínez, R. Tuya, L. Martínez, M. Pérez, A & Cánovas, A. (2009). El coeficiente de correlación de los rangos de Spearman Caracterización. Revista de avances de ciencias médicas. La Habana. Cuba.

Mures, J. Huerga, C. (2002). Estudio empírico sobre la gestión y el control de la calidad mediante el análisis de correspondencias múltiples. Estadística Española.

Stolk, M. E., P. A. Verweij, M. Stuip, C. J. Baker and W. Oosterberg (2006). Valoración Socioeconómica de los Humedales en América Latina y el Caribe. Wetlands International. Los Países Bajos.

El análisis de Correspondencias y la valoración social de la flora del humedal el Coroncoro de Villavicencio

Jorge Alejandro Obando Bastidas[1] *–Maria Teresa Castellanos Sanchez*[2]

[1] jorgealejo21@gmail.com Universidad Cooperativa de Colombia. [2] maytcas72@gmail.com Universidad de los Llanos

Objetivos: Objetives:

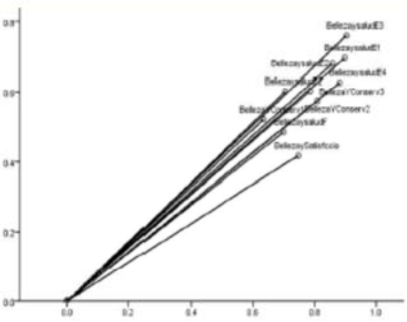
General: Determinar el valor económico y social del recurso natural "Flora" del Humedal Coroncoro de Villavicencio

Especifico: Establecer el valor social del recurso natural flora del humedal el Coroncoro desde la apreciación de los visitantes al lugar.

Métodos: Methods:

Mientras más importancia tenga un bien o servicio para las personas, tanto más tendrá valor para ellas. Se recogen en 80 visitantes al humedal apreciaciones sobre la belleza de la flora y su incidencia en sentimientos relacionados con la paz, la salud, la armonía, para ello se usa un instrumento Likert sobre la valoración social del suelo del humedal. Se entablan mediante procedimientos estadísticos las correlaciones entre las diferentes variables intervinientes. Martínez, et, Al (2009) determina que mediante la correlación estadística se definen las relaciones entre las características de un fenómeno, el grado de esa relación o probar la confiabilidad de sus observaciones, confiabilidad requerida en la valoración social en la que se está buscando encontrar relaciones entre cualidades que se destacan cuando se analiza el suelo del humedal, buscando determinar un valor social desde la perspectiva de unas variables categóricas se establece una correspondencia entre estas y se determinan cuál de ellas discriminan o cuál de estas presenta mayor ponderación, para los cual se entabla un análisis de correspondencias. El análisis de correspondencias constituye una técnica de especial importancia en el estudio de las relaciones entre cualquier número de características (Mures, J & Huerga C (2002)).

Resultados: Results:



	Admira-salud	Paz-salud	Bellezay salud	Paisaj-Paz	Paseo-salEsp	Agua-pazEs	Bellez-satisfa	Paisa-conser	Impact-Visual	Descon-visual
Admira-salud	1.000	.921	.941	.787	.835	.749	.576	.485	.619	.629
Paz-salud	.921	1.000	.851	.796	.822	.736	.585	.521	.586	.595
Bellezaysalud	.941	.851	1.000	.929	.968	.960	.725	.594	.716	.724
Paisaj-Paz	.787	.796	.929	1.000	.945	.879	.643	.676	.710	.674
Paseo-salEsp	.835	.822	.968	.945	1.000	.899	.705	.604	.718	.723
Agua-pazEs	.749	.736	.960	.879	.899	1.000	.773	.717	.698	.663
Bellez-satisfa	.576	.585	.725	.643	.705	.773	1.000	.706	.762	.789
Paisa-conser	.485	.521	.594	.676	.604	.717	.706	1.000	.719	.692
Impact-Visual	.619	.596	.716	.710	.718	.698	.762	.719	1.000	.905
Descon-visual	.629	.595	.724	.674	.723	.663	.789	.692	.905	1.000

Conclusiones: Conclusions:

Los 80 visitantes aprecian los beneficios que brinda la flora de este humedal situado en el interior de la ciudad, una de las variable mas valoradas esta relacionada con la belleza paisajista y la salud mental y física que brinda visitar este lugar. La tabla indica las altas correlaciones entre las diferentes variables que intervienen en la valoración social del humedal, por ejemplo existe una correlación del 92,1% entre la admiración del paisaje y la paz que repercute variables que repercuten en la salud física y mental de quienes lo visitan.

Por tanto la presencia del humedal en la ciudad tiene un alto beneficio social y quienes lo visitan disfrutan de la belleza de la flora, su exuberante vegetación rodeada de plantas exóticas, la aromas que esta produce, el ambiente que se respira le da para los visitantes un alto valor social.

Referencias: References:

Martínez, R. Tuya, L. Martínez, M. Pérez, A & Cánovas, A. (2009). El coeficiente de correlación de los rangos de Spearman Caracterización. Revista de avances de ciencias médicas. La Habana. Cuba.
Mures, J. Huerga, C. (2002). Estudio empírico sobre la gestión y el control de la calidad mediante el análisis de correspondencias múltiples. Estadística Española.
Stolk, M. E., P. A. Verweij, M. Stuip, C. J. Baker and W. Oosterberg (2006). Valoración Socioeconómica de los Humedales en América Latina y el Caribe. Wetlands International. Los Países Bajos.

Elaboração de livro paradidático no ensino de Estatística no Ensino Fundamental

Ailton Paulo Oliveira Júnior[1], Roberta Delalíbera Costa[2], Beatriz Cristina da Silva[3], Luana Aparecida Alves[4], Gessica Rodrigues da Silva[5], Lorena Silva Oliveira[6], Edmeire Aparecida Fontana[7], y Letícia Martins Pimentel[8]

[1]drapoj@uol.com.br, [3]beatriz_delalibera@yahoo.com.br, [4]alves.luanaap@live.com, [5]gessicarodrigues_8@yahoo.com.br, [6]lorena.uberaba@hotmail.com.br, [7]edmeirematematica@gmail.com, [8]letizinha_leticia@hotmail.com, Universidade Federal do Triângulo Mineiro
[2]roberta.costa@uberabadigital.com.br, Escola Estadual Santa Terezinha

Resumen

A elaboração de um livro paradidático sobre o ensino de Estatística nos anos finais do Ensino Fundamental proporcionou reflexão e debate a respeito da elaboração deste material didático bem como do aprofundamento dos conhecimentos estatísticos que serão ministrados quando estiverem em sala de aula tanto na formação inicial quanto no momento em que estiverem efetivamente em serviço. Considerou-se que o conteúdo abordado deve ser transmitido de forma adequada e atualizada para os alunos do Ensino Fundamental, levando em consideração, o contexto a ser empregado, as características de linguagem, adequação à faixa etária e o nível de escolaridade. Inicialmente o trabalho teve como objetivo caracterizar, analisar e classificar os livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro para então dar início a elaboração de atividades a serem desenvolvidas a partir dos paradidáticos, envolvendo conteúdos estatísticos e a leitura, avaliar e validar o material elaborado, bem como seu aperfeiçoamento. No início do livro, os personagens, a partir da ideia do filme Toy Story, tomam vida na hora do recreio em que todos os alunos saem da sala de aula e começam a conversar sobre o número de vezes em que foram utilizados e a partir daí, com a ajuda do "Tio Ailton", os personagens apresentam os conceitos básicos de Estatística, distribuição de frequência, frequência absoluta e relativa, média, moda, mediana e confecção de gráficos de colunas, barras e setores. Além disso, são propostas atividades voltadas a cada um do conceitos apresentados. É importante ressaltar, que será criado um concurso numa escola de Educação Básica, em que os alunos serão os criadores dos desenhos dos personagens do livro. Pretende-se com este livro, não apenas contribuir para expor uma história e a importância dos livros paradidáticos, mas também abrir as portas e estimular as produções acadêmicas e publicações de novos títulos e até mesmo de coleções, além de mostrar aos alunos, o quanto é importante a leitura para abranger seu vocabulário, seu conhecimento de mundo, sem sair de sua cidade, de melhorar sua escrita e oralidade. E por se tratar de uma atividade diferenciada, elimina o estereótipo de que para saber matemática não é preciso realizar leitura. O trabalho realizado revela que o material paradidático, embora faça parte de um mesmo gênero de livro, diferencia-se em função do tipo de abordagem do conteúdo e do modo como são articulados a simbologia estatística, as imagens e o texto escrito. Destacamos também a importância desse tipo de produção para que se desenvolva a autonomia enquanto produtor de conhecimento.

Palabras clave: Ensino de estatística, paradidático, ensino fundamental, Pibid.

Elaboração de livro paradidático no ensino de Estatística no Ensino Fundamental

Oliveira Júnior, Ailton Paulo[1], Costa, Roberta[2], Delalíbera, Beatriz Cristina da Silva[3], Alves, Luana Aparecida[4], da Silva, Gessica Rodrigues[5], Oliveira, Lorena Silva[6], Fontana, Edmeire Aparecida[7], Pimentel, Letícia Martins[8]

Introdução

No final da década de 90, os conceitos básicos de Estatística no Brasil, antes quase ignorados na Educação Básica, passaram a ser discutidos pela comunidade educacional e acadêmica, tendo sido incorporados oficialmente à estrutura curricular da disciplina de Matemática do Ensino Fundamental e Médio com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Lopes, Coutinho e Almouloud, 2010).

A partir da verificação dos conteúdos estatísticos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997 e 1998) tem-se como objetivo geral a criação de material paradidático para dar subsídios ao ensino de conteúdos estatísticos para professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Os objetivos específicos são: (1) Caracterizar, analisar e classificar os livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro; (2) Elaborar atividades a serem desenvolvidas a partir dos paradidáticos, ou seja, a produção de material que contemple aspectos relacionados aos conteúdos estatísticos e à leitura; (3) Avaliar e validar o material elaborado, bem como seu aperfeiçoamento.

Procedimentos Metodológicos

O desenvolvimento desse trabalho será desenvolvido em duas etapas, sendo a primeira caracterizada pela análise e classificação de livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro.

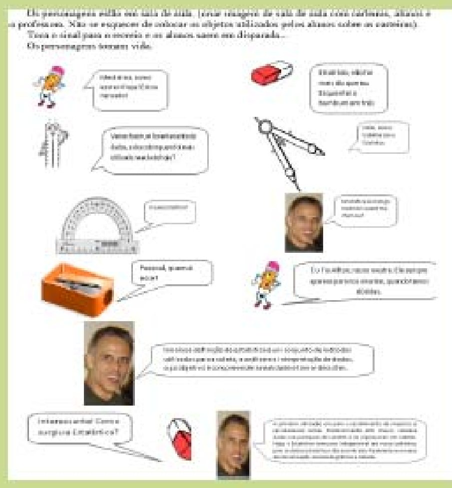
A segunda etapa da pesquisa será a elaboração de atividades a serem desenvolvidas a partir dos paradidáticos, ou seja, a produção de material que contemple aspectos relacionados aos conteúdos estatísticos e à leitura, com o intuito de proporcionar aos alunos a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005), ou seja, que processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados; sejam utilizados.

O material será produzido considerando os seguintes aspectos que podem ser realizados concomitantemente: (1) Criar a estória que será o fio condutor das ações a serem desenvolvidas; (2) Criar personagens; (3) Escolher os conteúdos que serão abordados; (4) Desenhar as ilustrações e gravuras; (5) Elaborar o texto.

Resultados

Durante a criação do livro paradidático, houve grande reflexão e debate no grupo a respeito da experiência Estatística que possuíam, diante de sua escolarização. Essas análises favoreceram, o (re) visitar da Estatística que já haviam aprendido durante sua vida escolar, comparando-a com a que os alunos do Ensino Fundamental recebem nos dias atuais, além de tentar abordar no livro, o conteúdo Estatístico de forma adequada e atualizada para os alunos do Ensino Fundamental.

Resultados



Conclusões

A elaboração deste material, não apenas contribui para expor uma história e a importância dos livros paradidáticos, mas também para abrir as portas e estimular as produções acadêmicas e publicações de novos títulos para o Ensino de Estatística, além de nos mostrar o quanto é importante a leitura para abranger seu vocabulário, seu conhecimento de mundo, sem sair de sua cidade, de melhorar sua escrita e oralidade.

O trabalho realizado revela que o material paradidático, embora faça parte de um mesmo gênero de livro, diferencia-se em função do tipo de abordagem do conteúdo e do modo como são articulados a simbologia estatística, as imagens e o texto escrito. Destacamos também a importância desse tipo de produção para que se desenvolva a autonomia enquanto produtor de conhecimento.

Referências

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Lopes, C.E., Coutinho, C.Q. e Almouloud, S. (2010). *Estudos e reflexões em Educação Estatística*. Campinas : Ed. Mercado de Letras.

Nacarato, A. M. e Lopes, C. E. (2005). *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Elaboração de livro paradidático no ensino de Probabilidade no Ensino Fundamental

Ailton Paulo Oliveira Júnior[1], *Valéria Ciabotti*[2], *Camila Marega Giardulo*[3], *Joana dos Santos Silva*[4], *Luana Mitsue Segawa*[5] *y Roberta Cristina de FariaMoreira*[6]

[1]drapoj@uol.com.br, [3]camilinha_marega@hotmail.com, [4]jo.uftm@hotmail.com, [5]luana_segawa@hotmail.com, [6]betinha20cris@hotmail.com, Universidade Federal do Triângulo Mineiro
[2]valeria_ciabotti@hormail.com, Escola Municipal Urbana Frei Eugênio

Resumen

Reconhecendo–se como aspecto importante para o ensino de Probabilidade, os livros paradidáticos se apresentam como um recurso que exige objetivo e significados que irá ser adquirida para interagir com as demais matérias, sem ser confundida com elas de forma positiva e produtiva para matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1997), os materiais didáticos utilizados em sala de aula servem como recursos para chegar a tais objetivos, contribuindo para a visualização, a experimentação e a fixação dos conteúdos propostos, levando em consideração suas características e modalidades. Assim o material produzido considera os seguintes aspectos que podem ser realizados concomitantemente: (1) Criar a estória que será o fio condutor das ações a serem desenvolvidas; (2) Criar personagens; (3) Escolher os conteúdos que serão abordados; (4) Desenhar as ilustrações e gravuras; (5) Elaborar o texto. Portanto, apresenta-se a elaboração de um paradidático especificando a Probabilidade, registrando a possibilidade de trabalhar esse tema em aulas de matemática, tomando por base o livro paradidático em elaboração. Definiram-se então os tópicos que seriam abordados no livro de acordo com o Conteúdo Básico Comum – Matemática – do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, Minas Gerais (2008) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) Matemática – Ensino Fundamental, sendo: Conceito de Aleatoriedade e Determinístico; Experimento Aleatório; Espaço Amostral; Evento e Definição de Probabilidade. Relacionando ainda Probabilidade com razão e porcentagem. Decidiu-se utilizar jogos para se trabalhar os conteúdos probabilísticos, inserindo esses jogos como etapas de uma olimpíada de Estatística em que os personagens irão participar para se tornarem campeões nacionais. Para a escolha dos personagens, tomou-se bastante cautela, pensando em representar vários grupos étnicos que compõem a sociedade brasileira. Assim os personagens principais que compõe a estória são: um branco, um índio, um japonês, um negro e um pardo. Definiram-se então os personagens como três meninas e dois meninos, utilizando como critério a pesquisa realizada pela PNAD (Pesquisa Nacional de Amostra por Domicílio), divulgado em 2012 pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), pois no Brasil existem mais mulheres do que homens, sendo que de uma população de 196,9 milhões de habitantes, 51,3% são mulheres e 48,7% são homens. Um dos jogos utilizados no paradidático é o Rapa que é um dos mais tradicionais jogos de Portugal e que trás possibilidades em trabalhar conceitos da probabilidade. Assim, através destes livros paradidáticos é possível a ampliação do universo do estudante no qual o mesmo é retirado da limitação do livro-texto implicando na ampliação do senso crítico do educando, além de orientá-los com uma postura ambientalmente correta.

Palabras clave: Ensino de probabilidade, paradidático, ensino fundamental, Pibid.

Elaboração de livro paradidático no ensino de Probabilidade no Ensino Fundamental

Oliveira Júnior, Ailton Paulo[1], Ciabotti, Valéria[2], Giardulo, Camila Marega[3], Silva, Joana dos Santos[4], Segawa, Luana Mitsue[5], Moreira, Roberta Cristina de Faria[6]

Introdução

Relativamente ao Tratamento da Informação para o Segundo Ciclo do Ensino Fundamental (3° e 4° anos), o trabalho a ser desenvolvido a partir da coleta, organização e descrição dos dados possibilita aos alunos compreender as funções de tabelas e gráficos usados para comunicar esses dados: a apresentação global da informação, a leitura rápida e o destaque dos aspectos relevantes. Lendo e interpretando os dados apresentados em tabelas e gráficos, os alunos percebem que eles permitem estabelecer relações entre acontecimentos e, em alguns casos, fazer previsões. **Também, ao observar a frequência de ocorrência de um acontecimento ao longo de um grande número de experiências, desenvolvem suas primeiras noções de probabilidade.**

Assim, os PCN (Brasil, 1997 e 1998), em relação à Probabilidade, consideram que esta pode promover a compreensão de grande parte dos acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos. Destacam o acaso e a incerteza que se manifestam intuitivamente, portanto cabendo à escola propor situações em que as crianças possam realizar experimentos e fazer observações dos eventos.

A partir da verificação dos conteúdos probabilísticos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997 e 1998) tem-se como objetivo geral a criação de material paradidático para dar subsídios ao ensino de conteúdos probabilísticos para professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

Procedimentos Metodológicos

O desenvolvimento desse trabalho será desenvolvido em duas etapas, sendo a primeira caracterizada pela análise e classificação de livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro.

A segunda etapa da pesquisa será a elaboração de atividades a serem desenvolvidas a partir dos paradidáticos, ou seja, a produção de material que contemple aspectos relacionados aos conteúdos estatísticos e à leitura, com o intuito de proporcionar aos alunos a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005), ou seja, que processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados; sejam utilizados.

O material será produzido considerando os seguintes aspectos que podem ser realizados concomitantemente: (1) Criar a estória que será o fio condutor das ações a serem desenvolvidas; (2) Criar personagens; (3) Escolher os conteúdos que serão abordados; (4) Desenhar as ilustrações e gravuras; (5) Elaborar o texto.

Resultados

Teve-se então, a ideia de desenrolar a estória com base em uma olimpíada, em que alunos de várias escolas competiriam, passando por várias etapas, sendo elas, municipal, estadual e finalmente nacional, onde se declararia o vencedor da olimpíada.

Acreditamos que os jogos podem ser atividades excelentes para a introdução de conceitos do campo da Probabilidade. Vários tipos deles ajudam a compreender a diferença entre situações aleatórias e determinísticas ou a diferenciar possibilidades de probabilidade (Brasil, 2010).

Resultados

Atividades propostas:

a) Rafael vai lançar um rapa (R; T; P; D) duas vezes consecutivas. Quantos são os resultados possíveis?

b) Gabriela resolveu criar um código de acesso ao seu *Facebook*. O código é uma sequência de três letras do rapa e dois dígitos. Quantos códigos ela pode formar?

Conclusões

É necessário ressaltar a importância do aluno ter contato com a leitura, escrita, interpretação de textos e até mesmo na comunicação em sua educação inicial, podendo ser auxiliada com o livro paradidático onde ele trabalhará esses três tópicos de uma forma implícita e prazerosa. Além disso, podemos perceber que esse tipo de livro traz uma linguagem matemática fazendo com que o educando possa familiarizar-se com esse tipo de linguagem e até mesmo que possa ajudá-lo no uso da mesma.

Em termos de conteúdo podemos ressaltar que o paradidático tem maior facilidade de trabalhar a interdisciplinaridade, o que trabalha com a relação dessas disciplinas e auxilia na parte cultural do educando, fazendo com que o aluno veja sua realidade através dos conhecimentos.

Referências

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2010). *Coleção explorando o Ensino*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Elaboración de un CD-ROM interactivo para la asignatura Descripción y Exploración de Datos en Psicología

CristinaVargas[1], RaimundoAguayo[2], Guillermo A.Cañadas[3], José M. Pérez[4], José L. Gómez[5] y Emilia I. De la Fuente[6]

[1]cvargas@ugr.es, Universidad de Granada
[2]raguayo@ugr.es, Universidad de Granada
[3]gacf@ugr.es, Universidad de Granada
[4]josemapm@ugr.es, Universidad de Granada
[5]jlgurquiza,@ugr.es, Universidad de Granada
[6]edfuente@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

El objetivo del trabajo fue crear un material didáctico interactivo en soporte CD-ROM, en el que se recopilan los contenidos y actividades que los alumnos llevan a cabo en relación a la materia Descripción y Exploración de Datos en Psicología. Dicha asignatura se cursa el primer año del Grado de Psicología y es el primer contacto con la estadística. El CD-ROM interactivo contiene refuerzo de diferentes bloques temáticos a los que se accede pinchando en el hipervínculo de la página de inicio. Cada página tiene botones generales y específicos de navegación (permiten moverse sólo dentro del bloque temático). El CD-ROM interactivo incluye autoevaluaciones al final de cada bloque donde el alumno recibe feedback sobre su ejecución (respuesta correcta/incorrecta). Para crear el CD-ROM interactivo se utilizó el software PowerPoint que permite empaquetar la presentación en un CD-ROM (con autoarranque), pudiéndose ejecutar en cualquier ordenador que disponga del sistema operativo Microsoft Windows 98 SE o posterior, incluso si no tuviera instalado el PowerPoint. Así que, la creación del CD-ROM interactivo permite que el proceso enseñanza-aprendizaje se pueda trasladar fuera del aula y así fomentar el aprendizaje autónomo de los alumnos.

Palabras clave: Estadística Descriptiva; Psicología; CD-ROM interactivo.

.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 451-452). Granada, 2015.

Elaboración de un CD-ROM interactivo para la asignatura *Descripción y Exploración de Datos en Psicología*

Vargas, C., Aguayo, R., Cañadas, G. A., Pérez, J. M., Gómez, J. L. y De la Fuente, E. I.
Universidad de Granada

Introducción

La implementación del Espacio Europeo de Educación Superior ha supuesto importantes cambios de roles del profesorado para adaptarse a las nuevas necesidades exigidas. Ahora los alumnos son orientados para que construyan sus conocimientos de forma autónoma a partir de los diferentes materiales, recursos y fuentes de información. Uno de los recursos didácticos más relevante por el profesorado son los informatizados que mejoran el proceso de enseñanza-aprendizaje (por ejemplo, De la Fuente, Vargas, Lozano, Cañadas, García-Cueto, San Luís Costas, Martín y Cañadas, 2009; Vargas, Cañadas, Aguayo, Cañadas, Pérez y De la Fuente, 2013). El uso de estos recursos no pretende sustituir la metodología docente tradicional, sino que lo complementa fomentando el autoaprendizaje de los alumnos.

Estas nuevas tecnologías pueden llegar a ser un recurso muy útil en asignaturas obligatorias que se caracterizan por un amplio número de matriculados. En estas situaciones el uso exclusivo de una metodología tradicional puede llegar a ser insuficiente para poder satisfacer las necesidades de los alumnos.

El presente trabajo se plantea para la asignatura *Descripción y Exploración de Datos en Psicología*, y se ubica en una dinámica de trabajo basada en el uso de las nuevas tecnologías de la información. Por lo que, el objetivo que se planteó fue la creación de un material didáctico interactivo en soporte CD-ROM, en el que se recopilen todos los contenidos y actividades que los alumnos llevan a cabo en el transcurso de la asignatura, sin necesidad de conexión a Internet.

Material y método

Creación de un CD-ROM interactivo que permite que el proceso enseñanza-aprendizaje se pueda trasladar fuera del aula y así fomentar el aprendizaje autónomo de los alumnos.

CD-ROM interactivo

En el CD-ROM interactivo se recopilan todos los contenidos necesarios para tener un conocimiento óptimo sobre la asignatura *Descripción y Exploración de Datos en Psicología*. Con esta finalidad, el CD-ROM contiene cuatro bloques temáticos a los que se accede pinchando en el hipervínculo de la página de inicio (ver Figura 1). Cada página tiene botones de navegación generales y específicos (que permiten moverse sólo dentro del bloque temático). El CD-ROM incluye autoevaluaciones (ver Figura 2) al final de cada bloque donde el alumno recibirá feedback sobre su ejecución (correcta/incorrecta).
Para crear el CD-ROM interactivo se ha utilizado el programa PowerPoint (Microsoft Office 2010) que permite empaquetar la presentación en un CD-ROM (con autoarranque), pudiéndose ejecutar en cualquier ordenador que disponga del sistema operativo Windows 98 Segunda Edición o posterior, incluso si no tuviera instalado el PowerPoint.

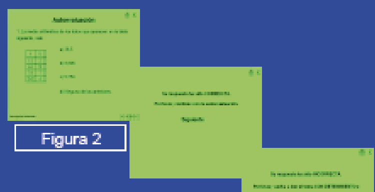


Figura 2

Figura 1

Conclusión

El CD-ROM realizado constituye un material didáctico interactivo en soporte informático. En él, se recopilan todos los contenidos y actividades que los alumnos llevan a cabo en el transcurso de la asignatura *Descripción y Exploración de Datos en Psicología*, así como otros que pueden ayudar a complementar su formación. De esta forma, los estudiantes pueden trabajar de forma autónoma los contenidos de dicha asignatura, necesitando únicamente para acceder a ellos un sistema operativo Windows.

Estos recursos facilitan que los alumnos sean sujetos activos dentro de su formación, pues son ellos quienes buscan el aprendizaje que consideran necesario para la resolución de los problemas que se plantean. Además, el hecho de manejar material de carácter informático hace que desarrollen habilidades de resolución de problemas en el contexto de las tecnologías informáticas.

Referencias

- De la Fuente, E. I., Vargas, C., Lozano, L. M., Cañadas, G. R., García-Cueto, E., San Luís Costas, C., Martín, M. y Cañadas, G. A. (2009). *CD-ROM- interactivo: Análisis de Datos en Psicología: Estadística Descriptiva*. Granada: SIDER S. C.
- Vargas, C., Cañadas, G. R. , Aguayo, R., Cañadas, G. A., Pérez, J. M. y De la Fuente, E. (2013). *Recursos didácticos para la enseñanza del paquete estadístico SPSS en el Grado de Logopedia (PID 11-401)*. Póster presentado en el la I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.

Evaluación entre iguales de una actividad para el aprendizaje integrado de estadística e inglés

Mónica Blanco[1] y Marta Ginovart[2]

[1]monica.blanco@upc.edu, Universitat Politècnica de Catalunya
[2]marta.ginovart@upc.edu, Universitat Politècnica de Catalunya

Resumen

La acreditación de la competencia en una tercera lengua, como el inglés, es un requisito establecido en el marco del diseño e implementación de los planes de estudios de grado en la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), y forma parte de las competencias genéricas o transversales que se deben conseguir paralelamente a la titulación al terminar los estudios. Una de las vías establecidas por la UPC para obtener dicha acreditación es cursar un mínimo de 9 ECTs en asignaturas impartidas en inglés. Desde el curso 2012-2013, en la Escuela Superior de Agricultura de Barcelona (ESAB) de la UPC se imparte la asignatura "Advanced Statistics" en los cuatro grados de ingeniería de biosistemas que tiene el centro. Se trata de una asignatura optativa de 6 ECTs de 4º curso, con la que se pretende introducir al estudiante en el análisis multivariante y en el diseño y análisis de experimentos. Para esta asignatura se han venido realizando diversas actividades siguiendo la metodología basada en el Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lenguas Extranjeras (AICLE). Al inicio de la asignatura "Advanced Statistics" en el curso 2013-2014 se diseñó e implementó una actividad para realizar con 40 estudiantes aproximadamente, en grupos de 2 o 3 estudiantes. El objetivo principal de esta actividad era analizar un conjunto grande de datos (100 unidades y 14 variables) con el fin de revisar los contenidos de estadística descriptiva e inferencial estudiados en la asignatura obligatoria "Estadística" impartida en 2º curso. Esta actividad resultó decisiva para que el estudiante se iniciase en la toma de decisiones y elecciones de variables y métodos de una manera personal y creativa. Así mismo, se pretendía introducir al estudiante en el uso de la terminología estadística en inglés. Finalmente, para favorecer el desarrollo de la competencia de expresión y comprensión oral en inglés, cada grupo debía preparar una presentación oral con los resultados del análisis de datos realizado. En esta parte de la actividad se quería implicar al estudiante en su propia evaluación, avanzando en la adquisición de competencias transversales que la UPC quiere potenciar. Como actividad de aprendizaje centrada en el estudiante, se optó por la evaluación entre iguales de las presentaciones orales. La evaluación de cada presentación oral se llevó a cabo a partir de los criterios establecidos en una rúbrica que se facilitó como referencia para conducir al estudiante en la calificación final otorgada a cada presentación. Los resultados obtenidos por coevaluación entre los estudiantes presentaron un coeficiente de variación bajo y una buena correlación con la valoración del profesor. Se detectaron diferencias significativas entre la media de las notas otorgadas por los estudiantes a las distintas presentaciones y las notas del profesor al 5% pero no al 1%.

Palabras clave: estadística descriptiva e inferencial, aprendizaje integrado de estadística e inglés, evaluación entre iguales.

EVALUACIÓN ENTRE IGUALES DE UNA ACTIVIDAD PARA EL APRENDIZAJE INTEGRADO DE ESTADÍSTICA E INGLÉS

Mónica Blanco, Marta Ginovart

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Escuela Superior de Agricultura de Barcelona (ESAB)

4 GRADOS EN INGENIERÍA DE BIOSISTEMAS

La acreditación de la competencia en una tercera lengua, como el inglés, es un requisito establecido en el marco del diseño e implementación de los planes de estudios de grado en la UPC, y forma parte de las competencias genéricas o transversales que se deben conseguir paralelamente a la titulación al terminar los estudios.

Una de las vías establecidas por la UPC: Obtener un mínimo de 9 ECTs en asignaturas impartidas en inglés.

Advanced Statistics

Asignatura optativa en los grados en ingeniería de biosistemas

6 ECTs en el 4° curso

Contenido: Análisis multivariante y diseño-análisis de experimentos

Metodología: Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lenguas Extranjeras (AICLE)

Curso 2013-2014

OBJETIVO: Diseñar e implementar una actividad para realizar en grupos de 2 o 3 estudiantes al iniciar la asignatura que integre contenidos estadísticos conocidos para el análisis de un conjunto grande de datos, que ayude a adquirir el vocabulario necesario para el entrenamiento en la competencia en inglés, y que represente una oportunidad para implicar a los estudiantes en su propia evaluación, avanzando en la adquisición de competencias transversales.

MULTIVARIATE DATA ANALYSIS

HATCO Dataset Documentation

Multivariate Data Analysis, Sixth edition

"The world's leading authority on applied multivariate data analysis based on number of citations, as reported by Google Scholar."

HATCO has been utilized in past versions of the textbook and provides a simplified set of variables amenable to all of the basic multivariate techniques. It was obtained from the Hair, Anderson, and Tatham Company (HATCO), a large (though nonexistent) industrial supplier. It represents surveys of HATCO customers that were collected through an established marketing research firm.

The dataset consists of 100 observations on 14 separate variables and is an example of a segmentation study for a business-to-business situation, specifically a survey of existing customers of HATCO. Three types of information were collected:

- First is the perception of HATCO on seven attributes identified in past studies as the most influential in the choice of suppliers. The respondents, purchasing managers of firms buying from HATCO, rated HATCO on each attribute.
- Second are actual purchase outcomes, either the evaluations of each respondent's satisfaction with HATCO or the percentage of his or her product purchases from HATCO.
- Third are general characteristics of the purchasing companies (e.g., firm size, industry type).

INDICACIONES DE LA ACTIVIDAD: ANALIZAR EL CONJUNTO DE DATOS "HATCO" [Hair et al, 1999]

(14 variables controladas sobre 100 empresas)

1. Escoger dos variables cuantitativas y al menos dos variables cualitativas (una con dos categorías y la otra con más de dos categorías).
2. Análisis exploratorio de un subconjunto de datos: resúmenes numéricos y gráficos con las variables escogidas.
3. Inferencia estadística. Estudiar si las variables cuantitativas escogidas para los subgrupos determinados por:
   - la variable cualitativa con dos categorías, tienen medias significativamente diferentes o no.
   - la variable cualitativa con más de dos categorías, tienen medias significativamente diferentes o no. En caso afirmativo, qué medias son significativamente distintas entre ellas y cuáles no.
   - por las dos variables cualitativas, tienen medias significativamente distintas o no, considerando posibles interacciones. En caso afirmativo, realizar diversas pruebas de comparaciones múltiples.
4. Preparación de la presentación oral en inglés de 10 minutos para mostrar los resultados en el aula, que será evaluada por el resto de compañeros, con la ayuda de una rúbrica proporcionada como referencia para guiar al estudiante en la evaluación de cada presentación.

ACTIVIDAD

- Conveniente para revisar y poner al día contenidos de la asignatura obligatoria de Estadística previamente cursada: descriptores numéricos, tipos de gráficos, test t de Student, test F de Fisher para dos varianzas, análisis de la variancia para un factor, test Levenne para igualdad de varias varianzas, método de Tukey para las comparaciones múltiples, formulación correcta de las hipótesis a contrastar, valoración de las hipótesis o suposiciones previas, nivel de significación o nivel de confianza para concluir, etc.
- Apropiada para metodología AICLE que implica la aplicación de conocimiento para alcanzar un resultado.
- Centrada en el contenido, personal y creativa, donde el estudiante hace elecciones y toma decisiones a partir de los resultados obtenidos.

PRESENTACIÓN ORAL DEL ANÁLISIS REALIZADO

El lenguaje, instrumental, se puede evaluar en su dimensión comunicativa, uso creativo de estructuras y vocabulario [Barbero, 2012].

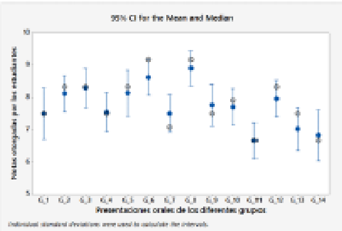
EVALUACIÓN

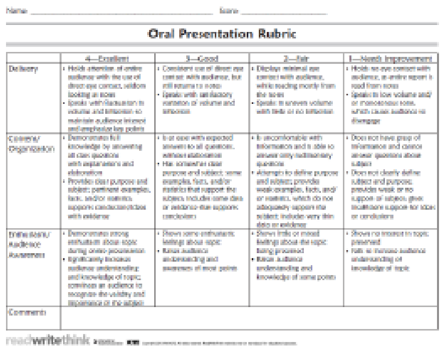
- Evaluación entre iguales: papel activo del estudiante, evaluación como parte del aprendizaje [Dochy et al, 2010].
- Rúbrica: herramienta muy apropiada para metodología AICLE, para evaluar competencias integradas [Barbero, 2012].

RESULTADOS

Descriptive Statistics

Variable	N	Mean	SE Mean	StDev	CoefVar	Minimum	Median	Maximum
G_1	20	7,50	0,38	1,69	22,5	4,17	7,50	10
G_2	20	8,13	0,27	1,21	14,9	5,83	8,33	10
G_3	20	8,30	0,29	1,31	15,8	5,83	8,33	10
G_4	20	7,64	0,29	1,30	17,1	5,83	7,50	10
G_5	21	8,14	0,34	1,55	19,2	4,17	8,33	10
G_6	19	8,62	0,26	1,15	13,3	6,67	9,17	10
G_7	20	7,50	0,28	1,24	16,5	5,00	7,08	9,17
G_8	22	8,90	0,26	1,22	13,7	6,67	9,17	10
G_9	19	7,76	0,31	1,33	17,2	5,83	7,50	10
G_10	30	7,71	0,28	1,51	19,6	4,17	7,92	10
G_11	30	6,66	0,27	1,50	22,4	3,33	6,67	9,17
G_12	27	7,97	0,28	1,43	18,0	5,83	8,33	10
G_13	30	7,83	0,33	1,78	25,4	3,33	7,50	10
G_14	25	6,83	0,38	1,90	27,7	3,33	6,67	10



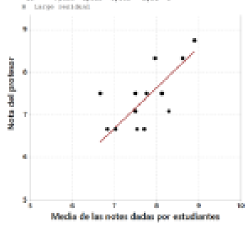


Model Summary

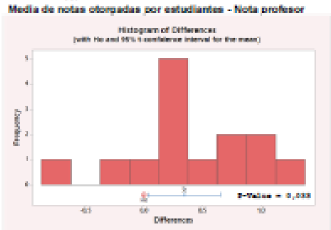
Coefficients

Regression Equation

Fits and Diagnostics for Unusual Observations



Paired T for
Media de notas otorgadas por estudiantes - Nota profesor



CONSIDERACIONES FINALES

Este tipo de actividad favorece la creatividad y la toma de decisiones del estudiante.

Permite entrenar la expresión y la comprensión oral en inglés y la terminología propia del ámbito estadístico con la ayuda de las salidas de programas (Minitab® 16).

Los resultados obtenidos por coevaluación entre los estudiantes presentan un coeficiente de variación bajo y una buena correlación con la valoración del profesor.

Diferencias significativas entre las notas de los estudiantes y del profesor al 5% pero no al 1%.

REFERENCIAS

Barbero, T. (2012) Assessment tools and practices in CLIL. En Quartapelle, F. (ed). *Assessment and Evaluation in CLIL*. Como-Pavia: Ibis

Dochy, F.; Segers, M.; Sluijsmans, D. (2010) The use of self-, peer and co-assessment in higher education: a review. *Studies in Higher Education*, 24 (3): 331-350

Hair, J. F. (Jr.); Anderson, R. E.; Tatham, R. L.; Black, W. C. (1999). *Multivariate Data Analysis*. New Jersey: Prentice Hall (5ª ed)

Generación de exámenes de Estadística para la evaluación continua utilizando R en la plataforma Moodle

Mario Zacarés González[1], *Emilia López-Iñesta*[2], *Francisco Grimaldo*[3] *y Miguel Arevalillo-Herráez*[3]

[1]mario.zacares@ucv.es, Facultad de Veterinaria y Ciencias Experimentales,
Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir"
C/ Guillem de Castro 94, 46001, Valencia, España

[2]emilia.lopez@ucv.es, Facultad de Ciencias de la Actividad Física y del Deporte,
Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir"
Avda. Virgen de la Soledad, s/n, 46900, Torrent, Valencia, España

[3]francisco.grimaldo@uv.es, miguel.arevalillo@uv.es
Departament d'Informàtica, Universitat de València
Av. de la Universitat, s/n, 46100, Burjassot, España

Resumen

Uno de los desafíos que plantea el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) es el seguimiento del trabajo individual del alumnado a lo largo del curso a través de la evaluación continua. Esto supone un reto aún mayor para el profesorado que trabaja en clases con un número elevado de estudiantes. Los Sistemas de Gestión del Aprendizaje o plataformas docentes como Moodle juegan un papel fundamental al permitir el diseño de diferentes actividades para la evaluación de los alumnos. Entre éstas, se incluye la posibilidad de crear e importar cuestionarios a partir de bancos de preguntas de distinta naturaleza: verdadero/falso, opción múltiple, emparejamiento, respuesta corta, de cálculo, etc. El enunciado de las preguntas admite tablas, expresiones matemáticas o imágenes.

En este trabajo se describe la generación automática de exámenes para una asignatura de Estadística y Biometría en primer curso de un grado de Veterinaria utilizando el paquete "exams2" del software libre R. En concreto, la función *exams2moodle* permite producir un archivo en formato Moodle XML que se puede importar y usar en la generación de cuestionarios aleatorios. De esta manera, se puede disponer de ejercicios diferentes, pero de complejidad similar, que facilitan la evaluación y dificultan la copia entre el alumnado. Además, la realización de cuestionarios individualizados ha supuesto una mayor motivación y ha fomentado la discusión sobre la resolución de problemas estadísticos entre los estudiantes.

Palabras clave: Evaluación, Estadística, Moodle, R.

Referencias

Zeileis, A., Umlauf, N. y Leisch, F. (2014). Flexible Generation of E-Learning Exams in R: Moodle Quizzes, OLAT Assessments, and Beyond. *Journal of Statistical Software, 58*(1), 1-36. Recuperado de http://www.jstatsoft.org/v58/i01/.

R Core Team (2014). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Recuperado de http://www.R-project.org/.

Agradecimientos: Esta experiencia ha sido desarrollada en el marco de una Red de Innovación Educativa. Los autores agradecen la financiación recibida desde el Vicerrectorado de Convergencia Europea y Calidad de la Universitat de València, a través del proyecto Finestra Oberta con código UV-SFPIE_FO14-223160.

Generación de exámenes de Estadística para la evaluación continua utilizando R en la plataforma Moodle

Mario Zacarés González[1], Emilia López-Iñesta[2], Francisco Grimaldo[3], Miguel Arevalillo-Herráez[3]

[1]mario.zacares@ucv.es
Fac. Veterinaria y C. Experimentales,
Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir"
C/ Guillem de Castro 94, 46001, Valencia

[2]emilia.lopez@ucv.es
Fac. Ciencias Act. Física y del Deporte,
Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir"
Avda. Virgen Soledad, s/n, 46900, Torrent, Valencia

[3]francisco.grimaldo@uv.es,
[3]miguel.arevalillo@uv.es
Departament d'Informàtica,
Universitat de València
Av. de la Universitat, s/n, 46100, Burjassot, Valencia

El problema: Uno de los desafíos que plantea el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) es el **seguimiento del trabajo individual** del alumnado a lo largo del curso a través de la **evaluación continua**. Esto supone un reto aún mayor para el profesorado que trabaja en clases con un número elevado de estudiantes.

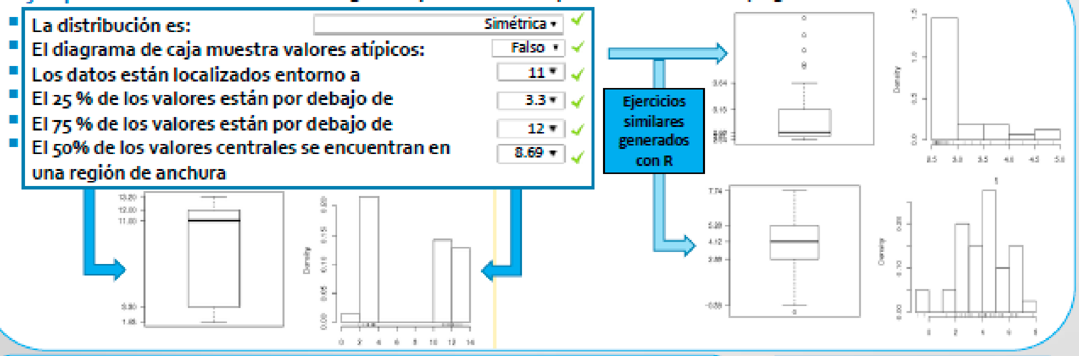
Herramientas de apoyo: Los **Sistemas de Gestión del Aprendizaje** como Moodle juegan un papel fundamental al permitir el diseño de diferentes actividades para la evaluación de los alumnos. Entre éstas, se incluye la posibilidad de crear e importar **cuestionarios** a partir de bancos de **preguntas de distinta naturaleza**: V/F, opción múltiple, emparejamiento, respuesta corta, etc. El enunciado de las preguntas admite tablas, expresiones matemáticas o imágenes, facilitando el planteamiento de cuestiones para múltiples asignaturas y disciplinas. Además, Moodle permite importar preguntas en varios formatos (Blackboard, GIFT, Moodle XML, etc.).

Contextualización: La experiencia sobre la que versa este trabajo se ha llevado a cabo en el primer cuatrimestre del curso 2014-2015 en la asignatura **Estadística y Biometría** de primer curso del grado de Veterinaria. En cursos anteriores, siempre se han incluido en la plataforma Moodle de la asignatura cuestionarios con el objetivo de que el alumnado aprendiera a resolver paso a paso y de manera autónoma ejercicios relacionados con los contenidos teóricos expuestos en las clases presenciales. **Moodle** permite la construcción de cuestionarios con preguntas y respuestas barajadas, donde las preguntas son seleccionadas de manera aleatoria del banco de preguntas que incluso pueden ser generadas con datos aleatorios. **Sin embargo**, en muchos casos, los ejercicios resultaban tan parecidos, que la copia entre los estudiantes era habitual y hacía que el profesorado se cuestionara si se trataba de un instrumento de evaluación adecuado. Este aspecto nos llevó a investigar si existían alternativas compatibles con Moodle para la creación de cuestionarios.

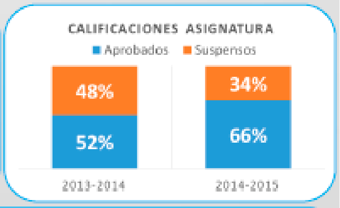
Solución: El **paquete exams2** del software libre **R** permite la generación automática de preguntas. En concreto, la función *exams2moodle* produce archivos en formato Moodle XML que se pueden importar y usar en la generación de cuestionarios aleatorios. Así, se puede disponer de ejercicios diferentes de complejidad similar, que facilitan la evaluación y dificultan la copia entre el alumnado.

Ventajas: El **paquete exams2** de **R** aporta una **flexibilidad** total en la **configuración** de los **cuestionarios**: permite crear múltiples versiones de un enunciado, donde los datos, las preguntas, las opciones de los desplegables, las gráficas o las tablas pueden ser configuradas para ser aleatorias. De hecho, una de las grandes ventajas es que el alumno puede practicar con infinitos ejemplos, ya que al repetir un ejercicio, puede obtener variantes muy distintas. Asimismo, resulta un recurso ideal para el diseño de prácticas de Estadística.

Ejemplo de enunciado: En base a los gráficos, selecciona la opción correcta del desplegable:



Resultados: La realización de **cuestionarios individualizados** ha supuesto una **mayor motivación e implicación en la asignatura** por parte de los **alumnos**. Fundamentalmente, ha fomentado la **discusión sobre los métodos de resolución de problemas estadísticos** entre los estudiantes, a la vez que han realizado una **mayor reflexión sobre los enunciados y los datos** con los que trabajan. Se puede señalar que el porcentaje de aprobados de la asignatura con respecto al curso anterior ha sido superior como indica el gráfico de la derecha. Otro aspecto a señalar interesante, es que el número de alumnos que abandonan de manera temprana la asignatura ha sido menor en comparación a cursos anteriores.



Referencias

* Zeileis, A., Umlauf, N. y Leisch, F. (2014). Flexible Generation of E-Learning Exams in R: Moodle Quizzes, OLAT Assessments, and Beyond. *Journal of Statistical Software, 58*(1), 1-36. Recuperado de http://www.jstatsoft.org/v58/i01/.
* Core Team (2014). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Recuperado de http://www.R-project.org/.

Agradecimientos: Esta experiencia ha sido desarrollada en el marco de una Red de Innovación Educativa. Los autores agradecen la financiación recibida desde el Vicerrectorado de Convergencia Europea y Calidad de la Universitat de València, a través del proyecto Finestra Oberta con código UV-SFPIE_FO14-223160.

GeoGebra: un puente para el aprendizaje de la estadística

Carina NoeliaFernández[1] *y VerónicaSan Román*[2]

[1]carina.fernandez@uns.edu.ar, Universidad Nacional del Sur (UNS). Bahía Blanca. Prov. de Bs As. Argentina

[2]vsroman@uns.edu.ar, Universidad Nacional del Sur (UNS). Bahía Blanca. Prov. de Bs As. Argentina

Resumen

En Argentina ha aumentado vertiginosamente el interés de los docentes de todos los niveles por utilizar GeoGebra en las aulas, porque además de ser un software libre está incorporado en las Netbook que los alumnos reciben en el nivel secundario por el Programa Conectar Igualdad del Ministerio de Educación, y se ha convertido en poco tiempo en el programa predilecto de los mismos.

A lo largo de las clases teóricas y prácticas en la cátedra “Probabilidad, Variable Aleatoria y Estadística” observamos ciertos conflictos para la comprensión de los conocimientos relacionados con la convergencia en distribución. Esto nos motivó a elaborar una herramienta facilitadora para la aprehensión, el desarrollo y el posterior análisis de dicho contenido.

En este trabajo presentaremos la implementación de una herramienta didáctica utilizando el software GGB que se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de las carreras de Ingeniería Electrónica e Ingeniería Electricista dictado por docentes del Departamento de Matemática del área de Estadística de la Universidad Nacional del Sur.

Nuestra motivación fue incorporar en forma progresiva el uso de las TICs en la metodología de trabajo en las aulas pues son un excelente recurso que nos permite hacer de la probabilidad y estadística una disciplina dinámica y manipulable que promueva la experimentación y el descubrimiento.

Palabras clave: Probabilidad y Estadística, TICs, Variable Aleatoria.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 457-458). Granada, 2015.

GEOGEBRA: UN PUENTE PARA EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA

Fernández, Carina Noelia[1] - San Román, Verónica[2]
1 carina.fernandez@uns.edu.ar, Universidad Nacional del Sur (UNS). Bahía Blanca. Prov. de Bs As. Argentina
2vsroman@uns.edu.ar, Universidad Nacional del Sur (UNS). Bahía Blanca. Prov. de Bs As. Argentina
Departamento de Matemática

DESCRIPCIÓN: El trabajo que aquí presentamos es parte de una investigación más general que hemos llevado a cabo acerca de la enseñanza y el aprendizaje para la comprensión de los conocimientos relacionados con la convergencia en distribución de sucesión de variables aleatorias. La misma se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de las carreras de Ingeniería Electrónica e Ingeniería Electricista dictado por docentes del área de Estadística, del Dpto. de Matemática de la UNS y tuvo tres propósitos fundamentales: a) descubrir las principales dificultades que tienen los alumnos a la hora de comprender los conceptos y procedimientos relativos a la convergencia de sucesiones de variables aleatorias; b) estudiar si la enseñanza habitual de estos conceptos da lugar a un aprendizaje con comprensión; c) diseñar una enseñanza alternativa capaz de mejorar el aprendizaje.

INTRODUCCIÓN: Nos encontramos con una nueva generación de estudiantes que no han tenido que acceder a las nuevas tecnologías, sino que han nacido con ellas y que se enfrentan al conocimiento desde postulados diferentes a los del pasado.

Ante esta nueva realidad, incorporar en forma progresiva el uso de las TIC's resulta un excelente recurso en la metodología de trabajo en las aulas que permite hacer de la Probabilidad y Estadística una disciplina dinámica y manipulable promoviendo la experimentación y el descubrimiento.

OBJETIVO GENERAL: Generar espacios para la conceptualización y comprensión de sucesiones de variables aleatorias o procesos mediante la incorporación progresiva de las nuevas tecnologías, en este caso a través del software libre GeoGebra.

METODOLOGÍA

La metodología de trabajo se sustenta desde la idea de la participación activa, de exploración interactiva y de recorridos autónomos por parte de los destinatarios en los procesos de construcción del conocimiento. La misma promueve la vinculación entre acción-reflexión-acción.

PROBLEMA MOTIVADOR

"Sea una sucesión de variables aleatorias con distribución Laplaciana con parámetro $\alpha = n$. ¿Converge esta sucesión en distribución?"

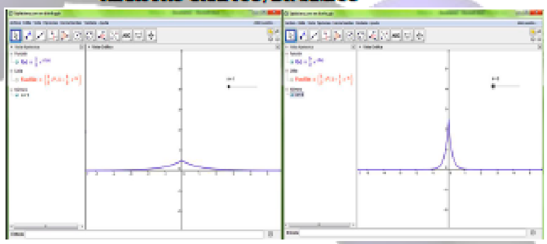
IMPLEMENTACIÓN UTILIZANDO GEOGEBRA

PRIMERA ETAPA

REGISTRO ALGEBRAICO

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una Sucesión de Variables Aleatorias con Distribución Laplaciana con parámetro $\alpha = n$.

REGISTRO GRÁFICO/DINÁMICO



SEGUNDA ETAPA

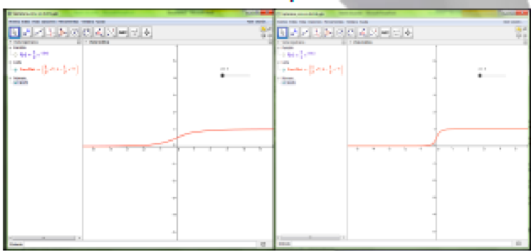
REGISTRO ALGEBRAICO

Para ver que la sucesión converja en distribución debemos hallar en primer lugar la Función de Distribución Acumulada $F_n(x)$.

$$F_n(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \frac{n}{2}\cdot e^{nt}\,dt & si\ x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} \frac{n}{2}\cdot e^{nt}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{n}{2}\cdot e^{-nt}\,dt & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Resolviendo estas integrales obtenemos: $F_n(x) = \begin{cases} \frac{e^{nx}}{2} & si\ x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-nx}}{2} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

REGISTRO GRÁFICO/DINÁMICO



ETAPA FINAL

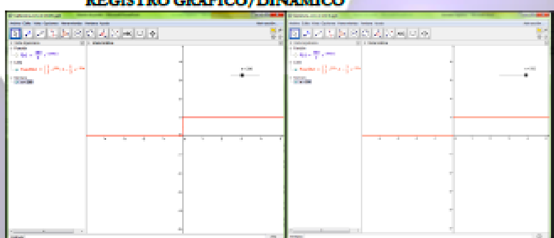
REGISTRO ALGEBRAICO

Nuestro objetivo es calcular $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}}{2} = 0\ (pues\ x < 0) \\ \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{e^{-nx}}{2}\right) = 1\ (pues\ x \geq 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

REGISTRO GRÁFICO/DINÁMICO



RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los estudiantes lograron, mediante la experimentación con el uso de las TIC's, representar en forma dinámica el concepto de límite observando la convergencia en distribución del problema propuesto y así apropiarse del concepto de convergencia en distribución de sucesión de variables aleatorias.

El propósito de la propuesta fue fortalecer y promover la reflexión colectiva y el apoyo a las experiencias innovadoras mediante el uso de las TIC´s, potenciando su utilización en beneficio del aprendizaje, el conocimiento, el análisis de la información y el acceso a nuevas formas de organizar el pensamiento.

REFERENCIAS

Alberola López, Carlos (2004) Probabilidad, Variables Aleatorias Y Procesos Estocásticos: Una Introducción Orientada A Las Telecomunicaciones. Universidad de Valladolid. Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial. ISBN: 848448307X. ISBN-13: 9788484483076.
Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? Blaix, 15 (pp. 2-13). Disponible en http://www.ugr.es/~batanero
Batanero, C. y Godino J. (2001). Análisis de Datos y su Didáctica. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
Batista, M. A.; Celso, V. E.; Usubiaga G. (2007) Tecnologías de la información y la comunicación en la escuela: trazos, claves y oportunidades para su integración pedagógica - 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. ISBN 978-950-00-0591-3.

Herramientas estadísticas en la formación de Medicina y Enfermería del Trabajo

Francisco García-García

fgarcia@cipf.es, Centro de Investigación Príncipe Felipe

Resumen

Introducción y objetivo.

El médico y el enfermero del trabajo son profesionales de la Salud Pública reconocidos en los sistemas sanitarios por su papel relevante en la protección y promoción de la salud de la persona trabajadora.

Desde la Unidad Docente de Salud del Trabajo de la Comunidad Valenciana se planteó como objetivo la creación y desarrollo de un proceso formativo en Estadística dentro de su especialización tecnológica-científica.

Métodos.

El proceso de aprendizaje se vertebró en la preparación de un protocolo de un proyecto de investigación por parte de cada uno de los médicos/enfermeros del trabajo en formación. Los trabajos son tutorizados por diversos profesionales de la Epidemiología y Estadística. Se distinguieron varias fases:

- Sesiones teórico-prácticas presenciales, donde se imparten los conceptos básicos sobre las fases del análisis estadístico-epidemiológico con el softwarevR.v(Wiki con material didáctico: https://sites.google.com/site/cusmet/)
- Integración de las prácticas desarrolladas en centros asistenciales dentro de la fase de recogida de los datos del proyecto.
- Tutorización online.
- Puesta en común de resultados obtenidos y su transferencia a la práctica laboral.

Resultados.

En el colectivo de médicos y enfermeros del trabajo, los procesos formativos de la Estadística mejoraron:

Su capacidad de diseño de estudios en Salud Laboral.

Toma de decisiones en proyectos de prevención y promoción de la salud.

Promoción de transferencia de resultados obtenidos a la práctica laboral.

Conclusiones.

La formación en Estadísica para Médicos y Enfermeros del Trabajo proporciona un conjunto de herramientas necesarias en la detección de riesgos laborales, así como la planificación de acciones preventivas en el marco de la vigilancia.

Palabras clave: Salud Laboral, R, Estadística, Medicina del Trabajo.

Herramientas estadísticas en la formación de Medicina y Enfermería del Trabajo

Francisco García-García[1]

1. Departamento de Genómica Computacional, Centro de Investigación Príncipe Felipe. Valencia, España.

Introducción

- El médico y el enfermero del trabajo son profesionales de la Salud Pública reconocidos en los sistemas sanitarios por su papel relevante en la protección y promoción de la salud de la persona trabajadora.
- En su formación se incorporan aspectos tecnológico-científicos y entre ellos destaca el aprendizaje de la Estadística en el ámbito de la Vigilancia Colectiva de los trabajadores.

Objetivos

Proporcionar un conjunto de herramientas estadísticas a los profesionales de la Salud Laboral, que mejoren la detección de riesgos laborales, así como la planificación de acciones preventivas en el marco de la vigilancia.

Material y métodos

- El proceso de aprendizaje se vertebró en el desarrollo de un proyecto de investigación por parte de las matronas.
- Los trabajos se realizan en grupo y se tutorizaron por diversos profesionales de la Epidemiología y Estadística.
- Se distinguieron varias fases:

A. Sesiones teórico-prácticas presenciales

En ellas se impartieron los conceptos básicos del análisis estadístico-epidemiológico, creación y gestión de bases de datos y uso de herramientas para el análisis estadístico de los datos. (Fig. 1 y 2).

B. Prácticas en centros asistenciales

Integración de las prácticas desarrolladas en centros asistenciales, donde habitualmente se realizó la recogida de los datos del proyecto.

C. Tutorización online

- Elaboración del protocolo del proyecto de investigación.
- Determinación del tamaño muestral.
- Evaluación del diseño de la base de datos.

D. Tutorización grupal presencial

- Elección de estrategia de análisis estadístico.
- Orientación sobre la elaboración del informe de resultados.

E. Comunicación de resultados

- Elaboración del trabajo final del periodo de formación.
- Exposición de resultados.

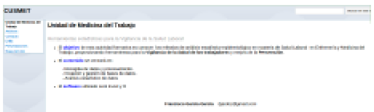


Figura 1. Wiki de la actividad formativa.

Figura 2. Software estadístico utilizado durante la actividad formativa.

Conclusiones

En el colectivo de médicos y enfermeros del trabajo, los procesos formativos de la Estadística mejoraron:

- Su capacidad de diseño de estudios en Salud Laboral.
- Toma de decisiones en proyectos de prevención y promoción de la Salud.
- Promoción de transferencia de resultados obtenidos a la práctica laboral.

Referencias

https://sites.google.com/site/cusmet/ Wiki de trabajo

PRINCIPE FELIPE

EVES

La enseñanza de la estadística en Psicologia; un estudio sobre las actitudes de los estudiantes hacia esta materia

Carles Comas[1], *José Alexandre Martins*[2] *y Assumpta Estrada*[3]

[1]carles.comas@matematica.udl.cat, Universitat de Lleida, España
[2]ejasvm@ipg.pt, UDI/IPG, Instituto Politécnico da Guarda, Portugal
[3]aestrada@matematica.udl.cat, Universitat de Lleida, España

Resumen

Dada la importancia de la Estadística en la formación científica y técnica de profesionales de muy variado perfil, esta materia se ha incorporado, de forma generalizada, en el currículum de la mayoría de estudios universitarios. Esta importancia reconocida, contrasta claramente con las dificultades detectadas en los procesos de enseñanza–aprendizaje de esta materia. Según diferentes autores parte de esta problemática radica en la actitud de los alumnos hacia la materia y añaden que el éxito en esta asignatura, está relacionado con la actitud positiva hacia la propia actividad estadística. En vista de ello, el trabajo que aquí presentamos se centra en el estudio de las actitudes hacia la Estadística de estudiantes de primer curso de Psicología de una universidad pública española (Universitat de Lleida). En particular, analizamos las respuestas a los ítems de la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (Estrada, 2002). Dicha escala ha sido aplicada en diferentes países y considerando estudiantes universitarios de diversas titulaciones aunque no de psicología y, por lo tanto, ahí radica el interés de este trabajo.

Palabras clave: Actitud, Didáctica, Estadística, Psicología.

.

La enseñanza de la estadística en Psicologia; un estudio sobre la actitudes de los estudiantes hacia esta materia

Carles Comas[1], José Alexandre Martins[2] y Assumpta Estrada[1]

[1]carles.comas@matematica.udl.cat Universitat de Lleida, España

[2]jasvm@ipg.pt, UDI/IPG, Instituto Politécnico da Guarda, Portugal

[1]aestrada@matematica.udl.cat, Universitat de Lleida, España

Resumen

Dada la importancia de la Estadística en la formación científica y técnica de profesionales de muy variado perfil, esta materia se ha incorporado, de forma generalizada, en el currículum de la mayoría de estudios universitarios. Esta importancia reconocida, contrasta claramente con las dificultades detectadas en los procesos de enseñanza–aprendizaje de esta materia. Según diferentes autores parte de esta problemática radica en la actitud de los alumnos hacia la materia y añaden que el éxito en esta asignatura, está relacionado con la actitud positiva hacia la propia actividad estadística. En vista de ello, el trabajo que aquí presentamos se centra en el estudio de las actitudes hacia la Estadística de estudiantes de primer curso de Psicología de una universidad pública española (Universitat de Lleida). En particular, analizamos las respuestas a los ítems de la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (Estrada, 2002). Dicha escala ha sido aplicada en diferentes países y considerando estudiantes universitarios de diversas titulaciones aunque no de piscología y, por lo tanto, ahí radica el interés de este trabajo.

Palabras claves:, Actitud, Estadística, Escala actitudes, Psicología

INTRODUCCION

•La Estadística se ha incorporado de forma generalizada al currículum de la mayoría de estudios universitarios como fruto del importante papel que desempeña en la formación científica y técnica de profesionales de muy variado perfil.

•Estos conceptos estadísticos plantea problemas didácticos específicos al no poseer estos estudiantes una base matemática muy amplia (Vera y Díaz, 2013)

•Pero como señala Batanero (1999), lo verdaderamente importante no son solamente los contenidos específicos, sino tratar de desarrollar en nuestros alumnos una actitud favorable, unas formas de razonamiento y un interés por completar posteriormente su aprendizaje.

•Las actitudes son parte integrante de todas las materias de aprendizaje y ocupan un lugar central en el acto educativo, guiando el proceso perceptivo y cognitivo que comporta el aprendizaje de cualquier contenido educativo.

•El trabajo que aquí presentamos se centra en el estudio de las actitudes hacia la Estadística de estudiantes de Psicología de la Facultad de Ciencias de la Educación de una universidad pública.

OBJETIVOS

•Analizar las respuestas a los ítems de la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (Estrada, 2002) con tal de obtener una visión acerca de la actitud hacia la Estadística de estos estudiantes.

METODOLOGÍA

•El Instrumento de medición de actitudes utilizado en este trabajo es la escala de actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (2002).

• Escala de 25 ítems, 14 afirmativos frente a 11 negativos.

• Los ítems constan de un enunciado y una escala tipo Likert de 5 puntos.

• La recogida de datos se realizó en el segundo semestre del curso 2012-2013 a un total de 142 sujetos en los tres primeros cursos de la titulación de una universidad española y se obtuvieron 108 cuestionarios completos.

•Fuerte presencia de mujeres en estos estudios (84%, 88% y 94%, según curso)

•Un 33% de futuros psicólogos llegan a la universidad sin haberla tratado en toda su vida académica

•Y entre los que la estudiaron sólo un 17% de los alumnos encuestados la estudiaron en Primaria, aunque esta materia está presente en este nivel educativo.

RESULTADOS

• En términos globales la actitud de los encuestados respecto a la Estadística es positiva (ver Fig1)

• La actitud empeora con los cursos (87,31, 77,78 y 79.29 según curso, p=0,016)

• No hay diferencia significativas según genero (hombres 87,41 y mujeres 80,29, p=0,055)

•Item mejor valorado: *La estadística no sirve para nada* (4,28), item de formulación negativa, y por tanto consideran la estadística de utilidad (ver también, Tanur, 1992)

•Este resultado combinado con el siguiente item mejor valorado, "*Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas*" (4,07), refuerza la idea de utilidad de esta materia.

• El item peor valorado es "*A través de la Estadística se puede manipular la realidad*" (2,24) sentencia negativa lo que sugiere desconfianza hacia los datos estadísticos

• Otros ítems con <3 puntos son, *Utilizo poco la estadística fuera de la escuela* (2,30), que revela una actitud negativa en términos de acción por medio del uso de la estadística, resultados inferiores a Martins y cols (2012), y finalmente el ítem *La Estadística es fácil* (2,53) indicando según trabajos previos no una falta de la propia disciplina, sino de la manera en que se enseña.

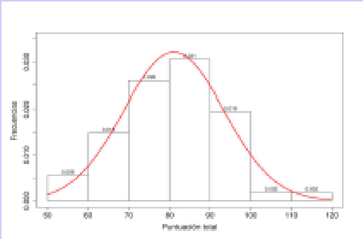


Fig1:Distribución de frecuencias de la puntuación total

DISCUSION Y CONCLUSIONES

• Actitudes en general moderadas o positivas. Este resultado discrepa con Auzmendi (1992) y Wilensky (1997) (actitudes negativas), y se aproxima más a Cuesta, Rifá y Herrero (2001), con el mismo colectivo o más recientemente el de Estrada y col (2010).

• No hay diferencias en la actitud según el sexo

• La actitud global hacia la estadística se empeora con los años de estudio de la misma, posiblemente porque encuentran dificultades con el tema.

REFERENCIAS

Auzmendi, E. (1992). Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias. Mensajero, Bilbao.
Batanero, C. (1999). Cap on va l'educació estadística? Biaix, 15, 2-13
Estrada, A. (2002). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
Estrada, A., Bazán, J.L., Aparicio, A. (2010). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos.UNION,24
Martins, J. A., Nascimento, M.M. y Estrada, A. (2012). Looking back over their shoulders: a qualitative analysis of portuguese teachers 'attitudes towards statistics. Statistics Education Research Journal,11(2),26-44.
Tanur, J. M. (1992). La Estadística una guía de lo desconocido. Alianza Editorial. Madrid.
Vera, O. y Díaz, C. (2013). Dificultades de estudiantes de psicología en relación al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 197-203). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? therapy for epistemological anxiety. Educational Studies in Mathematics, 33, 171-202.

Agradecimientos: Trabajo apoyado por el Proyecto EDU 2013 - 41141- (MICIIN- FEDER) y Pest-OE/EGE/UI4056/2014 UDI/IPG de UDI/IPG (Fundación Portuguesa para la Ciencia y la tecnología, FCT, Portugal)

Nuevas tecnologías para la enseñanza de la estadística en primaria y secundaria

David Molina Muñoz[1] *y Beatriz Cobo Rodríguez*[2]

[1]dmolinam@ugr.es, Universidad de Granada
[2]beacr@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

Los conceptos relacionados con la estadística y la probabilidad aparecen ya en los currículos de las primeras etapas educativas. De hecho, el currículo básico de la educación primaria (Real Decreto 126/2014) incluye dentro del área de matemáticas un bloque completo dedicado exclusivamente a la estadística y la probabilidad. En este bloque, se pretende que el alumno alcance objetivos sencillos como la identificación de variables cuantitativas y cualitativas en situaciones cotidianas, la interpretación de gráficos estadísticos básicos o la aplicación de algunas medidas de centralización a situaciones familiares. Del mismo modo, en la educación secundaria obligatoria, la estadística y la probabilidad tienen un lugar destacado dentro del área de las matemáticas. En el Real Decreto 1631/2006, que regula las enseñanzas mínimas correspondientes a este nivel educativo, se justifica la introducción de la estadística en esta etapa alegando que "debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio ha de capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística".

En este contexto, el uso de ejemplos cercanos y experimentos sencillos que ilustren los contenidos teóricos es muy importante, principalmente por dos motivos: la edad del alumnado y el carácter eminentemente aplicado de la materia. La edad de los alumnos del primer curso de primaria oscila entre los 5 y los 6 años, por lo que es imprescindible utilizar pequeños juegos como recurso didáctico a la hora de presentar nuevos conceptos con el objetivo de que el niño interiorice las ideas con más facilidad. Así, en los primeros cursos de primaria, éstos serán ejemplo intuitivos (como contar el número de niños y de niñas en la clase o contar el número de hermanos de cada niño) e irán adquiriendo mayor dificultad a medida que avanza la formación del niño, llegando a la realización de experimentos aleatorios complejos en los últimos cursos de la secundaria, como el lanzamiento de uno o varios dados o la extracción de bolas de diferentes colores de una urna.

Las nuevas tecnologías juegan un papel primordial a la hora de la realización de estos experimentos. De un tiempo a esta parte, tanto ordenadores como tablets han irrumpido con fuerza en el aula y en muchas de ellas, las pizarras electrónicas han sustituido a las pizarras tradicionales. La presencia de este tipo de dispositivos es cada vez más habitual en colegios e institutos, por lo que es aconsejable que el docente haga uso de ellos para así aprovechar las ventajas que se derivan de su utilización. En este trabajo haremos un repaso de algunos de los recursos informáticos actualmente disponibles para la realización de juegos aleatorios en el aula.

Palabras clave: Nuevas tecnologías, primaria, secundaria.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 463-464). Granada, 2015.

Nuevas tecnologías aplicadas a la enseñanza de la estadística en primaria y secundaria

David Molina Muñoz[1], Beatriz Cobo Rodríguez[1]

[1]Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Granada

Objetivos

- Resaltar la importancia de las nuevas tecnologías en el aula.
- Recopilar algunos recursos interesantes que pueden usarse en el aula para la enseñanza de conceptos estadísticos.

Introducción

Los conceptos relacionados con la estadística y la probabilidad aparecen en las etapas más tempranas de la educación. Efectivamente, los currículos de la educación primaria y de la educación secundaria incluyen, dentro del área de matemáticas, sendos bloques dedicados exclusivamente a la estadística y la probabilidad. Los objetivos que se pretenden alcanzar dentro de estos bloques varían según el nivel educativo.

Para la consecución de estos objetivos, es aconsejable el uso de materiales y recursos atractivos que motiven al alumno en su aprendizaje. Igualmente, se recomienda acompañar los conceptos teóricos que se presentan en el aula con ejemplos, experimentos y juegos que hagan que los alumnos los interioricen con más facilidad.

La contundente irrupción de los recursos informáticos en el aula ha revolucionado la metodología didáctica tradicional, facilitando la creación de contenidos atractivos y potenciando la comunicación entre el docente y el alumnado.

Muchos autores (como Lepičnik-Vodopivec y Samec (2012), o O'Donoghue *et al.* (2004)) han discutido sobre las ventajas y los inconvenientes del uso de las nuevas tecnologías en diferentes niveles educativos. Algunos de los pros y los contras de la incorporación de las nuevas tecnologías al ámbito de la educación aparecen recogidos en la tabla 1.

Ventajas	Inconvenientes
Promueve el aprendizaje autónomo	Pueden aparecer problemas técnicos
Permite el uso de una gran variedad de recursos	Requiere una inversión adicional por parte de los centros educativos
Permite el uso de contenidos multimedia (más atractivos para el alumno)	Requiere formación adicional por parte del profesorado
Posibilita ritmos de aprendizaje distintos, según el alumno	

Tabla 1. Pros y contras del uso de nuevas tecnologías en el aula

Dispositivos electrónicos como las tablets y ordenadores son cada vez más frecuentes en el aula. Actualmente, existe una extensa variedad de aplicaciones y recursos on-line para los fines más diversos. A continuación se presenta una selección de los materiales disponibles más interesantes que pueden utilizarse para la enseñanza de la estadística.

Recursos para la enseñanza de la estadística

- Aplicaciones para tablets

"Tirar los dados" y "Coin Flip" son aplicaciones que simulan el lanzamiento de uno o varios dados y el de una moneda, respectivamente. Estas aplicaciones, que se encuentran disponibles de forma **gratuita** en Play Store, pueden utilizarse para introducir de una forma lúdica conceptos estadísticos como el de experimento aleatorio o el de probabilidad de un suceso. Además de la gratuidad, las aplicaciones presentan otras características interesantes como son la facilidad de uso o la vistosidad de sus interfaces.

Figura 1. Interfaz de la aplicación "Tirar los dados"

Figura 2. Interfaz de la aplicación "Coin Flip"

En la misma línea , la aplicación "Random Card", también gratuita, va extrayendo aleatoriamente cartas de la baraja francesa de forma sucesiva. Aplicaciones de este tipo son útiles, por ejemplo, a la hora de ilustrar la regla de Laplace o el teorema de la probabilidad total.

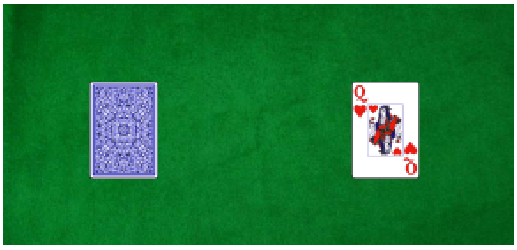


Figura 3. Interfaz de la aplicación "Random Card"

Aunque las aplicaciones descritas están programadas para dispositivos Android, existen aplicaciones equivalentes pensadas para usuarios de iPhone.

- Recursos online

Igualmente, existen multitud de recursos online que pueden ser de gran utilidad en el aula. Un buen ejemplo lo encontramos en la web Random (www.random.org) desde la que, además de simular el lanzamiento de dados o monedas y la extracción aleatoria de cartas como en el caso anterior, es posible la generación aleatoria de secuencias de números, horas, fechas, coordenadas geográficas,...

Referencias

- Real Decreto 126/2014, BOE núm. 52, de 1 de marzo de 2014, pp. 19349-19420.
- Real Decreto 1631/2006, BOE núm. 5, de 5 de enero de 2007, pp. 677-773.
- Lepičnik-Vodopivec, J. y Samec, P. "*Advantages and disadvantages of information-communication technology usage for four-year-old children and consequences of its usage for the children's development*". International Journal of Humanities and Social Science, Vol. 2, Nº 3., pp. 54 - 58 (2012)
- O'Donoghue, J., Singh, G. y Green, C. "*A comparison of the advantages and disadvantages of IT based education and the implications upon students*". Interactive Educational Multimedia, Nº 9, pp. 63-76. (2004)
- Play Store: https://play.google.com/store

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el programa de becas FPU del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España.

Sentido probabilístico: una experiencia en aulas de infantil

Sandra Fuentes Mardones

sandrafuentesm@gmail.com, Colegio Cardenal Raúl Silva Henríquez de Paillaco, Chile

Resumen

El azar forma parte de la vida cotidiana de toda persona y el culturizar a la población en torno al tema es una de las preocupaciones de las reformas en educación que se realizan en diversos países. Esta investigación fue realizada en educación infantil de 4 y 5 años en Chile y pretende evidenciar el grado de sentido probabilístico que tienen los alumnos, con un experimento aleatorio, antes de ingresar al sistema formal de educación.

Palabras clave: sentido probabilístico, nociones de probabilidad, juego y azar.

.

SENTIDO PROBABILISTICO

"Una experiencia en aulas de infantil"

Fuentes Mardones, Sandra[1]

[1]sandrafuentesm@gmail.com, Colegio Cardenal Raúl Silva Henríquez de Paillaco, Chile

¿Qué nociones probabilísticas tienen los niños antes de la educación formal?

Indagamos en aulas de infantil en Chile, con niños de 4 y 5 años, realizamos con ellos un experimento aleatorio y analizamos sus comentarios de lo que iban observando en el transcurso del juego.

ACTIVIDAD

El experimento aleatorio consistió en extraer una bola azul, de una pecera transparente que contenía bolas azules y blancas, se partió con 5 bolas de cada color, luego se cambiaron las reglas del juego y solo se dejaron 5 bolas, al principio todas del mismo color y en el transcurso del experimento-juego se fueron cambiando de una en una por otra de distinto color, en cada fase del experimento se instó a los alumnos a observar y verbalizar lo que observaban.

RESULTADOS

Se evidencia en los alumnos nociones de probabilidad intrínsecas a su quehacer diario, como por ejemplo el no querer jugar cuando no hay posibilidades de ganar, o en frases como "Las bolas buenas me hacen ganar y las bolas malas me hacen perder", llegando a cuantificar las bolas que los hacen ganar, "Aquí hay más blancas (3) que azules (2) parece que puedo perder". El concepto es más rico ya que hablamos de la cuantificación como comparación de las probabilidades de cada evento, perder o ganar.

Expresan, cuando se les invita a participar del juego, conceptos como probabilidad nula, poco probable o muy probable.

Los alumnos utilizan palabras que dan sentido a la probabilidad y al azar. Nos encontramos con un vocabulario más rico en contenidos probabilísticos que el que esperábamos de ellos al no estar incluido en el currículo formal.

Referencias

Alsina, A. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. Números 80, 7-24.
Alsina, A. (2013). La estadística y la probabilidad en educación infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revistas didácticas específicas*, 7 (pp. 4-22).
Fuentes, Arteaga y Batanero (2014). Gráficos estadísticos y tablas: una actividad exploratoria en educación infantil. XV congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Baeza, España.

Sitios web de análisis estadístico como recurso para la docencia estadística

B. Valero Aguilero[1], M.M. Rodríguez del Águila[2], M. Expósito Ruiz[3]

[1]valeroaguilera@hotmail.com, [3]mexposito@fibao.es, Fundación Pública Andaluza para la Investigación Biosanitaria de Andalucía Oriental
[2]mmar.rodriguez.sspa@juntadeandalucia.es, Complejo Hospitalario Universitario de Granada

Resumen

Introducción. Existen en el mercado numerosos programas que realizan análisis estadísticos, teniendo muchos de ellos un coste económico importante en su adquisición. El software libre permite la instalación y uso de forma gratuita, teniendo la ventaja de estar permanentemente actualizado. La utilización de todos estos programas está supeditada a su instalación en ordenadores personales, dificultando por tanto el acceso desde cualquier punto. Los sitios web dedicados a análisis estadístico son una alternativa muy útil que permite la realización de cálculos en la nube con tan solo tener acceso a Internet. El objetivo fue realizar una recopilación de enlaces web dedicados a realizar cálculos estadísticos online, describiendo las prestaciones y características principales de cada uno de ellos para la docencia de la estadística.

Metodología. Se llevó a cabo un estudio de tipo descriptivo transversal. La población de estudio está formada por sitios web existentes en Internet destinados al análisis estadístico de datos. Se realizó una búsqueda en Google utilizando los criterios de búsqueda *calculadora estadística* y *statistic calculator.* En cada enlace se evaluó la posibilidad de realización o no de los siguientes análisis: análisis descriptivos, representaciones gráficas, test paramétricos, test no paramétricos, regresión y correlación, análisis multivariante y cálculo de tamaño muestral, así como la forma de introducción de datos (no tabulados, tabulados, subida de fichero o no procede) y si son aptos para la docencia de la estadística.

Resultados. Gran parte de los enlaces encontrados tienen incorporada la funcionalidad de realizar análisis descriptivos, test de hipótesis paramétricos y no paramétricos, así como cálculo de tamaño muestral. Se encuentran muy pocos sitios destinados al análisis multivariante y a las representaciones gráficas. Cabe destacar una serie de páginas de ayuda estadística que aunque no realizan cálculos son muy potentes en la descripción de los procedimientos a utilizar. En general se suelen introducir los datos de forma tabulada para realizar los cálculos. Casi todos los enlaces pueden ser utilizados para la docencia de la estadística.

Conclusiones. Existe una gran variedad de sitios web de análisis estadísticos que permiten al alumno la realización de cálculos estadísticos sin necesidad de tener instalado un software específico para ello, aunque con la desventaja de que muchos de ellos no permite la utilización de ficheros de datos propios. Se debe potenciar más el uso de estos enlaces como alternativa al software comercial existente.

Palabras clave: Análisis estadístico, Sitios web, Docencia, Software estadístico.

Sitios web de análisis estadístico como recurso para la docencia estadística

Valero Aguilera B, Rodríguez del Águila MM[1], Expósito Ruiz M[2]

[1]UGC M. Preventiva, Vigilancia y Promoción de la Salud; [2]Fundación para la Investigación Biosanitaria de Andalucía Oriental (FIBAO); Complejo Hospitalario Universitario de Granada; ibs.Granada

Correspondencia: mmar.rodriguez.sspa@juntadeandalucia.es

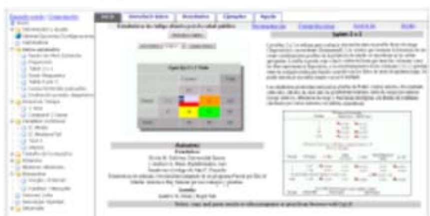
Introducción y objetivo

- Existen en el mercado numerosos programas que realizan análisis estadísticos, muchos de ellos con coste económico importante
- El software libre permite la instalación y uso de forma gratuita, teniendo la ventaja de estar permanentemente actualizado
- La utilización de estos programas está supeditada a su instalación en ordenadores personales, dificultando por tanto el acceso desde cualquier punto
- Los sitios web dedicados a análisis estadístico son una alternativa muy útil que permite la realización de cálculos en la nube con tan solo tener acceso a Internet
- El **objetivo** fue realizar una recopilación de enlaces web que realizan cálculos estadísticos online, describiendo las prestaciones y características principales de cada uno de ellos para la docencia de la estadística

Método

- Estudio descriptivo transversal
- Población de estudio: sitios web existentes en Internet destinados al análisis estadístico de datos
- Búsqueda Google utilizando los criterios de búsqueda *calculadora estadística* y *statistic calculator*
- Se evaluó la realización de los siguientes análisis:
  - Análisis descriptivo, representaciones gráficas, test paramétricos, test no paramétricos, regresión y correlación, análisis multivariante y cálculo de tamaño muestral, introducción de datos (no tabulados, tabulados, subida de fichero o no procede) y apto/no apto para docencia estadística

Resultados



Dirección	Descriptiva Gráficos	Test paramétricos	Test no paramétricos	Regresión Correlación	Multivariante	Tamaño muestral	Datos tabulados
http://www.socscistatistics.com/	P	X	X				X
http://www.statsdirect.com/help/	A	A	A	A	AP	A	
http://www.openepi.com/		X				X	
http://es.numberempire.com/statisticscalculator.php	P						
http://www.statcrunch.com/	X						X
http://www.graphpad.com/guides/prism/6/statistics/	A	A	A	A		A	
http://vassarstats.net/		X	X	X	X	X	X
http://statpages.org/	X	X	X	X	X	X	X
http://www.chartgo.com/index_es.jsp	X						
http://es.easycalculation.com/statistics/statistics.php	P	X		X			

P: poco, A: sólo ayuda, X: implementado

Conclusiones

Existe una gran variedad de sitios web de análisis estadísticos que permiten al alumno la realización de cálculos estadísticos sin necesidad de tener instalado un software específico para ello, aunque con la desventaja de que muchos de ellos no permite la utilización de ficheros de datos propios. Se debe potenciar más el uso de estos enlaces como alternativa al software comercial existente.

Servicio Andaluz de Salud
CONSEJERÍA DE IGUALDAD, SALUD Y POLÍTICAS SOCIALES

Usos de la estadística: Modelos estocásticos para la estimación del crecimiento tumoral

Ramón Gutiérrez Sánchez[1] *y Elena Molina Portillo*[2]

[1]ramongs@ugr.es, Universidad de Granada
[2]elena.molina.easp@juntadeandalucia.es, Escuela Andaluza de Salud Pública

Resumen

El modelado matemático del crecimiento poblacional y, en concreto, del crecimiento tumoral ha sido objeto de considerable atención por parte de los investigadores. En la actualidad existen una amplia gama de modelos que abordan esta cuestión, desde los modelos clásicos de crecimiento deterministas a los modelos estocásticos más sofisticados y realistas, que incluyen la posibilidad de estudiar el control del crecimiento del tumor mediante la inclusión de los efectos de la terapia recibida.

Uno de los usos de la estadística en áreas como la salud pública es investigar y desarrollar técnicas adecuadas para poder estimar y controlar el comportamiento de los tumores en aras de favorecer el conocimiento científico y supervivencia de dicha enfermedad. En este trabajo mostramos un ejemplo de este uso.

Palabras clave: Usos de la estadística, Estimación, Crecimiento tumoral.

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 469-470). Granada, 2015.

Usos de la estadística: Modelos estocásticos para la estimación del crecimiento tumoral

Ramón Gutiérrez Sánchez[1] *y Elena Molina Portillo*[2]
[1]ramongs@ugr.es, Universidad de Granada
[2]elena.molina.easp@juntadeandalucia.es, Escuela Andaluza de Salud Pública

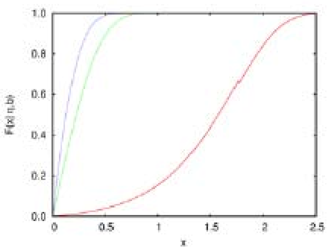
El modelado matemático del crecimiento poblacional y, en concreto, del crecimiento tumoral ha sido objeto de considerable atención por parte de los investigadores. En la actualidad existen una amplia gama de modelos que abordan esta cuestión, desde los modelos clásicos de crecimiento deterministas a los modelos estocásticos más sofisticados y realistas, que incluyen la posibilidad de estudiar el control del crecimiento del tumor mediante la inclusión de los efectos de la terapia recibida.

Uno de los usos de la estadística en áreas como la salud pública es investigar y desarrollar técnicas adecuadas para poder estimar y controlar el comportamiento de los tumores en aras de favorecer el conocimiento científico y supervivencia de dicha enfermedad. En este trabajo mostramos un ejemplo de este uso.

Trabajos basados en modelos determinísticos (Primeras pruebas de estimación realizadas)

Los primeros modelos estudiados hacen uso de las funciones clásicas de crecimiento derivadas de la teoría general de crecimiento de la población, utilizadas en demografía, economía y física, entre otros muchos campos científicos.

- modelo determinista exponencial
- crecimiento logístico
- función de crecimiento Gompertz determinista
- función de crecimiento Gompertz deterministas con funciones terapias
- Etc.



Versiones estocásticas

En la actualidad se consideran versiones estocásticas que consideran el crecimiento, básicamente, como un fenómeno que tiene lugar en un contexto aleatorio (medio ambiente).
Algunas ventajas importantes de los modelos estocásticos basados en difusiones, con respecto a los modelos deterministas descritos anteriormente son:

- Proporcionan modelos más realistas que los que son meramente deterministas, porque el crecimiento de la población (y, en particular, el crecimiento de las células tumorales) se lleva a cabo esencialmente al azar dentro de un contexto.
- La metodología basada en modelos estocásticos mediante procesos de difusión permite proponer y resolver problemas de gran interés práctico que no pueden ser abordados mediante la modelización determinista de crecimiento. Los problemas pueden ser examinados siguiendo una formulación estocástica de Ito y / o que sigan ecuaciones diferenciales de Kolmogorov. Los modelos estocásticos hacen que sea posible incluir funciones terapia (modeladas usando factores exógenos funcionales). En general, se incluyen en la difusión drift (medida infinitesimal del proceso) adoptada como base para el modelo.

Teaching how to do statistical analysis to prioritize genes or mutations for diseases using web tools

Francisco García-García[1], *Alejandro Alemán*[2] *y Joaquín Dopazo*[3]

1fgarcia@cipf.es [2]aaleman@cipf.es [3]jdopazo@cipf.es. Centro de Investigación Príncipe Felipe

Abstract

Recent advances in genome sequencing technologies have enabled a breakthrough in the investigation of the genetic basis of disease. However, the resolving power of these technologies has shifted the bottleneck of the discovery process from the production to the data analysis phase.

In order to help to circumvent this bottleneck, we have generated several web tools for the study of variations in genetic diseases. This is an appropiate resource to teach Statistics for this specific group of professionals:

1. BiERapp (http://bierapp.babelomics.org/)

Whole-exome sequencing has become a fundamental tool for the discovery of disease-related genes of familial diseases and the identification of somatic driver variants in cancer. However, finding the causal mutation among the enormous background of individual variability in a small number of samples is still a big challenge. BiERapp is a web-based interactive framework designed to assist in the prioritization of disease candidate genes in whole exome sequencing studies.

2. Spanish Population Variant Server (http://bioinfo.cipf.es/apps-beta/spvs/beta/)

This tool was created with the aim of providing the scientific and medical community with information about the variability of the Spanish population. It is useful for filtering polymorphisms and local variants.

3. TEAM (http://team.babelomics.org/)

A web tool for the design and management of panels of genes for targeted enrichment and massive sequencing for clinical applications.

Key words: Genomics, statistical analysis, web tools, Biotechnology

Web tools to analyze and prioritize genes or mutations for diseases

Francisco García-García[1]. Alejandro Alemán[1,2], Joaquín Dopazo[1,2,3]

1 Systems Genomics Lab, Computational Genomics, Centro de Investigación Príncipe Felipe (CIPF), Valencia, Spain.
2 BIER, CIBER de Enfermedades Raras (CIBERER). 3 Functional Genomics Node (INB)

Aim

- Recent advances in genome sequencing technologies have enabled a breakthrough in the investigation of the genetic basis of disease. However, the resolving power of these technologies has shifted the bottleneck of the discovery process from the production to the **statistical data analysis** phase.
- Our team (**BIER**: Bioinformatics Platform for Rare Diseases; http://www.ciberer.es/bier) has developed several we tools aimed at different kind of statistical analysis: **discovery of new variants, disease diagnosis and visualization of genomics results**.

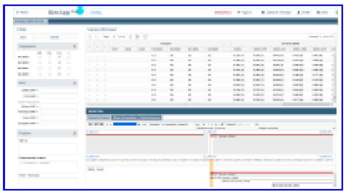
Methods

- BiER has designed pipelines for Genomics and Transcriptomics sequencing data analysis.
- These web applications makes an intensive use of new web technologies and standards like HTML5. R (free software environment for statistical computing) was used for analysis modules.
- Several training activities were carried out to facilitate the understanding and management of data.

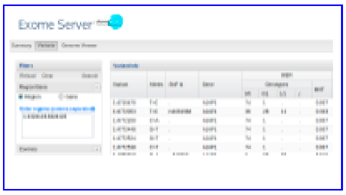
Results

- Scientific collaborations took place among **19 CIBERER research CIBERER.**
- **Recent publications** include the discovery of two new mutations in the BCKDK gene, responsible of a neurobehavioral deficit in pediatric patients (1), new mutations in different genes causing inherited retinal dystrophies (2) and metabolic diseases (3).
- These **web tools** were generated to analyze and improve the management of results:

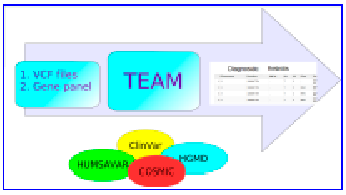
- **BiERapp** (4). A web-based interactive framework to assist in the prioritization of disease candidate genes in whole-exome secuencing studies.
- **ExomeServer**. Created with the intention to provide the scientific and medical community, information about the variability in the Spanish population. It is useful for filtering polymorphisms and local variants.
- **TEAM** (5). A web tool for the design and management of panels of genes for targeted enrichment and massive sequencing for clinical applications.
- **BABELOMICS** (6). Gene expression, genome variation and functional profiling analysis suite (http://babelomics.bioinfo.cipf.es/).



http://bierapp.babelomics.org/



http://bioinfo.cipf.es/apps-beta/exome-server/beta/



http://team.babelomics.org/

Conclusions

- Interaction between research groups and BIER platform has been an important factor in web design and adjustment tools for analyzing sequencing data and its interpretation.
- The results obtained from the analyzes have provided a better understanding of the genomic data of these diseases, as well as the detection of biomarkers that can be used in the prevention, diagnosis and clinical therapy design.
- The use of web tools improved the skills of researchers in the statistical analysis of genomic data.

References

(1) Garcia-Cazorla A., Oyarzabal A., Fort J., Robles C., Castejon E., Ruiz-Sala P., Bodoy S., Merinero B., Lopez-Sala A., Dopazo J., et al. Two Novel Mutations in the BCKDK Gene (Branched-Chain Keto-Acid Dehydrogenase Kinase) are Responsible of a Neurobehavioral Deficit in two Pediatric Unrelated Patients. Hum. Mutat 2014.
(2) de Castro-Miro M., Pomares E., Lores-Motta L., Tonda R., Dopazo J., Marfany G., Gonzalez-Duarte R. Combined genetic and high-throughput strategies for molecular diagnosis of inherited retinal dystrophies. PLoS ONE 2014;9:e88410.
(3) Tort F., Garcia-Silva M.T., Ferrer-Cortex X., Navarro-Sastre A., Garcia-Villoria J., Coll M.J., Vidal E., Jimenez-Almazan J., Dopazo J., Briones P., et al. Exome sequencing identifies a new mutation in SERAC1 in a patient with 3-methylglutaconic aciduria. Mol. Genet. Metab. 2013;110:73-77.
(4) Aleman, A; Garcia-Garcia, F; Medina, I; Dopazo, J. A web tool for the design and management of panels of genes for targeted enrichment and massive sequencing for clinical applications. Nucleic Acids Res. 2014 May 26. pii: gku87
(5) Aleman, A; Garcia-Garcia, F; Salavert, F; Medina, I; Dopazo, J. A web-based interactive framework to assist in the prioritization of disease candidate genes in whole exome sequencing studies. Nucleic Acids Research. 2014 May 6. PMID: 24803668.
(6) Medina et all. Babelomics: an integrative platform for the analysis of transcriptomics, proteomics and genomic data with advanced functional profiling. NAR-00461-Web-8-2010.R1 .

Seminario

Segundas Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Ingeniería didáctica basada en el Enfoque Ontosemiótico: El caso de la enseñanza de la estadística

Juan D. Godino

jgodino@ugr.es, Universidad de Granada

Resumen

En el marco de las Segundas Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria se celebró un Seminario de Investigación sobre el uso de la metodología de ingeniería didáctica basada en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Esta actividad se centró en el estudio y discusión del artículo,

> Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 167-200.

El seminario se organizó en dos momentos o fases que permitieron aprovechar las posibilidades ofrecidas por los recursos informáticos disponibles:

Fase sincrónica, basada en el uso de una *videosala web* disponible en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en la que el ponente presentó información complementaria sobre la metodología de la ingeniería didáctica y el EOS, y respondió a las cuestiones planteadas en tiempo real por los participantes.

Fase asincrónica, basada en el uso de un foro implementado en la plataforma soporte de las Jornadas Virtuales, para plantear cuestiones al ponente sobre el contenido del artículo en discusión. Esta fase tuvo lugar durante los tres días de las Jornadas.

Seguidamente incluimos una síntesis del desarrollo de la fase sincrónica.

Introducción a la ingeniería didáctica basada en el EOS

En este artículo desarrollamos una visión ampliada de la ingeniería didáctica, entendida como una clase específica de investigación basada en el diseño, en la que las herramientas teóricas que sirven de base en las distintas fases del proceso metodológico forman parte del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS). Se tienen en cuenta las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional en las fases de estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación en un estudio de caso sobre enseñanza de la estadística para la formación inicial de profesorado de Educación Primaria. Se muestra que la aplicación de las nociones de configuración de objetos y procesos matemáticos, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica permiten revelar hechos didácticos significativos que complementan los análisis realizados con otras herramientas teóricas

El interés reciente en la literatura anglosajona por las investigaciones basadas en el diseño y su reflejo en educación matemática complementa el ya tradicional en la literatura francesa sobre ingeniería didáctica (Artigue, 1989; 2011), la cual, apoyada en la Teoría de Situaciones

En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2 (pp. 475-477). Granada, 2015.

Didácticas (Brouseau, 1998), viene desarrollando importantes contribuciones desde la década de los 80. En Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi (2013) se estudian las concordancias y complementariedades de estas aproximaciones metodológicas y se propone una visión generalizada de la ingeniería didáctica que incluye a las investigaciones orientadas hacia el diseño instruccional.

El artículo en discusión tiene una doble finalidad: Por una parte, se trata de explorar las posibilidades ofrecidas por el marco teórico del EOS como base para la investigación orientada al diseño de procesos de enseñanza y aprendizaje, esto es, para el desarrollo de ingenierías didácticas, entendidas en el sentido generalizado propuesto en Godino et al. (2013). Por otra parte, se trata de aportar conocimientos específicos sobre la formación en estadística de los futuros maestros, problemática que requiere investigación como se pone de manifiesto en diversos trabajos (Batanero, Burril y Reading, 2011).

Se resaltó que en cada una de las fases metodológicas de la ingeniería didáctica el EOS aporta herramientas propias que permiten hacer análisis complementarios respecto a los realizados con otros marcos teóricos. Así, en la fase de estudio preliminar la noción de significado de referencia da una orientación específica a la epistemología del contenido cuyo aprendizaje se pretende. Ello es así por la manera pragmatista - antropológica en que se interpreta el significado institucional de los objetos matemáticos, complementada con la noción de configuración ontosemiótica. En la fase de diseño, una vez seleccionada una muestra representativa de situaciones – problemas, nos propone prever de manera sistemática la trama de objetos y procesos que la resolución de tales situaciones pone en juego, a fin de identificar posibles conflictos de aprendizaje y los elementos a tener en cuenta en los procesos de institucionalización y evaluación. En la fase de implementación, las distintos tipos de configuraciones didácticas, procesos didácticos y la noción de conflicto semiótico interaccional ayudan a identificar hechos didácticos significativos que orientan la evaluación formativa y la optimización del aprendizaje. En la fase de evaluación o análisis retrospectivo, la noción de idoneidad didáctica aporta vías para la reflexión sistemática sobre las distintas facetas del proceso de estudio e identificar potenciales decisiones que mejoren dicho proceso en nuevas implementaciones.

La noción de idoneidad didáctica proporciona una síntesis global sobre los procesos de estudio matemático, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas dimensiones implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales y la identificación de conflictos semióticos potenciales. La idoneidad interaccional y mediacional requiere analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles. El análisis de las normas ayudará a comprender los factores ecológicos que condicionan los procesos de estudio, y por tanto la valoración de la idoneidad ecológica.

Referencias

Artigue, M. (1989) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 9* (3), 281-308.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 15-25). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Batanero, C., Burrill, G., & Rearding, C. (2011) (Eds). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study*. Berlin: Springer.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8, WG 16). Turkey, 2013. (Disponible en,

http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/Godino_CERME_2013.pdf

Godino, J. D., Batanero C. & Font V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.